ELHANAN MOTZKIN

Une classe d'ensembles analytiques p-adiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 1 (1975-1976), exp. nº 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_1_A1_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° 2, 8 p.

3 novembre 1975

UNE CLASSE D'ENSEMBLES ANALYTIQUES p-ADIQUES

par Elhanan MOTZKIN

1. Introduction.

Soit K un corps valué non archimédien complet et algébriquement clos. Une limite uniforme de fractions rationnelles sans pôles dans une partie A de K est dite élément analytique sur A. L'ensemble A est dit analytique si tout élément analytique sur A nul au voisinage d'un point de A est identiquement nul sur A. On trouvera dans [3] une caractérisation des ensembles analytiques.

L'objet de cette note est d'exhiber une classe importante d'ensembles analytiques. Nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in K[[x]] ,$$

avec $\sup_n |a_n| = M < +\infty$, et soit $0 < c < M$. Alors l'ensemble

$$A_c = \{x \in D(0 , 1^-) ; \ |g(x)| > c\} \cup \{x ; \ |x| \geq 1\}$$

est analytique, où $D(0 , 1^-) = \{x \in K ; \ |x| < 1\}$.

Ce théorème tire son intérêt du résultat suivant de DWORK et de ROBBA [1] : Soit L un opérateur différentiel à coefficients éléments analytiques dans une réunion de classes résiduelles. Il existe un opérateur différentiel R à coefficients éléments analytiques dans un disque générique $\bar{t}$ dont le noyau coïncide avec le "noyau borné" (les fonctions bornées du noyau) de L dans $\bar{t}$. Si la dimension du noyau borné de L dans une classe résiduelle $\bar{a}$ égale à la dimension du noyau borné de L dans $\bar{t}$, alors les coefficients de R se prolongent en fonctions méromorphes dans $\bar{a}$ (et le noyau de R dans $\bar{a}$ coïncide avec le noyau borné de L dans $\bar{a}$).

En fait, ce que démontrent DWORK et ROBBA c'est que les coefficients de R se prolongent en éléments analytiques sur des ensembles A_c (puis ils laissent tendre c vers 0). Pour que ce prolongement soit univoque, il faut que les A_c soient analytiques, et c'est cela que démontre le théorème 1.

En outre, le théorème 1 permet de compléter des résultats dus à A. ESCASSUT [2]. En effet, A. ESCASSUT a démontré que si on suppose le corps résiduel $\bar{K}$ de caractéristique $p \neq 0$, alors il existe des ensembles A_c qui ne sont pas analytiques si l'on prend

$$g(x) = \log(1 - x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} .$$

(ESCASSUT utilise ce résultat pour démontrer que la transformée de Fourier p-adique définie par B. de MATHAN et par J. FRESNEL n'est pas injective.)

La question se pose alors de savoir si les A_c ne sont pas analytiques dès que g n'est pas bornée (c'est-à-dire $\sup_n |a_n| = +\infty$ et $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$). Nous montrons dans § 10 que, dans ce cas, il n'y a pas de réponse générale et qu'il existe des ensembles A_c analytiques associés à des fonctions g non bornées (théorème 2).

Remarque. - L'ensemble A est formé de K tout entier privé d'un certain nombre de disques contenant les zéros de g. Si g n'a qu'un nombre fini de zéros dans le disque unité (ce qui se produit si, et seulement si, le supremum des $|a_n|$ est atteint pour un n), alors A est un quasi-connexe de Krasner et donc est analytique. Par contre, si g a un nombre infini de zéros, A n'est jamais un quasi-connexe. Notez que si les coefficients de g appartiennent à un sous-corps de K sur laquelle la valuation est discrète (par exemple $\underset{\sim}{Q}_p$ ou bien une extension algébrique finie de $\underset{\sim}{Q}_p$), et si g est bornée, alors g n'a qu'un nombre fini de zéros dans le disque unité.

2. Notations.

On pose :

$$D(a , r^-) = \{x \in K ; \ |x - a| < r\} ,$$

$$D(a , r^+) = \{x \in K ; \ |x - a| \leq r\} .$$

Un trou d'un ensemble $A \subset K$ est un disque non circonférencié maximal de $\complement A \cap \hat{A}$, où $\hat{A}$ est le plus petit disque circonférencié contenant A.

Si $f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ a μ comme rayon de convergence, on pose, pour $r < \mu$,

$$|f|(r) = \sup_n |b_n| r^n .$$

On a

$$|f|(r) = \sup_{|x|=r} |f(x)| = \sup_{|x|\leq r} |f(x)| .$$

3. Description de A_c.

Nous avons une suite de cercles $|x| = r_n$ sur lesquels se trouvent les zéros de g et donc les trous de A_c, et $r_n \to 1$. Sur chaque cercle, il y a un nombre fini de disques de rayon r_n^- qui contiennent les trous. Nous notons ces disques $D(\alpha_n , r_n^-)$; ainsi l'indice n numérote non pas les rayons distincts mais les disques contenant des trous (la suite $\{r_n\}$ n'est donc pas strictement croissante). Dans chaque $D(\alpha_n , r_n^-)$, on a J_n trous, notés T_{nk}, $1 \leq k \leq J_n$. On pose $T_{nk} = D(a_{nk} , \rho_{nk})$, $1 \leq k \leq J_n$. Nous avons donc $|a_{nk}| = r_n$, $1 \leq k \leq J_n$, et $|a_{nk} - a_{nj}| < r$, $j = 1 , \dots , J_n$. Nous noterons q_{nk} le nombre de zéros de g situés dans T_{nk}, et $q_n = \sum_{k=1}^{J_n} q_{nk}$ le nombre de zéros de g situés dans $D(\alpha_n , r_n^-)$.

4. Condition d'analyticité.

Nous commençons par trouver une condition portant seulement sur la configuration des A_c qui permettra de décider si l'ensemble A_c considéré est analytique ou non. (Cette condition est une particularisation de la condition générale établie dans [3].)

Notons d'abord que si A_c était non analytique, il existerait un élément analytique f sur A_c et deux points x_0 , $y_0 \in A_c$ tels que $f(x_0) \neq 0$ et $f \equiv 0$ dans un voisinage V de y_0 , et qu'on peut supposer $x_0 = 0$ et

$$V = \{x \in K \; ; \; |x| \geqslant 1\} \; .$$

En effet, $A_c \cap D(0 \, , \, 1^-)$ est un quasi-connexe de Krasner et donc analytique [3]. Il s'ensuit que $|y_0| < 1$ implique que $f \equiv 0$ dans $A_c \cap D(0 \, , \, 1^-)$, et donc, par le principe du maximum, dans A_c tout entier.

Remarquons ensuite qu'une telle f est forcément telle que $|f(x)| \to 0$ quand $r_n \to 1$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $Q \in K(x)$ telle que

$$\|f - Q\|_{A_c} < \varepsilon \; .$$

Comme $f(x) = 0$ si $x \in \{x \in K \; ; \; |x| > 1\}$, il existe $\delta > 0$ tel que $|Q(x)| < \varepsilon$ et n'a ni pôles ni zéros dans $\{x \in K \; ; \; |x| > 1 - \delta\}$. Il s'ensuit que $|f(x)| < \varepsilon$ dans $\{x \in K \; ; \; |x| > 1 - \delta\}$.

Si on suppose

(1) Que f n'a pas de zéros (des zéros ne feraient qu'augmenter sa valeur absolue),

(2) Que tous les pôles situés dans un trou donné T_{nk} sont localisés à son centre a_{nk} ,

(3) Que $f(0) = 1$,

on aura alors

$$f(x) = \prod_{i,k} \left(\frac{a_{ik}}{x - a_{ik}}\right)^{p_{ik}}$$

où p_{ik} est le nombre de pôles de f dans T_{ik} .

Fixons T_{nj} , et calculons $|f(x)|$ pour x tel que $|x - a_{nj}| = \rho_{nj}$. On a

$$|f(x)| = \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{r_m}{r_n}\right)^{p_m} \left(\frac{r_n}{\rho_{nj}}\right)^{p_{nj}} \prod_{k \neq j} \left(\frac{r_n}{|a_{nj} - a_{nk}|}\right)^{p_{nk}} ,$$

où $p_m = \sum_{k=1}^{J_m} p_{mk}$.

Résumons :

Si A_c est non analytique, alors il existe (p_{ni}) , $n = 1 , 2 , \dots ,$ $1 \leqslant i \leqslant J_n$, tels que la suite

$$\lambda_n = \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{r_m}{r_n}\right)^{p_m} \sup_j \left[\left(\frac{r_n}{\rho_{nj}}\right)^{p_{nj}} \prod_{k \neq j} \left(\frac{r_n}{|a_{nk} - a_{nj}|}\right)^{p_{nk}}\right] ,$$

où $p_m = \sum_{k=1}^{J_m} p_{mk}$, tende vers 0 quand $n \to \infty$.

Ceci est vrai même si f ne satisfait pas aux conditions (1) et (2) (voir [3]).

La réciproque est également vraie [2].

5. Nouvel énoncé du théorème 1.

Le théorème 1 s'énonce donc ainsi :

THÉORÈME 1^{bis}. – Pour toute suite d'entiers positifs ou nuls

$$(p_{nk}) \ , \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 1 \leq k \leq J_n \ ,$$

la suite (λ_n), définie dans le § 4, ne tend pas vers 0.

6. Une proposition.

Posons $\bar{p}_n = (p_{n1}, \ldots, p_{nJ_n})$, et

$$\beta_{nj}(\bar{p}_n) = \left(\frac{r_n}{p_{nj}}\right)^{p_{nj}} \prod_{k \neq j} \left(\frac{r_n}{|a_{nj} - a_{nk}|}\right)^{p_{nk}} .$$

On rappelle que $p_n = \sum_{k=1}^{J_n} p_{nk}$.

PROPOSITION. – Soient $\bar{p}_n$ et $\bar{q}_n$ tels que $p_n = q_n$. Alors il existe

$$j \ , \quad 1 \leq j \leq J_n \ ,$$

tel que $\beta_{nj}(\bar{q}_n) \leq \beta_{nj}(\bar{p}_n)$.

La démonstration dépend du lemme suivant :

LEMME. – Soient $\{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq N}$ des points dans un disque $D(a, r)$ de rayon r, et soient $\{u_i\}_{1 \leq i \leq N}$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{N} u_i \geq 0$. Alors il existe j, $1 \leq j \leq N$, $\sum_{i : |\gamma_i - \gamma_j| \leq t} u_i \geq 0$ pour tout $t \leq r$.

Démonstration du lemme. – Par induction sur N : Clair pour $N = 1$, nous supposons le résultat vrai pour $N - 1$.

Soit s le plus petit réel positif tel que $\{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq N} \subset D(a, s^+)$. Alors

$$\sum_{i : \gamma_i \in D(a, s^+)} u_i \geq 0 .$$

Donc il existe $D(b, s^-) \subset D(a, s^+)$ tel que $\sum_{i : \gamma_i \in D(b, s^-)} u_i \geq 0$. Le nombre de points γ_i tels que $\gamma_i \in D(b, s^-)$ est inférieur à N, parce que N est fini.

Démonstration de la proposition. – Soit $u_i = p_{ni} - q_{ni}$. Alors $\sum_{i=1}^{N} u_i = 0$. Par le lemme, il existe j, $1 \leq j \leq J_n$, tel que $\sum_{i : |a_{ni} - a_{nj}| \leq t} u_i \geq 0$ pour tout $t \leqslant r$. Nous pouvons supposer que $j = 1$ et que $\{|a_{ni} - a_{nj}|\}_{1 \leqslant i \leqslant J_n}$ est croissant (au sens large).

Soit $\sigma(k) = \sum_{i=1}^{k} u_i$. Si $|a_{n,k+1} - a_1| > |a_{nk} - a_1|$, alors $\sigma(k) \geqslant 0$. Nous posons

$$b_1 = \frac{r}{\rho_{n1}}, \; b_2 = \frac{r}{|a_{n2} - a_{n1}|}, \; \dots, \; b_n = \frac{r}{|a_{nk} - a_{n1}|}.$$

Alors $b_k \geqslant b_{k+1}$ et

$$\prod_{k=1}^{N} b_k^{u_k} = \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{b_k}{b_{k+1}}\right)^{\sigma(k)} b_N^{\sigma(N)}.$$

Mais $\sigma(N) = \sum_{i=1}^{N} u_i = 0$, et chaque fois que $\frac{b_k}{b_{k+1}} > 1$, $\sigma(k) \geqslant 0$. Il s'ensuit que $\prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{b_k}{b_{k+1}}\right)^{\sigma(k)} \geqslant 1$, et donc

$$\prod_{k=1}^{N} b_k^{u_k} = \left(\frac{r}{\rho_{n1}}\right)^{p_{n1}-q_{n1}} \prod_{k=2}^{N} \left(\frac{r}{|a_{nk} - a_{n1}|}\right)^{p_{nk}-q_{nk}} \geqslant 1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\beta_{n1}(\overline{p}_n)}{\beta_{n1}(\overline{q}_n)} \geqslant 1.$$

7. Une conséquence.

Posons $\beta_n(\overline{p}_n) = \sup_{1 \leqslant j \leqslant J_n} \beta_{nj}(\overline{p}_n)$.

Corollaire de la proposition. – Si $\overline{q}_n$ est tel que $\beta_{ni}(\overline{q}_n)$ est constante pour tout $1 \leqslant i \leqslant J_n$ (c'est-à-dire que, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant J_n$, $\beta_{ni}(\overline{q}_n) = \beta_{nj}(\overline{q}_n)$), alors, pour tout $\overline{p}_n$ tel que $p_n = q_n$, on a $\beta_n(\overline{q}_n) \leqslant \beta_n(\overline{p}_n)$. En d'autres termes, $\overline{q}_n$ minimise β_n.

Preuve. – Pour tout $\overline{p}_n$ tel que $p_n = q_n$, il existe $1 \leqslant j \leqslant J_n$ tel que $\beta_{nj}(\overline{q}_n) \leqslant \beta_{nj}(\overline{p}_n)$. Or $\beta_{nj}(\overline{q}_n) = \beta_n(\overline{q}_n)$ et $\beta_{nj}(\overline{p}_n) \leqslant \beta_n(\overline{p}_n)$.

Remarque. – Notez qu'un tel $\overline{q}_n$ minimisant n'est pas composé forcément d'entiers.

8. Des calculs.

Posons maintenant $\beta_n(p_n) = \inf_{q_n = p_n} \beta_n(\overline{q}_n)$.

Calcul de $\beta_n(p_n)$: $\beta_n(p_n) = \beta_n(1)^{p_n}$.

En effet, $\beta_{ni}(\lambda \overline{p}_n) = (\beta_{ni}(\overline{p}_n))^{\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\beta_{ni}(\overline{p}_n) = \beta_{ni}\left(\frac{1}{p_n}\overline{p}_n\right)^{p_n}$

et $\beta_n(\overline{p}_n) = \beta_n\left(\frac{1}{p_n}\overline{p}_n\right)^{p_n}$.

Il s'ensuit que

$$\beta_n(p_n) = \inf_{q_n=p_n} \beta_n(\bar{q}_n) = \inf_{(q_n/p_n)=1} [\beta_n(\frac{1}{p_n}\bar{q}_n)]^{p_n} = \beta_n(1)^{p_n} .$$

Calcul de $\beta_n(1)$. – On va d'abord calculer $|g(x)|$ pour $x \in A_c$.

Rappelons que g a q_{nk} zéros dans T_{nk} . Pour le calcul de $|g(x)|$, on peut les supposer tous à a_{nk} .

On a alors

$$|g(x)| = |g(0)| \prod_{n,k} (\frac{|x - a_{nk}|}{|a_{nk}|})^{q_{nk}} .$$

Si x est tel que $|x - a_{nj}| = \rho_{nj}$, alors $|g(x)|$ égale la constante c , et

$$c = |g(0)| \prod_{k\neq j} (\frac{|a_{nj} - a_{nk}|}{r_n})^{q_{nk}} (\frac{\rho_{nj}}{r_n})^{q_{nj}} \prod_{m=1}^{n-1} (\frac{r_n}{r_m})^{q_m} , \text{ où } q_m = \sum_{k=1}^{J_m} q_{mk} .$$

Donc

$$\beta_{nj}(\bar{q}_n) = \frac{|g(0)|}{c} \prod_{m=1}^{n-1} (\frac{r_n}{r_m})^{q_m} .$$

Or ceci ne dépend pas de j . Autrement dit, $\beta_{ni}(\bar{q}_n) = \beta_{nj}(\bar{q}_n)$ pour tous $1 \leq i , j \leq J_n$. Donc, par le § 7, $\bar{q}_n$ minimise β_n , et on a

$$\beta_n(q_n) = \frac{|g(0)|}{c} \prod_{m=1}^{n-1} (\frac{r_n}{r_m})^{q_m} ,$$

et donc

$$\beta_n(1) = [\frac{|g(0)|}{c} \prod_{m=1}^{n-1} (\frac{r_n}{r_m})^{q_m}]^{1/q_n} .$$

9. Démonstration du théorème 1^{bis}.

Nous désirons démontrer que λ_n ne tend pas vers 0 , quelle que soit la suite $(\bar{p}_n)$.

Or

$$\lambda_n = \prod_{m=1}^{n-1} (\frac{r_m}{r_n})^{p_m} \beta_n(\bar{p}_n) \geq \prod_{m=1}^{n-1} (\frac{r_m}{r_n})^{p_m} \beta_n(p_n) = \prod_{m=1}^{n-1} (\frac{r_m}{r_n})^{p_m} \beta_n(1)^{p_n}$$
$$= \prod_{m=1}^{n-1} (\frac{r_m}{r_n})^{p_m} [\frac{|g(0)|}{c} \prod_{m=1}^{n-1} (\frac{r_n}{r_m})^{q_m}]^{p_n/q_n} .$$

On estime c : comme $|g(x)|$ est croissant et borné par M , et $c < M$, il existe n_0 tel que $c < |g|(r_{n_0})$, c'est-à-dire,

$$c < |g(0)| \prod_{m=1}^{n_0-1} (\frac{r_{n_0}}{r_m})^{q_m} .$$

Donc

$$c < |g(0)| \prod_{m=1}^{n_0-1} (\frac{r_n}{r_m})^{q_m} \text{ si } n \geq n_0 . \tag{1}$$

Ainsi

$$\lambda_n \geq \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{r_m}{r_n}\right)^{p_m} \left[\prod_{m=n_0}^{n-1} \left(\frac{r_n}{r_m}\right)^{q_m}\right]^{p_n/q_n} = \prod_{m=1}^{n_0-1} \left(\frac{r_m}{r_n}\right)^{p_m} \prod_{m=n_0}^{n-1} \left(\frac{r_n}{r_m}\right)^{q_m(p_n/q_n)-p_m}$$
$$= \prod_{m=1}^{n_0-1} \left(\frac{r_m}{r_n}\right)^{p_m} \prod_{m=n_0}^{n-1} \left(\frac{r_n}{r_m}\right)^{q_m((p_n/q_n)-(p_m/q_m))} .$$

Le premier produit égale une constante non nulle.

Nous posons

$$d_n = \prod_{m=n_0}^{n-1} \left(\frac{r_n}{r_m}\right)^{q_m((p_n/q_n)-(p_m/q_m))} .$$

Il nous reste à démontrer que d_n ne tend pas vers 0.

CAS 1 : <u>La suite</u> (p_n/q_n) <u>n'est pas bornée</u>.

Alors il existe une sous-suite (p_{n_k}/q_{n_k}) telle que $m < n_k$ implique que

$$(p_m/q_m) < (p_{n_k}/q_{n_k}) .$$

Alors

$$d_{n_k} = \prod_{m=n_0}^{n-1} \left(\frac{r_n}{r_m}\right)^{q_m((p_{n_k}/q_{n_k})-(p_m/q_m))} \geq 1 . \tag{2}$$

Donc (d_n) ne tend pas vers 0.

CAS 2 : <u>La suite</u> (p_n/q_n) <u>est bornée</u> : $(p_n/q_n) < B$ <u>pour tout</u> n.

Les termes du produit d_n à exposant positif sont supérieurs à 1, et on peut donc les négliger. On suppose donc que $(p_m/q_m) > (p_n/q_n)$.

Alors $0 < (p_m/q_m) - (p_n/q_n) < B$, et

$$d_n = \prod_{m=n_0}^{n-1} \left(\frac{r_n}{r_m}\right)^{q_m((p_n/q_n)-(p_m/q_m))} = \prod_{m=n_0}^{n-1} \left(\frac{r_m}{r_n}\right)^{q_m((p_m/q_m)-(p_n/q_n))} \geq \prod_{m=n_0}^{n-1} \left(\frac{r_m}{r_n}\right)^{q_m B} .$$

Or

$$|g|(r_n) = |g(0)| \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{r_n}{r_m}\right)^{q_m} < M .$$

Ceci et l'inégalité (1) nous donnent $d_n \geq \left(\frac{c}{M}\right)^B > 0$, et d_n ne tend pas vers 0.

10. <u>Les</u> A_c <u>quand</u> g <u>n'est pas bornée</u>. - Nous allons maintenant montrer que g non bornée n'implique pas que les A_c qui lui sont associés sont non analytiques.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u>

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in K[[x]]$$

<u>telle que</u> $\sup_n |a_n| = +\infty$ <u>et que le nombre de zéros de</u> g <u>dans chaque disque</u> $D(\alpha , r^-)$, <u>où</u> $|\alpha| = r$ <u>et</u> $0 \leq r < 1$, <u>est borné uniformément par</u> N , <u>et soit</u>

$c > 0$. Alors l'ensemble $A_c = \{x \in D(0\ ,\ 1^-)\ ;\ |g(x)| > c\} \cup \{x \in K\ ;\ |x| \geqslant 1\}$ est analytique.

Démonstration. – On observe que le seul endroit dans la démonstration du théorème 1 où on utilise la condition g bornée est le Cas 2, et qu'il suffit de rafistoler ce cas-là pour que la demonstration tienne aussi pour le théorème 2.

Avec les notations du théorème 1, notre nouvelle condition sur les zéros de g se traduit par : Pour tout n , $q_n \leqslant N$ (q_n est le nombre de zéros de g dans $D(a_{ni}\ ,\ r_n^-)$).

Par conséquent, $p_n \leqslant NB$; et comme p_n et q_n sont des entiers, ils prennent seulement un nombre fini de valeurs distinctes. Posons $L = \limsup \frac{p_n}{q_n}$. Il existe n_1 tel que, pour $n > n_1$, $\frac{p_n}{q_n} \leqslant L$, et il existe une sous-suite (n_k) telle que $\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} = L$. Donc, pour $n_1 < n \leqslant n_k$, on a $\frac{p_n}{q_n} \leqslant \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}$, et on retombe dans le Cas 1 : par l'inégalité (2), $d_{n_k} \geqslant 1$, et donc ne tend pas vers 0 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.) and ROBBA (P.). – On ordinary linear p-adic differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. (à paraître).

[2] ESCASSUT (A.). – T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

[3] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). – Prolongement analytique en analyse p-adique, Bull. Soc. math. France, Mémoire 25, 1971, p. 151-158.

(Texte reçu le 1er février 1977)

Elhanan MOTZKIN
194 rue du Château des Rentiers
75013 PARIS