ELHANAN MOTZKIN

# La décomposition d'un élément analytique en facteurs singuliers

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 1 (1973-1974), exp. nº 8, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A5_0>

Groupe de Travail d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, A. ESCASSUT, P. ROBBA)
1973/74, n° 8, 11 p. 

18 février 1974

# LA DÉCOMPOSITION D'UN ÉLÉMENT ANALYTIQUE EN FACTEURS SINGULIERS

par Elhanan MOTZKIN

## 1. Introduction.

Soit $K$ un corps valué non archimédien complet et algébriquement clos. Une limite uniforme de fractions rationnelles sans pôles dans une partie $A$ de $K$ est dite élément analytique sur $A$. Un disque maximal de $\complement A$ est dit trou de $A$.

Etant donné un trou $T$, une fraction rationnelle $R$ se factorise naturellement en un produit $PQ$, où tous les zéros et les pôles de $P$ sont dans $T$, et tous les zéros et les pôles de $Q$ sont dans $\complement T$. $P$ sera dit le facteur singulier de $R$ relatif au trou $T$. De plus, $R$ est le produit de tous ses facteurs singuliers. On aimerait pouvoir généraliser aux éléments analytiques tout cela.

Dans cet article, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément analytique ait un facteur singulier relatif à un trou donné non réduit à un point (théorème 1). Nous montrons dans quelles conditions les éléments analytiques sont assurés d'avoir des facteurs singuliers relatifs à tous les trous (théorème 2).

Nous démontrons l'unicité du facteur singulier quand il existe (théorème 3). Nous discutons ensuite le cas spécial présenté par les trous réduits à un point (les trous-points : §6).

Dans la section suivante (§7), après avoir décrit une classe importante d'éléments analytiques qui sont produits de leurs facteurs singuliers (lemme 1), nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément analytique se factorise en produit de ses facteurs singuliers (théorème 4).

Enfin dans la section §8, nous donnons une application de ces résultats au prolongement analytique des solutions de l'équation différentielle $u' - vu = 0$.

Cette application, dans un cadre moins général, a été donnée par B. DWORK, et ce sont ses résultats qui ont inspiré la présente étude.

## 2. Notations.

$K$ est un corps valué complet non-archimédien algébriquement clos.

On pose :

$$D(a, r^-) = \{x \in K ; |x - a| < r\}, \quad D(a, r^+) = \{x \in K ; |x - a| \leq r\} .$$

$A \subset \overline{K} = K \cup \{\infty\}$ est dit infra-connexe si, pour tout $a \in K$, l'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ de l'image de $A$, dans l'application $x \longrightarrow |x - a|$, est un intervalle. On note cet intervalle $|A|_a$.

Notons $\hat{A}$ le plus petit disque contenant $A$. Le disque $T \subset \complement A \cap \hat{A}$ est dit un <u>trou</u> de $A$ si $T$ est maximal. $\complement\hat{A}$ est appelé le trou de $A$ de centre $\infty$ ; on le note $T_\infty$. On note $\mathfrak{T}(A)$ la famille des trous de $A$.

Un <u>élément analytique</u> sur $A$ est la limite uniforme sur $A$ d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans $A$. On note $H(A)$ l'espace des éléments analytiques sur $A$. Pour $f \in H(A)$, on pose $\|f\|_A = \sup_{x\in A}|f(x)|$. Si pour tout $B \subset A$ l'application naturelle $H(A) \longrightarrow H(B)$ est injective, $A$ est dit <u>ensemble analytique</u>. Si $B \subset A$ est un ouvert, et $A$ est un ensemble analytique, $f \in H(A)$ est dit le <u>prolongement analytique</u> de $f|_B \in H(B)$ dans $A$.

Soient $A$ un infra-connexe fermé, $T = D(a, r^-)$ un trou de $A$, $f$ un élément analytique sur $A$. On dit que $f$ a un <u>facteur singulier</u> $g$ dans $T$ si

(a) Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $(x - a)^m g \in H(\complement T)$, ne s'annule pas dans $\complement T$, et tend vers $1$ à l'infini.

(b) $f/g$ se prolonge analytiquement dans $T$, et le prolongement $h$ ne s'annule pas dans $T$.

Si $T = T_\infty$ (le trou de centre $\infty$), cette définition se modifie comme suit :

(a') $g \in H(\hat{A})$ et ne s'annule pas dans $\hat{A}$.

(b') $f/g$ se prolonge analytiquement en $h$ dans $T_\infty$ et il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $(x - a)^{-m} h$ tende vers $1$ à l'infini.

Le facteur singulier de $f$ relatif à $T$ sera noté $f^T$.

<u>Exemple</u> 0. - Soit $f$ une fraction rationnelle $R = c((\prod_i(x-a_i))/(\prod_j(x-b_j)))$. Alors le facteur singulier de $f$ relatif au trou $T$ est

$$g = (\prod_{a_i\in T}(x - a_i))/(\prod_{b_j\in T}(x - b_j)) .$$

Cet exemple montre la nécessité du facteur $(x - a)^m$ dans la définition du facteur singulier.

## 3. Rappels.

### (a) La fonction et le polygone de valuation.

Pour $a \in K$, $P \in K[X]$, et $r \in \mathbb{R}_+$, on pose $|P|_a(r) = \sup_{|x-a|=r}|P(x)|$.

Pour $a \in K$, $R = \frac{P}{Q} \in K(X)$, et $r \in \mathbb{R}_+$, on pose $|R|_a(r) = |P|_a(r)/|Q|_a(r)$.

Pour $A$ infra-connexe, $a \in \hat{A}$, $f \in H(A)$, et $r \in |A|_a$, on pose

$$|f|_a(r) = \lim_n |R_n|_a(r) ,$$

où $\{R_n\}$ est une suite de fractions rationnelles sans pôles dans $A$ convergeant uniformément vers $f$ sur $A$. On montre que la limite existe et ne dépend pas de la suite considérée. Si $|f - g|_a(r) < |f|_a(r)$, alors $|f|_a(r) = |g|_a(r)$.

Si $f \in H(D(a, r))$, $K$ algébriquement clos implique que $\|f\|_{D(a,r)} = |f|_a(r)$.

C'est le principe du maximum.

$\log|f|_a$ est dit le polygone de valuation de $f$ : il est linéaire par morceaux.

Si $R \in K(x)$ , la pente à gauche (resp. à droite) de $\log|R|_a$ au point $r$ montre la différence entre le nombre de zéros et de pôles de $R$ dans $D(a\ ,\ r^-)$ (resp. $D(a\ ,\ r^+)$) . Le changement de pente de $\log|R|_a$ au point $r$ indique donc la différence entre le nombre de zéros et de pôles de $R$ sur la circonférence $|x - a| = r$ .

Si $R \in K(x)$ , $A$ est un infra-connexe, et $T$ un trou de $A$ , alors $m(R\ ,\ T)$ désigne la différence entre le nombre de pôles et de zéros de $R$ dans $T$ . Si $T = D(a\ ,\ r)$ , $R' \in K(x)$ et $|R - R'|_a(r) < |R|_a(r)$ , alors $m(R\ ,\ T) = m(R'\ ,\ T)$

(b) Le théorème de Mittag-Leffler [2].

Soient $A$ infra-connexe, $f \in H(A)$ et $f$ tend vers $0$ à l'infini. Pour chaque $T \in \mathcal{T}(A)$ , il existe un unique $f_T \in H(\complement T)$ , tel que $f_T$ tende vers $0$ à l'infini et $f = \sum_{T\in\mathcal{T}(A)} f_T$ , la série convergeant uniformément sur $A$ . On a de plus

$$\|f\|_A = \sup_{T\in\mathcal{T}(A)}\|f_T\|_{\complement T} .$$

$f_T$ est dite partie singulière de $f$ relative au trou $T$ .

Soient $f \in H(A)$ et $T = D(a\ ,\ r^-)$ un trou de $A$ . On pose $s(f,T) = |f|_a(r)$ .

Si $T = T_\infty = \{x \in K\ ;\ \ |x - a| > r\}$ , on pose $s(f\ ,\ T_\infty) = |f|_a(r)$ .

Or il résulte facilement de la démonstration de P. Robba du théorème de Mittag-Leffler ([2], lemme 4.5) que l'estimation $\|f_r\|_{\complement T} \leq \|f\|_A$ peut être améliorée. En fait on a :

(*) $$\|f_T\|_{\complement T} \leq s(f\ ,\ T) .$$

## 4. Existence du facteur singulier.

THÉORÈME 1. - *Soit* $A$ *un infra-connexe fermé dans* $\overline{K}$ , $T$ *un trou de* $A$ , $f$ *un élément analytique sur* $A$ . *Alors* $f$ *possède un facteur singulier relatif à* $T$ *si et seulement si*, $s(f\ ,\ T) > 0$ .

Démonstration.

(a) La condition est nécessaire. - On suppose donc que $f$ a le facteur singulier $g$ relatif à $T$ et que $f/g = h$ se prolonge dans $T = D(a\ ,\ r^-)$ . Notons que $r > 0$ , $T$ étant ouvert. Alors, pour tout $\rho \geq r$ , $|(x - a)^m\, g|_a(\rho) = 1$ , car $(x - a)^m g$ n'a ni zéros, ni pôles dans $\complement T$ ; $\log|(x - a)^m\, g|_a$ n'a donc pas de changements de pente dans $\complement T$ , et comme c'est $0$ à la limite, c'est $0$ partout dans $\complement T$ .

Ainsi $|g|_a(\rho) = \rho^{-m}$ , $\rho \geq r$ . De même, $|h|_a(\rho) = \sigma$ , $\rho \leq r$ , où $\sigma$ est une constante non nulle. D'où

$$|f|_a(r) = |h|_a(r).|g|_a(r) = \sigma\, r^{-m} \neq 0 .$$

Or $s(f\ ,\ T) = |f|_a(r)$ .

(b) La condition est suffisante. - On suppose donc que $s(f\ ,\ T) > 0$ . Nous allons d'abord construire le facteur singulier $g$ . Considérons d'abord deux fractions rationnelles $R$ et $R'$ . Soient $P = R^T$ , $Q = R/P$ , $P' = (R')^T$ et $Q' = R'/P'$ .

Supposons maintenant que $|R - R'|_a(r) < |R|_a(r) = s(R\ ,\ T) = s(R'\ ,\ T)$ . Alors les fonctions de valuation $|R|_a(\rho)$ et $|R'|_a(\rho)$ coïncident au voisinage de $r$ . Donc $m(R\ ,\ T) = m(R'\ ,\ T)$ . Alors

$$|(x - a)^{m(R,T)}\ P|_a(\rho) = 1 \quad \text{et} \quad |(x - a)^{m(R,T)}\ P'|_a(\rho) = 1\ , \qquad \rho \geqslant r\ ,$$

pour les raisons données pour l'égalité analogue dans la partie (a) de la démonstration. Donc

$$|P|_a(r) = |P'|_a(r) = r^{-m(R,T)}\ .$$

Ainsi

$$|Q|_a(r) = |Q'|_a(r) = r^{m(R,T)}.s(R\ ,\ T)\ .$$

On a alors

$$(1) \qquad |\frac{P}{P'} - \frac{Q'}{Q}|_a(r) = |\frac{R - R'}{P'\ Q}|_a(r) = \frac{|R - R'|_a(r)}{s(R\ ,\ T)}\ .$$

Or tous les pôles de $Q'/Q$ sont dans $\complement T$ , tous les pôles de $P/P'$ sont dans $T$ , et $((x - a)^{m(R,T)}\ P)/((x - a)^{m(R',T)}\ P') = P/P'$ tend vers $1$ à l'infini. Il s'ensuit que $(P/P') - 1$ est la partie singulière de $(R - R')/P'\ Q$ relative à $T$ . Nous avons donc (par le principe du Maximum et par l'inégalité (*) de §3b) :

$$(2) \qquad \|\frac{P}{P'} - 1\|_{\complement T} = |\frac{P}{P'} - 1|_a(r) \leqslant (|R - R'|_a(r))/(s(R\ ,\ T))\ .$$

Ainsi

$$\|(x-a)^{m(R,T)}\ P(x) - (x-a)^{m(R,T)}\ P'(x)\|_{\complement T} \leqslant (|R - R'|_a(r))/(s(R,T))\ .$$

(1) et (2) impliquent

$$(3) \qquad \begin{aligned} |\frac{Q'}{Q} - 1|_a(r) &= |\frac{Q'}{Q} - \frac{P}{P'} + \frac{P}{P'} - 1|_a(r) \\ &\leqslant \max\{|\frac{Q'}{Q} - \frac{P}{P'}|_a(r)\ ,\ |\frac{P}{P'} - 1|_a(r)\} \leqslant \frac{|R-R'|_a(r)}{s(R\ ,\ T)} \end{aligned}$$

et par suite, par le principe du maximum,

$$(4) \qquad \|Q' - Q\|_T \leqslant r^{m(R,T)}|R - R'|_a(r)\ .$$

Maintenant, considérons une suite de fractions rationnelles $(R_n)$ sans pôles dans $A$ , convergeant uniformément sur $A$ vers $f$ . Comme par hypothèse $s(f,T)>0$ , pour tous $k$ , $n$ assez grands on a

$$\|R_n - f\|_A \leqslant \varepsilon < s(f\ ,\ T) = |f|_a(r)\ , \quad \|R_k - f\|_A \leqslant \varepsilon\ .$$

En particulier, on a $|R_n - f|_a(r) \leqslant \varepsilon$ , $|R_k - f|_a(r) \leqslant \varepsilon$ et donc

$$|R_n - R_k|_a(r) \leqslant \varepsilon\ .$$

Alors

$$|R_k|_a(r) = |R_n|_a(r) = |f|_a(r) = s(f\ ,\ T) = s(R_n\ ,\ T) = s(R_k\ ,\ T)\ .$$

Donc

(5) $\qquad m(R_n\ ,\ T) = m(R_k\ ,\ T)$ pour tous $k$ , $n$ assez grands.

On notera cette valeur commune $m(f\ ,\ T)$ .

Soient $P_n = (R_n)^T$ , $Q_n = R_n/P_n$ , $P_k = (R_k)^T$ et $Q_k = R_k/P_k$ . On a alors, par (3)

(6) $\qquad \|(x-a)^{m(f,T)}\ P_n(x) - (x-a)^{m(f,T)}\ P_k(x)\|_{CT} \leq \frac{\varepsilon}{s(f\ ,\ T)}$ .

La suite $\{(x-a)^{m(f,T)}\ P_n\}$ est donc une suite de Cauchy convergeant uniformément dans $CT$ vers un élément analytique que nous noterons $(x-a)^{m(f,T)}\ g$ . $g$ est alors le facteur singulier recherché, car, pour tout $n$ ,

$$|(x-a)^{m(f,T)}\ P_n(x)| = 1\ , \qquad \forall\ x \in CT\ ,$$

ce qui implique que

$$|(x-a)^{m(f,T)}\ g(x)| = 1\ , \qquad \forall\ x \in CT\ .$$

Donc $g(x) \neq 0$ dans $CT$ . D'autre part, pour tout $n$ , $(x-a)^{m(f,T)}\ P_n(x)$ tend vers $1$ à l'infini, donc $(x-a)^{m(f,T)}\ g(x)$ tend vers $1$ à l'infini.

Il nous reste à démontrer que $h = f/g$ se prolonge dans $T$ . On a, par (4),

$$\|Q_n - Q_k\|_T \leq r^{m(f,T)}|R_n - R_k|_a(r) \leq r^{m(f,T)}\ \varepsilon\ .$$

On observe, d'autre part, que, pour tout $\rho > r$ , $\|R_k\|_{A\cap D(a,\rho)} = \|f\|_{A\cap D(a,\rho)}$ (car $\|R_k - f\|_A \leq \varepsilon < s(f\ ,\ T) \leq \|f\|_A$ ), que $\|P_k - P_n/P_k\|_{A\cap D(a,\rho)} \leq \varepsilon/s(f\ ,\ T)$ (par (2)), que $\|1/P_n\|_{A\cap D(a,\rho)} \leq \max\{r^{m(f,T)}\ ,\ \rho^{m(f,T)}\}$ , et que

$$(\|f\|_{A\cap D(a,\rho)})/(s(f\ ,\ T)) \geq 1\ .$$

On a alors

$$\|Q_n - Q_k\|_{A\cap D(a,\rho)} \leq \max\{\|\frac{R_n - R_k}{P_n}\|_{A\cap D(a,\rho)}\ ,\ \|R_k \frac{P_k - P_n}{P_k\ P_n}\|_{A\cap D(a,\rho)}\}$$

$$\leq \|f\|_{A\cap D(a,\rho)} \cdot \frac{\varepsilon}{s(f,T)} \max\{r^{m(f,T)}\ ,\ \rho^{m(f,T)}\}\ .$$

Donc la suite $\{Q_n\}$ est une suite de Cauchy convergeant uniformément dans $(A \cup T) \cap D(a\ ,\ \rho)$ vers un élément analytique $h$ . Comme $Q_n = R_n/P_n$ converge vers $f/g$ dans $A \cap D(a\ ,\ \rho)$ , cela montre que $h$ est le prolongement analytique de $f/g$ dans $T$ . Finalement, comme, pour tout $n$ , $Q_n$ ne s'annule pas dans $T$ , il en est de même pour $h$ .

Ceci achève la démonstration lorsque $T \neq T_\infty$ . La démonstration pour le cas $T = T_\infty$ est analogue.

La condition pour l'existence d'un facteur singulier dépend donc à la fois de $f$ et de $T$ . Existe-t-il une condition portant uniquement sur $T$ assurant que tout élément analytique $f$ sur $A$ a un facteur singulier relatif à $T$ ?

THÉORÈME 2. - Soit $A$ un ensemble analytique fermé dans $\overline{K}$, et soit $T$ un trou de $A$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Quel que soit $f \in H(A)$, $f \not\equiv 0$, $f$ a un facteur singulier relatif à $T$.

(b) $A \cup T$ est un ensemble analytique.

Démonstration.

(b) implique (a). - Soient donc $f \not\equiv 0$, $f \in H(A)$. Il suffit de montrer que $s(f, T) > 0$, car alors on pourra appliquer le théorème 1. Or si $s(f, T) = 0$, d'après §3 (*), la partie singulière de $f$ relative au trou $T$ est nulle, et donc $f$ se prolonge analytiquement dans $T$. Mais nous avons par le principe du maximum :

$$\|f\|_T = s(f, T) = 0 .$$

$f$ est donc identiquement nulle dans $T$. Comme $A \cup T$ est analytique par hypothèse, cela veut dire que $f$ est identiquement nulle dans $A \cup T$. Mais ceci contredit l'hypothèse que $f \not\equiv 0$ dans $A$.

(a) implique (b). - Il suffit de montrer que si $A \cup T$ n'est pas analytique, alors il existe un $f \in H(A)$, $f \not\equiv 0$, vérifiant $s(f, T) = 0$. Or $A \cup T$ n'étant pas analytique, il existe un $f \in H(A \cup T)$, $f \not\equiv 0$, $f$ identiquement nulle au voisinage d'un point $a \in A \cup T$. Si $a \in A$, alors, comme $A$ est analytique, $f$ est identiquement nulle dans $A$ et par conséquent $s(f, T) = 0$ et donc $f$ est identiquement nulle dans $T$ (par le principe du maximum), ce qui contredit l'hypothèse $f \not\equiv 0$. Donc $a \in T$ ; mais comme $T$ est analytique, $f$ est identiquement nulle dans $T$, donc $s(f, T) = 0$. Il reste à montrer que $f$ n'est pas l'élément $0$ de $H(A)$. Mais ceci est évident, car $f \equiv 0$ dans $T$ et $f \equiv 0$ dans $A$ impliquent que $f \equiv 0$ dans $A \cup T$, contrairement à l'hypothèse.

## 5. Unicité du facteur singulier.

THÉORÈME 3. - Soient $A \subset K$, $T = D(a, r)$ un trou de $A$, $f \in H(A)$, et supposons que $f$ ait un facteur singulier relatif à $T$. Alors le facteur singulier est unique à une constante multiplicative près.

Démonstration. - Supposons qu'il y ait deux facteurs singuliers $g$ et $h$ relatifs à $T$. Soient $k$ l'entier associé à $g$ et $m$ l'entier associé à $h$, c'est-à-dire que $(x - a)^k g \in H(\complement T)$ et tend vers $1$ à l'infini et que $(x-a)^m h \in H(\complement T)$ et tend vers $1$ à l'infini, et $(x - a)^k g$ et $(x - a)^m h$ ne s'annulent pas dans $\complement T$. Supposons $k \geqslant m$. Alors $(x - a)^{k-m} g/h$ est un élément analytique sur $\complement T$, car $|(x - a)^m h|_a(\rho) = 1 > \mathrm{Cte} > 0$ pour tout $\rho > r$. Comme $f/g$ se prolonge dans $T$ en un élément analytique qui ne s'annule pas dans $T$, on peut construire $B$ analytique, $B \subset A$, tel que $T$ soit un trou de $B$ et que $|\frac{f}{g}(x)| \geqslant \sigma > 0$, $\forall\, x \in B \cup T$, comme suit : on sait que, pour $x \in T$, $|\frac{f}{g}(x)| = |f/g|_a(\rho)$, $\rho \leqslant r$, car $f/g \in H(T)$ et ne s'annule pas dans $T$, et que $|f/g|_a(\rho) = \mathrm{Cte}$ non nulle si

$\rho \leqslant r$ ; si $|A|_a$ (c'est-à-dire l'image de $A$ par $x \dashrightarrow |x - a|$ ) n'est pas réduit à un point, alors il existe $\rho > r$ tel que $|f|_a$ soit définie sur $[r , \rho]$ et on peut donc prendre $B = A \cap D(a , \rho)$ ; si $|A|_a$ est réduit à un point, à savoir $r$ , alors il existe nécessairement $b$ et $c$ dans la circonférence de $D(a , r)$ et $\rho_1 > 0$ , $\rho_2 > 0$ , $\rho_1 < r$ , $\rho_2 < r$ tels que $|f|_b$ soit définie sur $[\rho_1 , r]$ et $|f|_c$ soit définie sur $[\rho_2 , r]$ , et on peut prendre

$$B = (D(b , r) \cup D(c , r)) \cap A .$$

Alors $g/f$ est un élément analytique sur $B \cup T$ . Donc $g/h = (f/h)(g/f)$ est un élément analytique dans $B \cup T$ , et $(x - a)^{k-m}$ $g/h$ aussi (car on peut toujours prendre $B \cup T$ borné). $(x - a)^{k-m}$ $g/h$ est aussi un élément analytique à la fois sur $\complement T$ et sur $T \cup B$ . Comme $(\complement T) \cap (T \cup B) = B \neq \emptyset$ , $(x - a)^{k-m}$ $g/h$ est un élément analytique sur $\overline{\mathbf{K}}$ (c'est-à-dire sur $K \cup \{\infty\}$ ). $(x - a)^{k-m}$ $g/h$ est donc une constante et, en particulier, n'a pas de zéros (même pas en $a$ ). On a donc $k = m$ et $g = \text{Cte } h$ .

## 6. Les trous-points.

Un trou-point est un trou réduit à un point.

Remarque 1. Si $T = \{a\}$ est un trou-point de $A$ et $a$ se trouve à l'intérieur de l'adhérence de $A$ , alors $f$ a toujours un facteur singulier relatif à $T$ . En effet, si $s(f , T) > 0$ , alors le facteur singulier existe (car la démonstration du théorème 1 reste valable), et si $s(f , T) = 0$ , alors on a vu que

$$\|f_T\|_T \leqslant |f|_a(r) = s(f , T) = 0 ,$$

c'est-à-dire $f_T = 0$ et $f$ se prolonge dans $T$ , cependant $f = 0$ dans $T$ , c'est-à-dire $f(a) = 0$ .

Remarque 2. Si $T = \{a\}$ est un trou-point de $A$ et $s(f , T) = |f|_a(0) = 0$ , alors pour que $f$ ait un facteur singulier relatif à $T$ il faut que pour $\rho$ petit $|f|_a(\rho)$ soit de la forme $|f|_a(\rho) = c\rho^k$ (c'est-à-dire que $-\infty$ n'est pas un point d'accumulation des abscisses des points de changement de pente du polygone de valuation $\log|f|_a$ ).

Exemple 1 de ce qui peut arriver si cette condition n'est pas satisfaite :

Soit $A = D(0 , 1^+) \smallsetminus \bigcup_n D(a_n , r_n) \smallsetminus \{0\}$ , où $|a_n| = r_n$ et $\{r_n\}$ est une suite décroissant vers $0$ . Soit $f(x) = \prod_n \frac{x}{x - a_n}$ . Alors le facteur singulier relatif à $T = \{0\}$ est $x^\infty$ !

Remarque 3. Avec les notations de la remarque 2 : Par contre, si $|f|_a(\rho) = c\rho^k$ pour $\rho$ petit, cela n'implique pas qu'il existe un facteur singulier relatif à $T$ .

Exemple 2. Soit $A$ le même que dans l'exemple 1. Soit

$$f(x) = x \prod_n \frac{x - b_n}{x - a_n} = \lim_{N\to\infty}\left(x \prod_1^N \frac{x - b_n}{x - a_n}\right) ,$$

avec $|b_n| = |b_n - a_n| = r_n$ .

En effet, le facteur singulier relatif à $T$ est $x$ , mais $\prod_1^\infty (x - b_n)/(x - a_n)$ , qui est bien défini sur $A$ , n'est pas un élément analytique sur $A \cup \{0\}$ .

Remarque 4. Néanmoins, il peut exister un facteur singulier relatif à un trou-point, même si ce point n'appartient pas à l'intérieur de l'adhérence de $A$ .

Exemple 3. Soit $A$ le même que dans les exemples 1 et 2 ; et soit $f(x) = x$ .

## 7. Décomposition en produit de facteurs singuliers.

Si $f$ a un facteur singulier $f^T$ relatif à chaque trou $T$ , peut-on reconstituer $f$ comme produit de ses facteurs singuliers ? La réponse est oui si $A$ est un infra-connexe fermé (dans $\overline{K}$ ) et si $f$ est pseudo-inversible.

LEMME 1. - Soit $A$ un infra-connexe fermé, et soit $f \in H(A)$ tel que

$$s = \inf_{T \in \mathcal{T}(A)} s(f , T) > 0 .$$

Alors il existe un polynôme $F$ , dont les zéros sont les zéros de $f$ dans $A$ , tel que $f = F \prod_{T \in \mathcal{T}(A)} f^T$ , le produit convergeant uniformément sur $A$ . (Si $\infty \in A$ , les éventuels zéros de $f$ situés à l'infini sont laissés de côté par $F$ .)

Démonstration. - Commençons par montrer que le produit $\prod_{T \in \mathcal{T}(A)} f^T$ converge uniformément sur $A$ .

Soit $R$ une fraction rationnelle sans pôles dans $A$ telle que $\|R-f\|_A \leq \varepsilon < s$ . Alors d'après ce qu'on a vu ((5) dans la démonstration du théorème 1), on a

$$m(f , T) = m(R , T) .$$

Mais comme dans presque tous les trous (c'est-à-dire dans tous sauf un nombre fini) $R$ n'a ni zéros ni pôles, on a $m(f , T) = 0$ et $R^T = 1$ pour presque tous les trous $T$ de $\mathcal{T}(A)$ .

D'autre part, en faisant tendre $k$ vers l'infini dans la majoration (6) de §4, on voit que l'on a pour tous les $T$

$$\|(x - a)^{m(f,T)}(f^T - R^T)\|_{C_T} \leq \frac{\varepsilon}{s(f , T)} \leq \frac{\varepsilon}{s} .$$

Comme $m(f , T) = m(R , T) = 0$ et $R^T = 1$ pour presque tous les trous $T$ de $\mathcal{T}(A)$ , on a pour presque tous les trous $T \in \mathcal{T}(A)$

$$\|f^T - 1\|_A \leq \|f^T - 1\|_{C_T} \leq \frac{\varepsilon}{s} .$$

Ceci montre que le produit $\prod f^T$ converge uniformément sur $A$ .

Posons donc $g = \prod_{T \in \mathcal{T}(A)} f^T$ . Ce qui nous reste à démontrer, est que $f/g$ est un polynôme dont les zéros sont les zéros de $f$ .

Fixons un $S \in \mathcal{T}(A)$ , $S \neq T_\infty$ , et notons $G^S = \prod_{T \in \mathcal{T}(A), T \neq S} f^T$ . Alors $G^S$ converge uniformément sur $A \cup S$ , car si $T \neq S$ , alors, comme plus haut,

$$\|f^T - 1\|_{A \cup S} \leq \|f^T - 1\|_{C_T} \leq \frac{\varepsilon}{s} .$$

On va noter $\Delta$ le disque $\hat{A}$ si $A$ est borné, et un disque quelconque contenant tous les trous de $A$ si $A$ n'est pas borné. Soit $\rho$ le diamètre de $\Delta$ et soit $r_T$ le diamètre de $T$. Alors on a

$$\inf_{x\in(S\cup A)\cap\Delta}|G^S(x)| \geq \prod_{T\neq S} \inf(r_T^{m(f,T)} , \rho^{m(f,T)}) .$$

Comme $m(f , T) = 0$ pour presque tout $T$, presque tous les termes du produit valent $1$. Le produit est donc strictement positif, ce qui montre que $1/G^S$ est un élément analytique dans $(A \cup S) \cap \Delta$. On a donc, dans $A \cap \Delta$,

$$f/g = (f/f^S)(1/G^S) .$$

Mais $f/f^S \in H((A \cup S) \cap \Delta)$ tout comme $1/G^S$, donc $f/g$ se prolonge dans $S$. (Ceci est équivalent à dire que la partie singulière $(f/g)_S$ de $f/g$ relative au trou $S$ est nulle.)

On voit de même que $f/g$ se prolonge analytiquement dans $(A \cup T_\infty) \cap D$ pour tout disque $D$ borné. Il en résulte que $f/g$ est une fonction entière. On sait par ailleurs que, si $m$ désigne $\sum_{T\in\mathfrak{T}(A)} m(f , T)$, alors $x^{-m}\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $1$ quand $x$ tend vers $+\infty$. Le théorème de Liouville nous dit alors que $f/g$ est un polynôme $F$ de degré $m$.

Comme $f/g$ ne s'annule pas dans les trous de $A$, tous les zéros de $F$ sont situés dans $A$ et sont des zéros de $f$. Réciproquement, un zéro de $f$ dans $A$ est forcément un zéro de $F$, car $g$ ne s'annule pas dans $A$.

THÉORÈME 4. - Soit $A$ un infra-connexe fermé et soit $f \in H(A)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $f$ a un facteur singulier $f^T$ relatif à chaque trou $T$ de $A$ et

$$f = F \prod_{T\in\mathfrak{T}(A)} f^T ,$$

$F$ étant un polynôme et le produit convergeant uniformément sur $A$.

(b) $f$ a un nombre fini de zéros $a_1 , \dots , a_n$ dans $A$ (chacun compté avec son ordre de multiplicité), et $f = \prod_i (x - a_i)g$, où $g$ et $1/g$ sont des éléments analytiques sur $A$. (Si $\infty \in A$ et si $f$ a un zéro d'ordre $k$ à l'infini, la formule devient $f = 1/(x - a)^k \prod_i (x - a_i)g$, avec $a \notin A$.)

Démonstration.

(a) implique (b).

Cas 1. $\infty \notin A$. - Alors $A$ fermé implique $A$ borné. $g = \prod_{T\in\mathfrak{T}(A)} f^T$ est un élément analytique sur $A$, puisque le produit converge uniformément sur $A$. D'autre part, $g$ est borné inférieurement en module sur $A$ par une constante $> 0$, puisque, pour presque tous les $T \in \mathfrak{T}(A)$, $|f^T(x)| = 1$ sur $A$, et dans les autres cas $|f^T(x)| = |x - \alpha|^{-m(g,T)}$, où $\alpha \in T$. Comme $\alpha \notin A$, $|f^T(x)| \geq c > 0$, puisque $A$ est fermé et borné.

Cas 2. $\infty \in A$. - Soit $k$ l'ordre de multiplicité de $f$ à l'infini et soit

$a \in A$ . Comme précédemment, $\prod_{T\in\mathcal{T}(A)} f^T$ est un élément analytique sur $A$ qui a un zéro d'ordre $k$ à l'infini. Donc si $g = (x-a)^k \prod_{T\in\mathcal{T}(A)} f^T$ , alors $g$ est un élément analytique sur $A$ non-nul à l'infini, et $g$ est borné inférieurement par une constante $> 0$ dans le complémentaire d'un disque borné convenable $D$ . Dans $D \cap A$ on a vu dans le lemme que $g$ est borné inférieurement en module par une constante $> 0$ , il en est donc de même sur $A$ .

Dans les deux cas, on a que $1/g$ est un élément analytique sur $A$ . Il reste à montrer que les zéros de $F$ appartiennent à $A$ et sont les zéros de $f$ dans $A$ . En effet, $= F \prod_{T\in\mathcal{T}(A)} f^T$ implique $f^T = F^T . (\prod_{T\in\mathcal{T}(A)} f^T)^T = F^T f^T$ , car $(f^T)^S = 1$ si $T \neq S$ et $(f^T)^T = f^T$ . Donc $F^T = 1$ , $\forall\, T \in \mathcal{T}(A)$ , c'est-à-dire que tous les zéros de $F$ sont dans $A$ . Réciproquement, chaque zéro de $f$ dans $A$ est forcément un zéro de $F$ .

(b) implique (a).

On suppose donc que $g = f/\prod_i (x - a_i)$ est un élément analytique sur $A$ , et que $1/g$ l'est également. Alors on a, pour tout $T \in \mathcal{T}(A)$ ,

$$s(g\ ,\ T) = \frac{1}{s((1/g)\ ,\ T)} \geqslant \frac{1}{\|1/g\|_A} = s > 0\ ,$$

ce qui d'après le lemme 1 entraîne la décomposition multiplicative de $g$ , et donc de $f$ .

## 8. Application.

PROPOSITION 1. - _Soit_ $A$ _un infra-connexe. Soit_ $u$ _un élément analytique sur_ $A$ _tel que_ $u'/u = v$ _soit également un élément analytique sur_ $A$ . _Soient_ $T$ _un trou de_ $A$ , $T \neq T_\infty$ . _Si_ $v$ _se prolonge dans_ $T$ , _alors_ $u$ _se prolonge également dans_ $T$ .

_Démonstration._

(a) Si $s(u\ ,\ T) = 0$ , alors on sait que $u$ se prolonge par $0$ dans $T$ (voir théorème 2, (b ==> a), et §6, remarque 1).

(b) Supposons $s(u\ ,\ T) > 0$ . Alors $u$ a un facteur singulier $g$ relatif à $T$ (théorème 1), et $h = u/g$ se prolonge dans $T$ . Alors $g'/g + h'/h = u'/u = v$ .

Mais $h'/h$ est un élément analytique dans $A \cup T$ sans pôles dans $T$ , et $g'/g$ est un élément analytique dans $\complement T$ tendant vers $0$ à l'infini (comme on le voit en considérant le développement en série de Laurent de $g$ dans $\complement T$ et en remarquant que ce développement n'a qu'un nombre fini de termes non-nuls avec exposant positif). Il en résulte que la partie singulière $v_T$ de $v$ relative au trou $T$ est précisément $v_T = g'/g$ .

Mais dire que $v$ se prolonge dans $T$ , c'est dire que $v_T = 0$ . Donc $g' = 0$ . Donc $g = 1$ . Donc $u = h$ . Mais $h$ se prolonge dans $T$ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Prolongement analytique en analyse pratique, Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux 1968/69, exposé n° 3.

[2] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps values ultramétriques complets. "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, 1973, n° 10, p. 109-218.

(Texte reçu le 17 octobre 1974)

Elhanan MOTZKIN
24 rue Berbier du Mets
75013 PARIS