

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

Interpolation de fonctions analytiques bornées

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 1 (1973-1974), exp. n° 15, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A11_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTERPOLATION DE FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES

par Jean-Paul BEZIVIN

Introduction et notations.

Cet exposé consiste surtout dans le développement d'un travail de M. van der PUT [4] sur l'interpolation des fonctions analytiques bornées sur le disque unité "ouvert" d'un corps K valué complet ultramétrique. On étudie ensuite, comme application, les sous-espaces fermés de $c_0(\mathbb{N} \rightarrow K)$ (suites d'éléments de K convergeant vers zéro) stables par l'opérateur anti-shift

$$T : (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \rightarrow (a_1, \dots, a_n, \dots).$$

On notera Δ le disque unité "ouvert" $\{x \in K ; |x| < 1\}$.

$K\langle X \rangle$ sera l'algèbre de Banach des fonctions analytiques bornées sur Δ munie de la norme habituelle ; $\mathcal{A}(K)$ sera l'ensemble des fonctions analytiques sur Δ . $b(\mathbb{N} \rightarrow K)$, $c(\mathbb{N} \rightarrow K)$, $c_0(\mathbb{N} \rightarrow K)$ seront les espaces de Banach des suites bornées, convergentes, convergeant vers zéro respectivement, munis des normes habituelles.

Soit $P \in K[X]$. P sera dit μ -extrémal si chaque zéro de P , dans une clôture algébrique de K , est de valeur absolue μ .

On appellera diviseur une expression formelle $D = \prod_1^\infty P_i$, P_i étant un polynôme de $K[X]$, μ_i -extrémal, avec $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_r < \dots < 1$. D sera dit normalisé si $(\mu_i > 0) \Rightarrow (P_i(0) = 1)$, et si $(\mu_i = 0) \Rightarrow (P_i(X) = X^d, d \in \mathbb{N})$ [2].

Si $f \in \mathcal{A}(K)$, on notera (f) son diviseur.

1. Généralisation d'un résultat de M. LAZARD [2].

1.1. LEMME. - Soient $f \in \mathcal{A}(K)$, et $(f) = \prod P_i$ son diviseur. Soit c tel que $c^{-1} = (fP_1^{-1})(0)$. Soit $K \subset L$ une extension valuée complète de K . Pour tout $\lambda \in L$, $|\lambda| < 1$, on a

$$|f(\lambda)| = |c| \prod |P_i(\lambda)|,$$

et donc, $\forall \rho, 0 < \rho < 1$,

$$\|f\|_\rho = |c| \prod \|P_i\|_\rho.$$

Définition. - Pour un diviseur $D = \prod P_i$, défini sur K , et si $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, $0 < \rho \leq 1$, on pose

$$\|D\|_\rho = \prod \|P_i\|_\rho,$$

expression qui est finie si $\rho < 1$, et peut être infinie si $\rho = 1$.

COROLLAIRE. - Un élément $f \in \mathcal{A}(K)$ appartient à $K\langle X \rangle$ si, et seulement si,
 $\|f\|_1 < +\infty$.

1.2. THÉOREME. - Soit D un diviseur sur K . Pour tout ε strictement positif,
il existe $f \in \mathcal{A}(K)$, normalisé par $f(X) = X^d g(X)$, $g(0) = 1$, tel que $(f) \geq D$.
De plus, pour tout ρ , $0 < \rho \leq 1$,

$$\|D\|_\rho \leq \|f\|_\rho \leq (1 + \varepsilon) \|D\|_\rho.$$

Si $L \supset K$ est une extension maximale complète de K , il existe $g \in \mathcal{A}(L)$
telle que $(g) = D$.

Démonstration. - On pose

$$\begin{aligned} P_1 \dots P_n(X) &= \sum a_{n,i} X^i, \\ P_1 \dots \hat{P}_j \dots P_n &= \sum a_{n,i}^{(j)} X^i. \end{aligned}$$

On voit facilement que, $\forall \rho$, $0 < \rho < 1$,

$$|a_{n,i}| \rho^i \leq \|D\|_\rho, \quad |a_{n,i}^{(j)}| \rho^i \leq \|D\|_\rho, \quad \forall i, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Soit

$$A_i = (a_{n,i})_{n=1}^{\infty}, \quad A_i^{(j)} = (a_{n,i}^{(j)})_{n=1}^{\infty};$$

ce sont des suites de $b(\mathbb{N} \rightarrow K)$. On considère l'espace de Banach E , engendré
 par tous les A_i , $A_i^{(j)}$, et $c(\mathbb{N} \rightarrow K)$; E est de type dénombrable, donc, pour
 tout $\varepsilon > 0$, il existe une application linéaire $\phi: E \rightarrow K$, prolongeant "lim"
 de $c(\mathbb{N} \rightarrow K) \rightarrow K$, et de norme $\|\phi\| \leq 1 + \varepsilon$.

On pose alors

$$f = \sum \phi(A_i) X^i, \quad f^{(j)} = \sum \phi(A_i^{(j)}) X^i.$$

Comme $\|A_i\| \leq \|D\|_\rho / \rho^i$, $|\phi(A_i)| \leq (1 + \varepsilon) \|D\|_\rho / \rho^i$, donc $f \in \mathcal{A}(K)$, il en est de
 même pour $f^{(j)}$; de plus, $\|f\|_\rho \leq (1 + \varepsilon) \|D\|_\rho$ si $\rho < 1$.

On vérifie que $f(0) = 1$, et $P_j f^{(j)} = f$, d'où la première assertion.

Si L est maximallement complet, il existe un prolongement ϕ de "lim"

$$c(\mathbb{N} \rightarrow L) \rightarrow L$$

à $E \hat{\otimes}_K L$ avec $\|\phi\| = 1$. En appliquant la méthode précédente, on trouve $g \in \mathcal{A}(L)$
 telle que $\|g\|_\rho = \|D\|_\rho$, $\forall \rho$, et $(g) \geq D$. Il est alors facile de voir que
 $(g) = D$.

2. Interpolation.

Pour la théorie complexe, on se reporte à [1].

On va démontrer le théorème suivant.

2.1. THÉOREME. - Soit $(P_i)_1^\infty$ une suite de polynômes premiers entre eux, normalisés par $\|P_i\| = 1$, P_i n'ayant que des zéros de valeurs absolues < 1 , $\forall i$. On note $O_{i,n}$ l'unique polynôme de degré inférieur à $\deg(P_i) = s_0$ tel que

$$O_{i,n} P_1 \dots P_i \dots P_n \equiv 1 [P_i], \quad A = \sup_{n,i} \|O_{i,n}\|,$$

et soit τ l'application canonique $K\langle X \rangle \rightarrow \prod_1^\infty K\langle X \rangle / (P_i)$, alors :

(i) $(\tau \text{ est surjective}) \Leftrightarrow (A < +\infty)$,

(ii) Si τ est surjective, son inverse

$$\tau^* : K\langle X \rangle / \text{Ker } \tau \rightarrow \prod_1^\infty K\langle X \rangle / (P_i)$$

a pour norme A ,

(iii) Si D est un diviseur de décomposition $\prod(P_i)$, alors $\|D\|_1 \leq A \leq \|D\|_1^2$, et $\tau_D : K\langle X \rangle \rightarrow \prod K\langle X \rangle / P_i$ est surjective si, et seulement si, $\|D\|_L < +\infty$.

On va d'abord démontrer un lemme :

2.2. LEMME. - Soit $P \in K[X]$ un polynôme, tel que $\|P\| = 1$, et n'ayant que des racines de valeurs absolues < 1 ; soient τ l'application $K\langle X \rangle \xrightarrow{\tau} K\langle X \rangle / (P)$, et $\alpha : K\langle X \rangle \rightarrow (c_0(\mathbb{N} \rightarrow K))'$ (dual de $c_0(\mathbb{N} \rightarrow K)$) l'isométrie bijective donnée par

$$\alpha(\sum_0^\infty a_n X^n)(b_0, \dots, b_n, \dots) = \sum_0^\infty a_n b_n,$$

où $\sum a_n X^n \in K\langle X \rangle$ et $(b_0, \dots, b_n, \dots) \in c_0(\mathbb{N} \rightarrow K)$; soit enfin β l'isométrie bijective canonique de $K\langle X \rangle / (P) \rightarrow (K\langle X \rangle / (P))''$. Alors il existe une unique application K -linéaire $\mu : (K\langle X \rangle / (P))' \rightarrow c_0(\mathbb{N} \rightarrow K)$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K\langle X \rangle & \xrightarrow{\tau} & K\langle X \rangle / (P) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ (c_0(\mathbb{N} \rightarrow K))' & \xrightarrow{\mu} & (K\langle X \rangle / (P))'' \end{array}$$

de plus, μ est isométrique.

Démonstration. - Soient $\bar{1}, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{s-1}$ les images dans $K\langle X \rangle / (P)$ de $1, X, \dots, X^{s-1}$, où $s = \deg^0(P)$. Si $F \in K\langle X \rangle$, on pose

$$\tau(F) = \sum_{i=0}^{s-1} a_i(F) \bar{X}^i.$$

On vérifie alors que l'application

$$\mu : \ell \in (K\langle X \rangle / (P))' \rightarrow \mu(\ell) = (\ell(\sum_0^{s-1} a_i(X^n) \bar{X}^i))_{n=0}^{n=\infty} \in c_0(\mathbb{N} \rightarrow K)$$

vérifie les propriétés du lemme.

Démonstration du lemme 2.1. - On note τ_i l'application canonique

$$K\langle X \rangle \rightarrow K\langle X \rangle / (P_i),$$

β_i l'application canonique $K\langle X \rangle / (P_i) \rightarrow (K\langle X \rangle / (P_i))''$, et μ_i l'application de $(K\langle X \rangle / (P_i))' \rightarrow c_0(\mathbb{N} \rightarrow K)$, donnée par le lemme 2.2, alors $\tau = \prod \tau_i$; soient

$\mu_1 = \sum \mu_i$ de $\sum (K\langle X \rangle / (P_i))' \rightarrow c_0(\mathbb{N} \rightarrow K)$, et $\beta = \prod \beta_i$ de $\prod K\langle X \rangle / (P_i) \rightarrow (\prod K\langle X \rangle / (P_i))''$.

On a encore $\beta \circ \tau = \mu' \circ \alpha$, et β , α sont bijectives et isométriques. On peut donc considérer μ' à la place de τ .

En utilisant le théorème de Hahn-Banach, valable ici car les espaces sont de type dénombrable, on voit que $(\mu' \text{ est surjective}) \Leftrightarrow (c > 0)$ si

$$c = \inf \{ \|\mu(\ell)\| / \|\ell\| ; \ell \in \sum (K\langle X \rangle / (P_i))', \ell \neq 0 \}.$$

De plus, si $c > 0$, alors $\|\tau^{*-1}\| = c^{-1}$.

Il reste donc à calculer c . On voit facilement que

$$\|\mu(\ell)\| = \sup \{ \frac{\|\alpha(F) \mu(\ell)\|}{\|F\|} ; F \in K\langle X \rangle, F \neq 0 \}.$$

Si $\ell = \sum \ell_i$, $\alpha(F) \mu(\ell) = \sum \ell_i (\tau_i(F))$, et pour calculer c , il suffit de considérer des sommes finies $\sum_1^N \ell_i$.

Supposons $A < +\infty$. Soit $b_0 + b_1 \bar{X} + \dots + b_{s_i-1} \bar{X}^{s_i-1} \in K\langle X \rangle / (P_i)$ telle que

$$|\ell_i(b_0 + b_1 \bar{X} + \dots + b_{s_i-1} \bar{X}^{s_i-1})| = \|\ell_i\| \|b_0 + b_1 \bar{X} + \dots + b_{s_i-1} \bar{X}^{s_i-1}\|.$$

Soit $F = 0_{i,N} P_1 \dots \hat{P}_i \dots P_N$. On a alors :

$$|\alpha(F) \mu(\ell)| > A^{-1} \|F\| \|\ell_i\|,$$

d'où

$$\|\mu(\ell)\| \geq A^{-1} \|\ell\|, \quad \forall \ell \neq 0,$$

et $c \geq A^{-1} > 0$, donc τ est surjective.

Si maintenant τ est surjective, l'inverse de l'application ρ

$$K\langle X \rangle / (P_1 \dots P_n) \xrightarrow{\rho} \prod_1^n K\langle X \rangle / (P_i)$$

a pour norme $\|\rho^{-1}\| \leq \|\tau^{*-1}\|$, or $\rho^{-1}(0, 0 \dots 1, 0 \dots 0)$ peut s'écrire

$0_{i,n} P_1 \dots \hat{P}_i \dots P_n$, et donc $\|0_{i,n}\| \leq \|\tau^{*-1}\|$, $\forall i, \forall n$, et $A \leq \|\tau^{*-1}\| < +\infty$.

(ii) est une conséquence de (i), (iii) résulte d'une inégalité sur les idéaux de $V[X]$, où V est l'anneau de valuation de K ; si I est un idéal de $V[X]$ tel que $I_n V \neq \{0\}$, et si l'on pose $\alpha(I) = \sup\{|\alpha| ; \alpha \in I_n V\}$ et

$$S(I) = \inf_{\lambda \in V} \{ \sup_{f \in I} |f(\lambda)| \},$$

on a la relation suivante, si I est de type fini : $S(I)^2 \leq \alpha(I) \leq S(I)$. On considère, dans ce cas particulier, l'idéal $I = (P_i, P_1 \dots \hat{P}_i \dots P_n)$.

2.3. COROLLAIRE. - Une suite $(\lambda_n)_{n=1}^{n=\infty}$ est appelée suite d'interpolation si l'application $\tau : K\langle X \rangle \rightarrow b(\mathbb{N} \rightarrow K)$, donnée par

$$f \in K\langle X \rangle \rightarrow \tau(f) = (f(\lambda_n))_1^\infty \in b(\mathbb{N} \rightarrow K),$$

est surjective.

Soit $c = \inf_i \prod_{n=1, n \neq i}^{n=\infty} |\lambda_i - \lambda_n|$, alors

$((\lambda_n)_1^\infty \text{ est une suite d'interpolation}) \Leftrightarrow (c > 0)$.

Démonstration. - On applique le théorème 2.1 avec $P_n(X) = X - \lambda_n$.

2.4. COROLLAIRE. - Soit $(\lambda_n)_1^\infty$ une suite d'interpolation, et soit I :

$I \subset K\langle X \rangle$ l'idéal $\{f \in K\langle X \rangle ; f(\lambda_i) = 0, \forall i\}$;

alors les idéaux maximaux $M : I \subset M$ sont en bijection avec les ultrafiltres $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ par l'application :

$\mathcal{U} \rightarrow \{f \in K\langle X \rangle ; \lim_{\mathcal{U}} f(\lambda_n) = 0\}$.

Démonstration. - Comme $K\langle X \rangle / I \simeq b(\mathbb{N} \rightarrow K)$, ceci résulte d'un résultat classique [3].

3. Application aux sous-espaces invariants par l'opérateur anti-shift.

T est donné par $T(e_0) = 0$, $T(e_i) = e_{i-1}$, $i \geq 1$, si (e_i) est la base orthonormale de $c_0(\mathbb{N} \rightarrow K)$: $e_i = (0, 0 \dots 1, 0 \dots 0 \dots)$. On a une application $\rho : K\langle X \rangle \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $E = c_0(\mathbb{N} \rightarrow K)$ pour $\rho(\sum a_n X^n)(e_i) = \sum a_n T^n(e_i)$, ρ est isométrique. On note π_n l'application $E \rightarrow K$: $\pi_n(e_i) = \delta_i^n$ (symbole de Kronecker). On vérifie que $\pi_0 \circ \rho = \alpha$, où α est l'application considérée dans le lemme 2.2.

3.1. LEMME. - Soit $F \subset E$ un sous-espace fermé invariant par T , alors :

(i) $\forall f \in K\langle X \rangle$, $\rho(f)(F) \subset F$.

(ii) Soit $\text{id}(F) = \{f \in K\langle X \rangle ; \rho(f)F = 0\}$; $\text{id}(F)$ est un idéal fermé de $K\langle X \rangle$, qui est aussi le noyau de l'application composée

$$K\langle X \rangle \xrightarrow{\pi_0 \circ \rho} E' \xrightarrow{r} F' ,$$

où r est la restriction. De plus, on a $K\langle X \rangle / \text{id}(F) \simeq F'$;

(iii) Si $F_1 \not\subset F_2$ sont deux sous-espaces fermés invariants, on a :

$$\text{id}(F_2) \not\subset \text{id}(F_1) ;$$

(iv) Soit I un idéal de $K\langle X \rangle$. On pose $n(I) = \bigcap_{f \in I} \text{Ker } \rho(f)$, alors $n(I)$ est un sous-espace fermé invariant de E . De plus, on a : $n(\text{id}(F)) = F$.

La démonstration du lemme est immédiate.

3.2. LEMME. - Soit $P \in K\langle X \rangle$ un polynôme de degré s , dont toutes les racines sont de valeur absolue < 1 . On considère l'application μ du lemme 2.2, alors μ est un isomorphisme de $K\langle X \rangle / (P)$ sur $n(PK\langle X \rangle)$. De plus :

(a) $\text{id}[n(PK\langle X \rangle)] = PK\langle X \rangle$;

(b) Pour tout sous-espace fermé invariant de E , de dimension $s \in \mathbb{N}$, il existe

un polynôme $P \in K\langle X \rangle$ de degré s ayant uniquement des racines de valeurs absolues < 1 tel que $F = n(PK\langle X \rangle)$.

Démonstration. - On montre d'abord facilement que l'on a $\lim n(PK\langle X \rangle) = s$. Pour montrer que $\text{Im}(\mu) = n(PK\langle X \rangle)$, il suffit alors de montrer que $\text{Im}(\mu) \subset n(PK\langle X \rangle)$, car μ est isométrique. Soit $\ell \in (K\langle X \rangle / (P))'$, alors

$$\forall n \geq 0, \quad \alpha(X^n P) \mu(\ell) = \mu' \circ \alpha(X^n P)(\ell) = \beta \circ \tau(X^n P)(\ell) = 0,$$

donc comme $\alpha(X^n P) = \pi_n \circ \rho(P)$, $\forall n \geq 0$, on a $\rho(P) \mu(\ell) = 0$, soit

$$\text{Im}(\mu) \subset n(PK\langle X \rangle) .$$

(a) se démontre facilement en écrivant $\text{id}[n(PK\langle X \rangle)] = QK\langle X \rangle$ avec $Q|P$, et en appliquant "n" encore une fois (lemme 3.1, (iv)).

Pour (b), on utilise le polynôme caractéristique de la restriction T^* de T à F .

3.3. LEMME. - Soit D un diviseur sur K , tel que $\|D\|_1 < +\infty$. Soit $D = \prod P_i$; on considère le diagramme de la proposition 2.1 :

$$\begin{array}{ccc} K\langle X \rangle & \xrightarrow{\tau} & \prod K\langle X \rangle / (P_i) \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow \\ (c_0(\mathbb{N}_a \rightarrow K))' & \xrightarrow{\mu'} & [\sum (K\langle X \rangle / (P_i))'] \end{array}$$

On note I_D l'idéal fermé $\{f \in K\langle X \rangle ; (f) \geq D\}$, alors I_D est le noyau de τ , et $\text{Im}(\mu) = n(I_D)$.

De plus, les espaces $\mu([K\langle X \rangle / (P_i)]') = n(P_i K\langle X \rangle)$ sont $\|D\|_1^{-2}$ -orthogonaux, et leur somme fermée $\sum n(P_i K\langle X \rangle)$ est égale à $\text{Im} \mu$. En outre, $\text{id}[\text{Im} \mu] = I_D$.

Démonstration. - Le fait que les espaces $n(P_i K\langle X \rangle)$ soient $\|D\|_1^{-2}$ -orthogonaux provient du théorème 2.1, (iii) ; leur somme fermée est alors égale à $\text{Im}(\mu)$. On a

$$I_D = \text{Ker}(\tau) = \text{Ker}(\beta \circ \tau) = \text{Ker}(\mu' \circ \alpha) ,$$

donc,

$$(f \in I_D) \iff (\alpha(X^n f)(\text{Im} \mu) = 0) , \quad \forall n \geq 0 ;$$

comme $\alpha(X^n f) = \pi_n \circ \rho(f)$,

$$(f \in I_D) \iff (\rho(f)(\text{Im} \mu) = 0) ,$$

d'où $\text{id}[\text{Im} \mu] = I_D$.

On peut maintenant énoncer le théorème suivant.

3.4. THÉORÈME. - Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs rationnels sur K , tels que $\|D\|_1 < +\infty$, l'application

$$\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \{\text{ensemble des sous-espaces fermés de } E \text{ invariants par } T\} ,$$

donnée par $\Phi(D) = n(I_D)$ est bijective ; de plus, $\text{Id}[\Phi(D)] = I_D$.

Démonstration. - Il suffit maintenant de montrer que Φ est surjective. Soit F un sous-espace fermé invariant de E . Soit $f \in K(X)$, $f \neq 0$, $f \in \text{Id}(F)$. Posons $(f) = \prod P_i$, on a alors :

$$n(fK(X)) = \sum n(P_i K(X)) \supset F,$$

et l'ensemble des sous-espaces $n(P_i K(X))$ est $\|(f)\|_1^{-2}$ -orthogonal. On montre alors que $F = \sum F \cap n(P_i K(X))$, somme $\|(f)\|_1^{-2}$ -orthogonale.

Chaque $F \cap n(P_i K(X))$ est de dimension finie, et s'écrit donc $n(P_i^* K(X))$ avec P_i^* divisant P_i . Soit $D = \prod P_i^*$. On a alors $F = n(I_D)$, ce qui termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HOFFMANN (Kenneth). - Banach spaces of analytic functions. - Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1962 (Prentice-Hall Series in modern Analysis).
- [2] LAZARD (Michel). - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, *Public. math.*, 14, p. 223-251).
- [3] PUT (Marius van der). - Algèbres de fonctions continues p-adiques, *Indagationes Math.*, Amsterdam, t. 30, 1968, p. 401-420.
- [4] PUT (Marius van der). - The non-archimedian corona problem (à paraître).

(Texte reçu le 10 juin 1974)

Jean-Paul BEZIVIN
163 rue de Charonne
75011 PARIS
