

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PIERRETTE CASSOU-NOGUES

Analogues p -adiques de certaines fonctions arithmétiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. n° 15, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A13_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALOGUES p -ADIQUES DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Pierrette CASSOU-NOGUES

Il s'agit ici d'étudier les analogues p -adiques de certaines fonctions arithmétiques. Rappelons tout d'abord les études qui ont déjà été faites sur ce sujet.

Tout d'abord, en 1964, KUBOTA et LEOPOLDT [7] ont défini une fonction zéta p -adique de Riemann et des fonctions zéta de Dedekind d'un corps de nombres abélien. La fonction zéta de Riemann est définie pour $\text{Re}(s) > 1$ par $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$; elle possède une équation fonctionnelle qui relie les valeurs aux entiers négatifs aux valeurs aux entiers positifs, et on a $\zeta(1-k) = - (b_k/k)$, b_k étant le k -ième nombre de Bernoulli. KUBOTA et LEOPOLDT ont montré tout d'abord que

$$b_k = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} n^k \quad \text{limite } p\text{-adique,}$$

et que

$$k \longmapsto \frac{1}{k} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} \theta_p^0(n) \left(\frac{n}{\theta_p(n)} \right)^k,$$

où

$$\begin{aligned} \theta_p : \mathbb{Z}_p &\longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ x &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x^{p^n}, \end{aligned}$$

se prolongeait en une fonction méromorphe sur $\mathbb{Z}_p$, et qu'elle coïncidait, pour $k \equiv 0 \pmod{p-1}$, avec $\zeta(1-k)(1-p^{k-1})$.

La fonction zéta d'un corps de nombres est définie par

$$Z_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s}, \quad \text{Re}(s) > 1,$$

où la sommation porte sur les idéaux entiers de K , et $N(\cdot)$ désigne la norme de l'idéal. Pour un corps de nombres abélien, on a

$$Z_K(s) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L(s, \chi)$$

où

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad \text{pour } \text{Re}(s) > 1,$$

$\mathfrak{X}$ désignant l'ensemble des caractères primitifs de K . On étudie les fonctions $L(\cdot, \chi)$ de la même manière que la fonction zéta de Riemann.

En 1969, IWASAWA [6] a retrouvé les fonctions L p -adiques de KUBOTA et LEOPOLDT en mettant en évidence une relation entre ces fonctions et la p -composante du groupe des classes d'idéaux de la $\mathbb{Z}_p$ -extension fondamentale au-dessus de K .

En 1970, Y. AMICE et J. FRESNEL [1], en montrant que l'on pouvait obtenir les

fonctions L p -adiques à partir des séries de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} T^n$, ont obtenu une formule p -adique des résidus. En fait, leur méthode est liée à celle de KUBOTA et LEOPOLDT ([2], [3]).

D'autre part, en 1970, J.-P. SERRE [11] a construit des fonctions zéta p -adiques pour des corps de nombres totalement réels. Pour cela, il suit la méthode de KLINGEN [7] et SIEGEL [13] qui utilise le fait que $\zeta_K(1-k)$ est le terme constant d'une forme modulaire sur $SL_2(\mathbb{Z})$ dont les autres termes se calculent par des formules simples.

En 1974, COATES et SWINNOTT [5] obtiennent la fonction zéta p -adique d'une extensive abélienne d'un corps quadratique réel en utilisant la méthode d'IWASAWA et une formule explicite de cette fonction zéta donnée par SIEGEL [12].

En 1973, B. MAZUR et SWINNERTON-DYER [10] ont étudié les fonctions L p -adiques des courbes elliptiques en définissant une mesure p -adique.

Ju. MANIN [9], [14] a repris cette méthode qui lui permet de définir des fonctions L p -adiques pour des séries L de Hecke associées à une forme parabolique de poids entier sur $SL_2(\mathbb{Z})$ et des séries L p -adiques associées à des caractères de Hecke.

Ici nous allons nous intéresser à des séries qui ne sont pas des séries de Dirichlet et qui n'ont pas d'équation fonctionnelle. On considèrera des séries du type $\sum_{n \in \mathbb{Z}^r} a(n) f(n)^{-s}$ convergentes dans un demi-plan, et prolongeables en des fonctions méromorphes qui prennent sur les entiers négatifs des valeurs qui appartiennent à une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$, que nous noterons $[\sum_{n=1}^{\infty} a(n)f(n)^k]_{\mathbb{C}}$. Suivant la méthode de KUBOTA et LEOPOLDT, nous chercherons un analogue p -adique à la fonction $k \mapsto [\sum_{n=1}^{\infty} a(n) f(n)^k]_{\mathbb{C}}$, et nous étudierons son prolongement à $\mathbb{Z}_p$.

I. Analogue p -adique

Nous allons tout d'abord rappeler une formule qui nous permettra ensuite de trouver des analogues p -adiques à certaines séries.

1. Formule fondamentale.

Soit f une fonction uniformément dérivable sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_p$. Considérons les séries de Taylor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) T^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f'(n) T^n$$

convergentes dans $\mathbb{M}_p = \{x \in \mathbb{C}_p; |x| < 1\}$. f et f' étant des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$, on sait [1] que les séries considérées sont prolongeables en des fonctions analytiques $I(f)(.)$ et $I(f')(.)$ sur $\mathbb{O}_p - (1 + \mathbb{M}_p) = \{x \in \mathbb{C}_p; |1-x| > 1\}$, qui sont définies par des séries de Laurent en $1-T$. Or, si l'on fait le produit

formel de la série de Laurent en $1 - T$, qui définit $I(f)(.)$ dans $O_p - (1 + \mathfrak{M}_p)$, par la série de Taylor en $1 - T$, qui définit $\log$ dans $1 + \mathfrak{M}_p$, et si l'on ajoute la série de Laurent qui définit $I(f')(.)$ dans $O_p - (1 + \mathfrak{M}_p)$, on obtient une série de Taylor en $1 - T$ qui converge dans $1 + \mathfrak{M}_p$ ([2], [3]). On notera cette série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} f(n) T^n.$$

On peut d'autre part considérer sur $1 + \mathfrak{M}_p$ la fonction

$$T \longmapsto J(f)(T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{n=1}^r f(n) T^n.$$

On a alors, pour tout T appartenant à $1 + \mathfrak{M}_p$,

$$(1) \quad J(f)(T) = - \left(\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} f(n) T^n \right).$$

On a une formule analogue à la formule (1) pour des fonctions de plusieurs variables. Ecrivons-la pour deux variables : Soit f une fonction uniformément dérivable sur $\underline{Z}_p \times \underline{Z}_p$ à valeurs dans une extension algébrique finie de $\underline{Q}_p$. Comme dans la cas d'une variable, on peut définir une série de Taylor en $(1 - T_1)$, $(1 - T_2)$ convergente dans $(1 + \mathfrak{M}_p)^2$, notée

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (m, n) T_1^m T_2^n + \log T_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y} (m, n) T_1^m T_2^n \\ + \log T_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x} (m, n) T_1^m T_2^n + \log T_1 \log T_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) T_1^m T_2^n. \end{aligned}$$

On peut aussi considérer, dans $(1 + \mathfrak{M}_p)^2$,

$$(T_1, T_2) \longmapsto J(f)(T_1, T_2) = \lim_{r_1 \rightarrow \infty, r_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1 r_2} \sum_{m=1}^{r_1} \sum_{n=1}^{r_2} f(m, n) T_1^m T_2^n,$$

et on a l'égalité de ces deux fonctions.

On peut faire la remarque suivante.

Considérons la fonction $x \longmapsto x^k/k$. Alors

$$\begin{aligned} J(x \longmapsto \frac{x^k}{k})(1) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{n=1}^r \frac{n^k}{k} = \frac{b_k}{k} \\ &= - \lim_{T \rightarrow 1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{k} T^n \right]. \end{aligned}$$

Si l'on note

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \right]_{\underline{C}_p} = \lim_{T \rightarrow 1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{k} T^n \right] = - J(x \longmapsto \frac{x^k}{k})(1)$$

et

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \right]_{\underline{C}} = \zeta(1 - k),$$

on voit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \right]_{\underline{C}} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \right]_{\underline{C}_p}.$$

Considérant des séries de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a(n) f(n)^{-s}$, convergentes dans un demi-plan de $\underline{C}$ et prolongeables en des fonctions méromorphes qui prennent sur les

entiers négatifs des valeurs qui appartiennent à une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$: $[\sum_{n=1}^{\infty} a(n) f(n)^k]_{\mathbb{C}}$, on va, quand c'est possible, chercher une primitive convenable F_k de $x \longmapsto a(x) f(x)^k$ telle que, en posant

$$[\sum_{n=1}^{\infty} a(n) f(n)^k]_{\mathbb{C}_p} = \lim_{T \rightarrow 1} [\sum_{n=1}^{\infty} a(n) f(n)^k T^{n+\log T} \sum_{n=1}^{\infty} F_k(n) T^n] = J(F_k)(1)$$

on ait, pour tout k ,

$$[\sum_{n=1}^{\infty} a(n) f(n)^k]_{\mathbb{C}} = [\sum_{n=1}^{\infty} a(n) f(n)^k]_{\mathbb{C}_p}.$$

Il n'y a pour le moment que deux types de séries que nous sachions bien étudier dans $\mathbb{C}$ et pour lesquelles nous connaissions des analogues p -adiques. Nous verrons après leur étude les problèmes qui se posent dans d'autres cas.

2. Etude de $\sum_{n \in \mathbb{N}^r} (f(n) + a)^{-s}$, où f est une forme linéaire à r variables et a un nombre réel.

Ces séries sont convergentes pour $\operatorname{Re}(s) > r$, et on va montrer qu'elles se prolongent, en des fonctions méromorphes, à tout le plan complexe. Parmi ces fonctions, on a la fonction zéta d'HURWITZ qui prolonge à $\mathbb{C}$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} (1/(n+a)^s)$ convergente pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, les fonctions qui prolongent $\sum_{n=1}^{\infty} (1/(an+b)^s)$, où a et b sont des réels quelconques, à l'aide desquelles, quand a et b sont rationnels, on peut exprimer les fonctions $L(\cdot, \chi)$ de Dirichlet et les fonctions qui prolongent les séries du type $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^r} [(m+a_1)z + n + a_2]^{-s}$. Toutes ces fonctions s'étudient de la même manière en utilisant leur transformée de Mellin. par exemple, considérons $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(m+a_1)z + n + a_2]^{-s}$, où a_1 et a_2 sont des réels compris entre 0 et 1. Posons $z = x + iy$, $s = \sigma + it$. Notons $\mathcal{K}$ le demi-plan supérieur $\{y > 0\}$ et $\mathcal{K}_{\sigma_0}$ le demi-plan $\{\sigma > \sigma_0\}$. La série est convergente dans $(\mathcal{K} \cup \mathbb{R}^{+*}) \times \mathcal{K}_2$.

Pour $x > 0$, $y > 0$, $\sigma > 2$, nous avons

$$\Gamma(s) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(m+a_1)z + n + a_2]^{-s} = \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1} e^{-(a_1 z + a_2)u}}{(e^{uz} - 1)(e^u - 1)} du.$$

On en déduit

$$\Gamma(s) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(m+a_1)z + n + a_2]^{-s} = \frac{1}{e^{2\pi i s} - 1} \int_{\gamma_\delta} \frac{w^{s-1} e^{-(a_1 z + a_2)w}}{(e^w - 1)(e^{wz} - 1)} dw,$$

où γ_δ désigne le chemin, dans le plan des w , le long de l'axe réel de $+\infty$ à δ , où $0 < \delta < \min(2\pi, 2\pi/|z|)$ avec $\arg w = 0$, ensuite le long du cercle de rayon δ avec $0 \leq \arg w \leq 2\pi$, enfin le long de l'axe réel de δ à $+\infty$ avec $\arg w = 2\pi$. Ceci permet de définir un prolongement à $\mathbb{C}$ de la série, en une fonction $s \longmapsto K(z, s, a_1, a_2)$ méromorphe, et le théorème des résidus montre que tout d'abord $K(z, s, a_1, a_2)$ admet deux pôles pour $s = 2$ et $s = 1$ de résidus respectifs $1/z$ et $((\frac{1}{2} + a_1)z + \frac{1}{2} + a_2)/z$, et d'autre part, si $k \geq 0$,

$$K(z_1 - k, a_1, a_2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{p=0}^{k+2} \binom{k+2}{p} B_p(a_1) B_{k+2-p}(a_2) z^p,$$

où $B_k(x)$ désigne le k -ième polynôme de Bernoulli (avec $b_1 = 1/2$). Supposons maintenant que z , a_1 , a_2 soient des entiers algébriques. On cherche alors à définir un analogue p -adique à

$$k \longmapsto K(z_1 - k, a_1, a_2) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(m + a_1)z + n + a_2]^k \right]_{\mathbb{C}}.$$

D'après ce qui précède, on cherche une fonction F_k telle que

$$\frac{\partial F_k}{\partial x \partial y}(x, y) = [(x + a_1)z + (y + a_2)]^k$$

et telle que, si

$$\left[\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} [(m + a_1)z + n + a_2]^k \right]_{\mathbb{C}} = J(F_k),$$

on ait, pour tout k ,

$$\left[\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} [(m + a_1)z + n + a_2]^k \right]_{\mathbb{C}} = \left[\sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} [(m + a_1)z + n + a_2]^k \right]_{\mathbb{C}_p}.$$

On a

$$F_k(x, y) = \frac{[(x + a_1)z + (y + a_2)]^{k+2}}{(k+1)(k+2)},$$

car

$$J(F_k) = \lim_{r_1 \rightarrow \infty, r_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} \sum_{m=1}^{r_1} \sum_{n=1}^{r_2} \frac{[(m + a_1)z + n + a_2]^{k+2}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{p=0}^{k+2} \frac{\binom{k+2}{p} B_p(a_1) B_{k+2-p}(a_2) z^p}{(k+1)(k+2)}.$$

3. Etude de $\sum_{n=1}^{\infty} P(n) P(n)^{-s}$ où P est un polynôme.

Traisons le cas particulier $\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^{-s}$ avec, par souci de simplification, $0 < a < 1$. La série converge pour $\operatorname{Re}(s) > 1$. Dans ce domaine, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + a)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s-1} (1 + \frac{a}{n^2})^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{a^k}{n^{2k+2s-1}}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + a)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} a^k \zeta(2s + 2k - 1).$$

Pour k non nul, la fonction $s \mapsto \binom{-s}{k} \zeta(2s + 2k - 1)$ est holomorphe, et on montre que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} a^k \zeta(2s + 2k - 1)$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc $\zeta(2s - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} a^k \zeta(2s + 2k - 1)$ définit un prolongement méromorphe de $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^2 + a)^s$ ayant un seul pôle en 1. Pour $s = -K$, on a

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^K \right]_{\mathbb{C}} = \zeta(-2K - 1) + \sum_{k=1}^K \binom{K}{k} a^k \zeta(-2K + 2k - 1)$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^K \right]_{\mathbb{C}} = \sum_{k=0}^K \binom{K}{k} a^k \frac{b_{2K-2k+2}}{2K - 2k + 2}.$$

Supposons maintenant que a soit entier algébrique. On cherche alors une primitive F_k de $x \mapsto x(x^2 + a)^k$ telle que si l'on pose

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^k \right]_{\mathbb{C}_p} = - \lim_{T \rightarrow 1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a) T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} F_k(n) T^n \right] = - J(F_k),$$

alors, pour tout k , on ait

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^k \right]_{\mathbb{C}_p} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^k \right]_{\mathbb{C}}.$$

La primitive qui convient est la fonction $x \mapsto (x^2 + a)^{k+1}/2(k+1)$.

Parmi les séries convergentes dans un demi-plan et prolongeables en fonctions méromorphes à tout le plan complexe, il y a les séries de Dirichlet associées à une forme modulaire. Si les formes modulaires sont de poids entier, ces séries prennent sur les entiers négatifs des valeurs nulles. Par contre, les séries de Dirichlet associées à des formes modulaires de poids demi-entier prennent sur les entiers négatifs impairs des valeurs qui, a priori, ne sont pas nulles, mais on ne sait pas les étudier. D'autre part, on sait définir des expressions du type

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{r-1} (m^r + n^r)^k \right]_{\mathbb{C}_p} = J(x, y) \mapsto \frac{(x^r + y^r)^{k+1}}{r(k+1)},$$

mais par contre je ne sais pas prolonger à tout le plan complexe la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{r-1} (m^r + n^r)^{-s}.$$

Nous allons étudier maintenant le prolongement analytique.

II. Prolongement analytique

On a le théorème suivant, dont la démonstration se trouve dans [4].

Si K est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_p$, A son anneau de valuation, $\mathfrak{p}$ son idéal de valuation, et $f_{\mathfrak{p}}$ son indice d'inertie, on note $\theta_{\mathfrak{p}}$ l'application

$$A \rightarrow A$$

$$x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x^{p^{f_{\mathfrak{p}} n}} \quad \text{limite } p\text{-adique}$$

ce qui équivaut à

$$\theta_{\mathfrak{p}}(x)^{p^{f_{\mathfrak{p}}}} = \theta_{\mathfrak{p}}(x) \quad \text{et} \quad \theta_{\mathfrak{p}}(x) \equiv x \pmod{\mathfrak{p}}.$$

On suppose toujours que $|p| = 1/p$.

THÉORÈME 1. - Soit f une fonction uniformément dérivable sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans une extension algébrique K de $\mathbb{Q}_p$. Soit A et $\mathfrak{p}$ l'anneau et l'idéal de valuation de K . Pour tout i et tout k , entiers naturels, on définit

$$J(x \mapsto \theta_{\mathfrak{p}}^i(f(x)) \left[\frac{f(x)}{\theta_{\mathfrak{p}}(f(x))} \right]^k) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} \theta_{\mathfrak{p}}^i(f(n)) \left[\frac{f(x)}{\theta_{\mathfrak{p}}(f(n))} \right]^k.$$

Alors il existe une fonction continue, et une seule, qui prolonge sur $\mathbb{Z}_p$ la fonction

$$k \mapsto J(x \mapsto \theta_{\mathfrak{p}}^i(f(x)) \left[\frac{f(x)}{\theta_{\mathfrak{p}}(f(x))} \right]^k).$$

De plus, si π est une uniformisante de K , posons

$$B = \sup_i |\pi^i/i|_p.$$

Alors la fonction est analytique dans le disque

$$D = \{s \in \mathbb{Q}_p; |s| < p^{-(1/(p-1)) - \log_p B}\}.$$

On a également le même théorème avec un nombre quelconque de variables. On en déduit, entre autres, les corollaires suivants.

COROLLAIRE 1. - Soit a un réel compris entre 0 et 1, entier algébrique sur $\mathbb{Q}$. Soient p un premier de $\mathbb{Q}(a)$ au-dessus de p , et $\mathbb{Q}(a)_p$ le complété p -adique de $\mathbb{Q}(a)$. Soient π une uniformisante, et $B = \sup_k |\pi^k/k|_p$. Alors il existe une fonction méromorphe, et une seule, qui prolonge sur

$$\{s \in \mathbb{Q}_p : |s| < p^{-(1/(p-1)) - \log_p B}\}$$

la fonction

$$k \mapsto \frac{1}{k} J(x \mapsto \theta_p^1(x+a) \left[\frac{x+a}{\theta_p(x+a)} \right]^k) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r_k} \sum_{n=1}^r \theta_p^1(n+a) \left[\frac{n+a}{\theta_p(n+a)} \right]^k.$$

Cette fonction coïncide, pour k entier positif, $k \equiv 1 \pmod{p^f - 1}$ (f désignant l'indice d'inertie de $\mathbb{Q}(a)$ sur $\mathbb{Q}_p$), avec la fonction $s \mapsto \zeta_1^p(1-s)$ qui prolonge à $\mathbb{C}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_p^0(n+a)/(n+a)^s$.

COROLLAIRE 2. - Soient (z, a_1, a_2) des entiers algébriques sur $\mathbb{Q}$ tels que a_1 et a_2 soient réels, $0 \leq a_1 < 1$, $0 \leq a_2 < 1$, et z soit ou réel positif ou complexe tel que $\text{Im}(z) > 0$ si $a_1 = 0$ ou $\text{Im}(z) > 0$ et $\text{Re}(z) > (-a_2 - 1)/a_1$ si $a_1 \neq 0$.

Soit p un premier de $\mathbb{Q}(z, a_1, a_2)$ au-dessus de p , et $\mathbb{Q}(z, a_1, a_2)_p$ le complété p -adique de $\mathbb{Q}(z, a_1, a_2)$.

Alors il existe une fonction méromorphe, et une seule, dans un disque D contenant l'origine qui prolonge la fonction

$$k \mapsto \frac{1}{k(k-1)} J[(x, y) \mapsto \theta_p^0[(x+a_1)z+y+a_2] \left(\frac{(x+a_1)z+y+a_2}{\theta_p[(x+a_1)z+y+a_2]} \right)^k] \\ = \lim_{r_1 \rightarrow \infty, r_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1 r_2 k(k-1)} \sum_{m=1}^{r_1} \sum_{n=1}^{r_2} \theta_p^0[(m+a_1)z+n+a_2] \left(\frac{(m+a_1)z+n+a_2}{\theta_p[(m+a_1)z+n+a_2]} \right)^k.$$

Cette fonction coïncide pour $k \equiv 1 \pmod{p^f - 1}$ avec la fonction $1 \mapsto K_1(z, 2-s, a_1, a_2)$ qui prolonge à $\mathbb{C}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_p^0[(m+a_1)z+n+a_2]}{[(m+a_1)z+n+a_2]^s}.$$

On a un théorème analogue pour un nombre quelconque de variables.

COROLLAIRE 3. - Soient a un réel, entier algébrique sur $\mathbb{Q}$, p un premier de $\mathbb{Q}(a)$ au-dessus de p , $\mathbb{Q}(a)_p$ le complété p -adique de $\mathbb{Q}(a)$.

Alors il existe une fonction méromorphe, et une seule, sur un disque D qui contient l'origine, qui prolonge la fonction

$$k \mapsto \frac{1}{2k} J[x \mapsto \theta_p^i(x^2+a) \left[\frac{x^2+a}{\theta_p(x^2+a)} \right]^k] = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2kp^r} \sum_{n=1}^{p^r} \theta_p^i(n^2+a) \left[\frac{n^2+a}{\theta_p(n^2+a)} \right]^k.$$

Cette fonction coïncide, pour $k \equiv 1 \pmod{p^f - 1}$, avec $s \mapsto \varphi(1-s)$ qui prolonge à $\mathbb{C}$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_p^0(n^2+a) n/(n^2+a)^s$.

On peut faire la remarque importante suivante : Dans chaque cas étudié la primitive, qui donne l'analogue p -adique de la série, est telle que la fonction p -adique obtenue a les mêmes pôles avec le même résidu que la fonction complexe correspondante (corrigée par θ^0).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonctions zéta p -adiques des corps de nombres abéliens et formule des résidus pour le nombre des classes d'idéaux, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.
- [2] CASSOU-NOGUES (P.). - Formes linéaires p -adiques et prolongement analytique, Thèse 3e cycle, Math., Univ. Bordeaux-I, 1971.
- [3] CASSOU-NOGUES (P.). - Formes linéaires p -adiques et prolongement analytique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 5-8.
- [4] CASSOU-NOGUES (P.). - Analogues p -adiques de certaines fonctions arithmétiques, Publications de Bordeaux-I (à paraître).
- [5] COATES (J.) and SINNOTT (W.). - On p -adic L -functions over real quadratic fields, Inventiones mathematicae, Berlin, t. 25, 1974, p. 253-279.
- [6] IWASAWA (K.). - On p -adic L -functions, Annals of Math., t. 89, 1969, p. 198-205.
- [7] KLINGEN (H.). - Über die Werte der Dedekind Zetafunktion, Math. Annalen, t. 145, 1962, p. 265-272.
- [8] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p -adische Theorie der Zeta-werte, I : Einführung der p -adischer Dirichletschen L -Funktionen, J. für reine und ang. Math., t. 214/215, 1964, p. 328-339.
- [9] MANIN (Ju. I.). - Periods of parabolic forms and p -adic Hecke series, Math. USSR-Sbornik, t. 21, 1973, p. 371-393 ; [en russe] Mat. Sbornik, t. 92, 1973, p. 378-401.
- [10] MAZUR (B.) and SWINNERTON-DYER (P.). - Arithmetic of Weil curves, Inventiones Math., Berlin, t. 25, 1974, p. 1-61.
- [11] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonctions zeta p -adiques, "Modular functions of one variable, III", p. 191-268. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).
- [12] SIEGEL (C.). - Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Gött. Nach., t. 3, 1970, p. 15-56.

- [13] SIEGEL (C.). - Bernouische Polynome und quadratischer Zahlkörper, Gött. Nach., t. 2, 1968, p. 7-38.
- [14] VIŠIK (M. M.) and MANIN (Ju. I.). - p -adic Hecke series of imaginary quadratic fields, Math. USSR-Sbornik, t. 24, 1974 (à paraître) ; [en russe] Mat. Sbornik, t. 95, 1974, p. 357-383.

(Texte reçu le 20 juin 1975)

Pierrette CASSOU-NOGUES
9 rue Ségalier
33000 BORDEAUX
