

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PHILIPPE ROBBA

Prolongement des solutions d'une équation différentielle p -adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 1 (1973-1974), exp. n° 11, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A8_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT DES SOLUTIONS
D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE p-ADIQUE

par Philippe ROBBA

On démontre que si l'équation différentielle $Lu = f$, linéaire, à coefficients polynomiaux, a une solution u , élément analytique dans une classe résiduelle, et si f admet un prolongement analytique dans presque toutes les classes résiduelles, alors u a un prolongement analytique dans presque toutes les classes résiduelles.

1. NOTATIONS. - K désigne un corps valué non archimédien, complet et algébriquement clos. On note \mathcal{O} l'anneau de valuation de K , et k le corps résiduel de K .

Si $P \in K[X]$, on pose $|P| = \sup_{x \in \mathcal{O}} P(x)$; si $R = P/Q \in K(X)$, on pose
 $|R| = |P|/|Q|$.

C'est la norme de Gauss. On notera E le complété de $K(X)$ pour cette norme.

Soit A un sous-ensemble de K formé d'une réunion de classes résiduelles (on considèrera \mathcal{O} comme la classe résiduelle du point ∞). Un élément analytique sur A est la limite, pour la norme de Gauss, d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A . Si A contient toutes les classes résiduelles, sauf un nombre fini, on dira que A est admissible. Un élément analytique sur un ensemble admissible sera dit admissible.

2. THEOREME. - Soit L un opérateur différentiel linéaire à coefficients dans $K[X]$. Soit $u \in E$ tel que Lu soit admissible. Alors u est admissible.

En particulier, si u est un élément analytique sur une classe résiduelle, et si Lu est admissible, u se prolonge analytiquement dans presque toutes les classes résiduelles.

(La démonstration originale a été simplifiée suivant une suggestion de DWORK.)

Démonstration. - Soit $L = \sum_{i=1}^n a_i D^i$, $a_i \in K[X]$. Posons
 $m(L) = \max_i (\deg a_i - i)$.

(i) Supposons que $m(L) \leq 0$. D'après le théorème de Mittag-Leffler [1], si $v \in E$, on a la décomposition unique

$$v = v_{\infty} + \sum_{\alpha \in k} v_{\alpha},$$

où v_{∞} est un élément analytique sur \mathcal{O} , et v_{α} est un élément analytique dans le complémentaire de la classe α , nul à l'infini, la série convergeant dans E .

L'hypothèse faite sur Lu signifie que l'on a $(Lu)_{\alpha} = 0$ pour presque tous les

α .

D'autre part, la condition $m(L) \leq 0$ implique que, pour tout α , Lu_α (resp. Lu_∞) est un élément analytique sur le complémentaire de la classe α , nul à l'infini (resp. un élément analytique sur α).

L'unicité de la décomposition de Mittag-Leffler montre donc que

$$(Lu)_\infty = Lu_\infty ,$$

et

$$(Lu)_\alpha = Lu_\alpha , \quad \forall \alpha \in k .$$

Donc, pour presque tous les α , $Lu_\alpha = 0$. Comme les u_α non nuls sont linéairement indépendants (unicité de la décomposition), c'est qu'il y en a au plus n d'entre eux non nuls, avec $n = \text{degré de } L$. Ceci montre que u est admissible.

(ii) Supposons que $m(L) > 0$. Posons $L_1 = D^m L$. Alors $m(L_1) = 0$. De plus, $L_1 u = D^m(Lu)$ est admissible. On déduit alors de (i) que u est admissible.

3. REMARQUE. - La démonstration donne une estimation du nombre de classes résiduelles où u ne se prolonge pas : u se prolonge dans toutes les classes résiduelles où Lu se prolonge sauf dans au plus $n + M$ d'entre elles, avec $n = \text{deg } L$ et $M = \max(m(L) , 0)$.

4. PROBLÈMES.

4.1: La démonstration utilise de façon essentielle le fait que les coefficients de L sont des polynômes. Le résultat du théorème est-il encore valable si l'on suppose seulement que les coefficients de L sont admissibles ?

On possède une réponse partielle à cette question [2]. Si L a ses coefficients admissibles, et a un 0-noyau au point générique t (cette condition est explicitée dans [3], elle est un peu plus restrictive que l'hypothèse pour L d'être injectif dans E), alors, si f est admissible, l'équation $Lu = f$ possède une, et une seule, solution u dans E , et u est admissible.

4.2: Les conclusions du théorème subsistent-elles encore si l'on ne suppose plus que L est linéaire, mais que Lu est un polynôme en x , u , u' , ..., $u^{(n)}$?

Une réponse positive à cette question permettrait de résoudre la conjecture 5.12 de [4].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ROBBA (P.). - Fonction analytique sur les groupes valués ultramétriques complets. "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, n° 10, 1973, p. 109-218.
- [2] ROBBA (P.). - On the index of p -adic differential operators, II (à paraître).

- [3] ROBBA (P.). - Indice d'un opérateur différentiel, groupe de travail d'analyse ultramétrique, 1973/74, n° 2, 14 p.
- [4] ROBBA (P.). - Croissance des solutions d'une équation différentielle homogène, groupe de travail d'analyse ultramétrique, 1973/74, n° 1, 15 p.

(Texte reçu le 14 mai 1974)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS
