P. AGERON

Catégories accessibles à produits fibrés

Diagrammes, tome 36 (1996), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1996__36__1_0>

DIAGRAMMES VOLUME 36 , 1996

CATEGORIES ACCESSIBLES A PRODUITS FIBRES [1]

P. Ageron

RESUME. Nous caractérisons les catégories accessibles à produits fibrés (finis) comme catégories de modèles de certaines esquisses. Dans ce but, nous introduisons les limites inductives "libres" dans ***Ens*** et démontrons que ce sont exactement les limites inductives qui commutent aux produits fibrés.

ABSTRACT. Accessible categories with (finite) pullbacks are characterized as the categories of models of specific sketches. This is achieved by introducing "free" colimits in ***Set*** : such colimits are proved to be exactly those that commute with pullbacks.

ZUSAMMENFASSUNG. Erreichbare Kategorien mit (endlichen) Faserprodukten werden als Modellkategorien gewisser Skizzen charakterisiert. Dazu werden "freie" Kolimites in ***Me*** eingeführt : wir beweisen, daß sie genau diejenigen Kolimites sind, welche mit Faserprodukten kommutieren.

1. Introduction.

La notion de catégorie ***accessible*** (ou ***modelable***), introduite dans [Lair81], est aujourd'hui bien connue. Il en va de même du résultat fondamental suivant, établi dans [Lair81] : les catégories accessibles sont exactement les catégories

---

[1] Ce travail a fait l'objet d'un exposé au 61eme P.S.S.L. (Dunkerque, 9 juin 1996).

Il est dédié à la mémoire de Christophe Lecoiffier : étudiant doué et sensible, Christophe préparait à l'Université de Caen une thèse de doctorat sur les groupes de tresses, sous la direction de Patrick Dehornoy. Il était aussi moniteur de l'enseignement supérieur et j'étais, à ce titre, son tuteur. Pendant l'été 1995, en vacances en Haute-Corse, il disparut soudainement ; il y fut retrouvé sans vie onze mois plus tard au fond d'un ravin.

esquissables (quelques précisions terminologiques sont données à la fin de cette introduction).

Dans [Ageron92], nous avons (entre autres choses) caractérisé en termes d'esquisses les catégories accessibles possédant les produits fibrés et les limites projectives cofiltrantes [2] : il suffit de considérer les esquisses dont les cônes inductifs distingués sont indexés par des sommes de groupes "opérant sans point fixe".

Dans [Ageron95], nous avons caractérisé (entre autres choses) en termes d'esquisses les catégories accessibles possédant les produits fibrés *et* les noyaux [3] : il suffit de considérer les esquisses dont les cônes inductifs distingués sont indexés par des catégories pseudofiltrantes (au sens de Verdier : chaque composante connexe est filtrante).

Le présent travail apporte une réponse au problèmes suivant, qui demeurait ouvert : caractériser en termes d'esquisses les catégories accessibles possédant les (seuls) produits fibrés.

Voici un exemple de catégorie accessible qui possède les produits fibrés, mais ne possède ni les limites projectives cofiltrantes, ni les noyaux. Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des ensembles *non vides* dans lesquels le monoïde $(\mathbf{N},+)$ opère de façon "simplement transitive", c'est-à-dire conformément aux axiomes suivants :

- $\forall x', x'' \in X \quad \exists n', n'' \in \mathbf{N} \quad n'+x' = n''+x''$,
- $\forall x', x'' \in X \quad \forall n'_1, n''_1, n'_2, n''_2 \in \mathbf{N}$

$$(n'_1 + x' = n''_1 + x'' \text{ et } n'_2 + x' = n''_2 + x'') \Rightarrow (n'_1 + n''_2 = n'_2 + n''_1)$$

En désignant par s l'endomorphisme du $\mathbf{N}$-ensemble canonique $\mathbf{N}$ défini, pour tout n dans $\mathbf{N}$, par $s(n) = n + 1$, le lecteur constatera :

- que le couple de flèches parallèles $(id_{\mathbf{N}}, s)$ n'admet pas de noyau,
- que le diagramme d'indexation cofiltrante $(\ldots,s,s,s)$ n'a pas de limite projective,
- mais que $\mathcal{A}$ possède les produits fibrés.

D'une certaine façon, on établit (partie 3) que toute catégorie accessible possédant les produits fibrés peut être vue comme une variante de cet exemple. Plus précisément, elle est équivalente à la catégorie des modèles d'une esquisse dont les cônes inductifs distingués sont indexés par des catégories "fibrantes" (voir la définition 1) et sont contraints (au moyen d'autres cônes) de se réaliser en limites inductives "libres" (voir la définition 2).

Une remarque importante : il est facile de montrer, par exemple en utilisant le critère catégorique donné dans [Johnstone94], que la catégorie $\mathcal{A}$ ci-dessus n'est pas

---

[2] Autrement dit . possédant les limites projectives simplement connexes.

[3] Autrement dit : possédant les limites projectives connexes finies.

axiomatisable au premier ordre (quel que soit le langage adopté). Ceci découle aussi du résultat suivant, dû à Hugo Volger :

PROPOSITION. *Si une catégorie* $\boldsymbol{A}$ *est équivalente à la catégorie des modèles d'une théorie du premier ordre (finitaire) et si* $\boldsymbol{A}$ *possède les produits fibrés, alors* $\boldsymbol{A}$ *possède aussi les limites projectives cofiltrantes.*

On voit ainsi que le problème de l'existence des produits fibrés n'a pas du tout la même signification en théorie des esquisses et en logique du premier ordre. Sa version logique est d'ailleurs entièrement élucidée dans [Hébert97].

Précisons quelques conventions terminologiques. Si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie, l'expression "***diagramme*** dans $\boldsymbol{A}$" désigne tout foncteur d'une *petite* catégorie (appelée ***indexation*** du diagramme) vers $\boldsymbol{A}$. Par abus de langage, on appellera "***indexation*** d'un cône (projectif ou inductif)" l'indexation du diagramme qui lui sert de base. Une ***esquisse*** $\boldsymbol{E}$ est (ici) une *petite catégorie* dans laquelle on distingue certains cônes projectifs et/ou inductifs ; un ***modèle*** de $\boldsymbol{E}$ est un foncteur de $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{Ens}$ qui transforme ces cônes en cônes limites. Une catégorie est ***esquissable*** si elle est équivalente à la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E})$ des modèles et transformations naturelles d'une certaine esquisse $\boldsymbol{E}$.

D'autres définitions, spécifiques à ce travail, sont rassemblées dans la partie 2. La partie 3 contient l'énoncé et la preuve du théorème de caractérisation. Enfin, la partie 4 examine les propriétés de commutation de limites dans $\boldsymbol{Ens}$ liées à ce résultat.

2. Catégories cofibrantes et foncteurs libres.

La définition suivante peut être vue comme une généralisation aux petites catégories de la "condition de Ore" pour les monoïdes.

DEFINITION 1. Soit $\boldsymbol{I}$ une *petite* catégorie. On dira que $\boldsymbol{I}$ est ***cofibrante*** si, et seulement si, tout couple de flèches de même but peut y être inséré dans un carré commutatif. On dira alors aussi que $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}$ est ***fibrante***.

EXEMPLES. a) Toute catégorie cofiltrante est cofibrante. Plus généralement, toute catégorie pseudocofiltrante (au sens de Verdier) est cofibrante.

b) Les groupoïdes petits sont des catégories cofibrantes.

c) La catégorie libre sur un objet X et une flèche $x : X \to X$ est cofibrante. De même, la catégorie libre sur deux objets X et Y et deux flèches $x : Y \to X$ et $y : X \to Y$ est cofibrante. Ces catégories ne relèvent d'aucun des cas précédents.

DEFINITION 2. Soit $\boldsymbol{I}$ une catégorie *cofibrante*. On dira qu'un foncteur $\iota : \boldsymbol{I}^{op} \to \boldsymbol{Ens}$ est *libre* si et seulement si :

- à chaque fois qu'on dispose dans $\boldsymbol{I}$ de quatre objets I', I'', I_1, I_2, de quatre flèches $i'_1 : I_1 \to I'$, $i'_2 : I_2 \to I'$, $i''_1 : I_1 \to I''$, $i''_2 : I_2 \to I''$, et qu'il existe deux éléments $z' \in \iota(I')$ et $z'' \in \iota(I'')$ tels que $\iota(i'_1)(z') = \iota(i''_1)(z'')$ et $\iota(i'_2)(z') = \iota(i''_2)(z'')$, alors il existe dans $\boldsymbol{I}$ deux flèches $i_1 : I \to I_1$ et $i_2 : I \to I_2$ telles que $i'_1 i_1 = i'_2 i_2$ et $i''_1 i_1 = i''_2 i_2$.

EXEMPLES. a) Supposons que $\boldsymbol{I}$ soit cofiltrante (ou, plus généralement, pseudocofiltrante). Alors, tous les foncteurs ι de $\boldsymbol{I}^{op}$ vers $\boldsymbol{Ens}$ sont libres. (Voir une réciproque en fin de la partie 4.)

b) Supposons que $\boldsymbol{I}$ soit un groupoïde petit. Alors un foncteur ι de $\boldsymbol{I}^{op}$ vers $\boldsymbol{Ens}$ est libre si et seulement si, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, le groupe $\mathrm{Aut}_{\boldsymbol{I}}(I)$ opère librement (c.-à-d. sans point fixe) sur l'ensemble $\iota(I)$.

c) Supposons que $\boldsymbol{I}$ soit la catégorie libre sur un objet X et une flèche $x : X \to X$. Alors l'unique foncteur ι de $\boldsymbol{I}^{op}$ vers $\boldsymbol{Ens}$ tel que $\iota(X) = \mathbf{N}$ et $\iota(x)(n) = n+1$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, est libre.

3. Caractérisation des catégories accessibles à produits fibrés.

Il s'agit, dans un premier temps, d'isoler une classe très particulière d'esquisses telle que toute catégorie accessible possédant les produits fibrés puisse être esquissée par une esquisse de cette classe. Le point essentiel (c'est-à-dire l'entrée en scène des catégories cofibrantes et des foncteurs libres) est contenu dans le lemme suivant :

LEMME 1. *Soit $\boldsymbol{A}$ une catégorie localement petite possédant les produits fibrés. Si $\boldsymbol{A}$ contient une petite sous-catégorie pleine initiale $\boldsymbol{I}$, alors $\boldsymbol{I}$ est cofibrante et les foncteurs* $\mathrm{Hom}(-,A) : \boldsymbol{I}^{op} \to \boldsymbol{Ens}$ *(pour tout objet* A *de* $\boldsymbol{A}$*) sont libres. (On dira que $\boldsymbol{I}$ est* ***librement initiale****.)*

PREUVE. Montrons d'abord que $\boldsymbol{I}$ est cofibrante Soit $(i' : I' \to I, i'' : I'' \to I)$ un couple de flèches de même but dans $\boldsymbol{I}$. Le produit fibré $P = I' \times_I I''$ existe dans $\boldsymbol{A}$. Puisque $\boldsymbol{I}$ est initiale dans $\boldsymbol{A}$, il existe I_0 dans $\boldsymbol{I}$ et i_0 $I_0 \to P$. Par composition, on obtient des flèches $i'_1 : I_0 \to I'$, $i''_1 : I_0 \to I''$ qui sont dans $\boldsymbol{I}$ (puisque celle-ci est pleine) et vérifient $i' i'_1 = i'' i''_1$.

Fixons maintenant un objet A de $\boldsymbol{A}$ et montrons que le foncteur canonique $\mathrm{Hom}(-,A)$ est libre. Considérons donc dans $\boldsymbol{I}$ quatre objets I', I'', I_1, I_2, quatre flèches $i'_1 : I_1 \to I'$, $i'_2 : I_2 \to I'$, $i''_1 : I_1 \to I''$, $i''_2 : I_2 \to I''$, et supposons qu'il existe dans $\boldsymbol{A}$ deux flèches $z' : I' \to A$ et $z'' : I'' \to A$ telles que $z' i'_1 = z'' i''_1$ et $z' i'_2 = z'' i''_2$. Considérons d'abord le produit fibré $P = I' \times_A I''$ et notons π', π'' les projections correspondantes. D'après la propriété universelle de P, il existe une unique flèche $i_1 : I_1 \to P$ telle que $\pi' i_1 = i'_1$ et $\pi'' i_1 = i''_1$. De même, il existe une unique flèche $i_2 : I_2 \to P$ telle que $\pi' i_2 = i'_2$ et $\pi'' i_2 = i''_2$. On peut alors construire le produit fibré $P_0 = I_1 \times_P I_2$; notons π_1 et π_2 les projections associées. Puisque $\boldsymbol{I}$ est initiale dans $\boldsymbol{A}$, il existe I_0 dans $\boldsymbol{I}$ et $i_0 : I_0 \to P_0$. On pose $i_1 = \pi_1 i_0$ et $i_2 = \pi_2 i_0$: ce sont des flèches de $\boldsymbol{I}$ (puisque celle-ci est pleine). Il vient alors :

$$i'_1 i_1 = i'_1 \pi_1 i_0 = \pi' i_1 \pi_1 i_0 = \pi' i_2 \pi_2 i_0 = i'_2 \pi_2 i_0 = i'_2 i_2$$

et, de même, $i''_1 i_1 = i''_2 i_2$. FIN DE LA PREUVE.

C'est la notion de ***diagramme localement limite inductive*** (introduite dans [Guitart-Lair80]) qui, historiquement, permit de jeter le pont entre la théorie des esquisses et la notion (nouvelle) de catégorie accessible. Rappelons-en la définition, avant d'en introduire la version "libre" qui nous sera utile.

DEFINITION 3. Soient $\delta : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{A}$, $\lambda : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{A}$ deux diagrammes dans une catégorie localement petite $\boldsymbol{A}$. On dit que λ est un ***diagramme localement limite inductive*** pour δ si, et seulement si, naturellement en tout objet A de $\boldsymbol{A}$, on a :

$$\operatorname*{LimInd}_{L \in \boldsymbol{L}^{op}} \mathrm{Hom}(\lambda(L), A) \cong \operatorname*{LimProj}_{D \in \boldsymbol{D}^{op}} \mathrm{Hom}(\delta(D), A) .$$

On dira que λ est un ***diagramme librement limite inductive*** pour δ si, et seulement si, de plus, $\boldsymbol{L}$ est cofibrante et tous les foncteurs $\mathrm{Hom}(\lambda(-),A)$ (pour A objet de $\boldsymbol{A}$) sont libres.

Si une catégorie accessible possède les produits fibrés, alors elle possède aussi les diagrammes *librement* limite inductive. Plus précisément :

LEMME 2. *Soient* β *un cardinal régulier et* $\boldsymbol{A}$ *une catégorie* β*-accessible. Supposons que* $\boldsymbol{A}$ *possède les produits fibrés. Alors tout diagramme dans* $\mathbf{A}$ *d'indexation* β*-petite et à valeurs* β*-présentables admet un diagramme librement limite inductive dans* $\boldsymbol{A}$, *d'indexation cofibrante et à valeurs* β*-présentables.*

PREUVE. Soit δ un diagramme β-petit dans $\boldsymbol{A}_\beta$ (une petite sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{A}$ équivalente à la catégorie des objets β-présentables de $\boldsymbol{A}$). Notons $\boldsymbol{L}$ la (petite) catégorie $\text{CôneInd}_\beta(\delta)$ dont les objets sont les cônes inductifs de base δ et de sommet dans A_β. Notons λ le foncteur de L dans A qui envoie chaque cône inductif sur son sommet. Il est bien connu que λ est un diagramme localement limite inductive pour δ. Cela revient à dire que L est une sous-catégorie (pleine) initiale de la catégorie $\text{CôneInd}(\delta)$ de *tous* les cônes inductifs de base δ. Par ailleurs la catégorie $\text{CôneInd}(\delta)$ possède les produits fibrés (ils sont créés par le foncteur "sommet"). On peut donc lui appliquer le lemme 1 : on obtient exactement que L est cofibrante et que λ est un diagramme *librement* limite inductive. FIN DE LA PREUVE.

Si maintenant une catégorie accessible possède les diagrammes *librement* limites inductives, alors il est possible (en suivant la méthode de [Lair81]) de l'esquisser d'une façon spécifique :

LEMME 3. *Soient* β *un cardinal régulier et* A *une catégorie* β*-accessible. Supposons que tout diagramme dans* A *d'indexation* β*-petite et à valeurs* β*-présentables admette un diagramme librement limite inductive dans* A*, d'indexation cofibrante et à valeurs* β*-présentables. Alors* A *est esquissable par une esquisse* E *dans laquelle :*

- *tout cône projectif distingué est d'indexation* β*-petite,*
- *pour tout cône inductif distingué* $(q_I : B(I) \to S)_{I \in I^{op}}$:
    - (i) *sa catégorie d'indexation* I^{op} *est fibrante,*
    - (ii) *si on a dans* I *quatre flèches* $i'_1 : I_1 \to I'$, $i'_2 : I_2 \to I'$, $i''_1 : I_1 \to I''$, $i''_2 : I_2 \to I''$, *sans qu'il existe de flèches* $i_1 : I \to I_1$ *et* $i_2 : I \to I_2$ *telles que* $i'_1 i_1 = i'_2 i_2$ *et* $i''_1 i_1 = i''_2 i_2$, *alors* E *contient des cônes projectifs distingués (d'indexation finie) et un cône inductif distingué (d'indexation vide) permettant de spécifier que le produit fibré :*

    $$(B(I') \times_{B(I_1)} B(I'')) \times_{B(I')\times B(I'')} (B(I') \times_{B(I_2)} B(I''))$$

    est vide.

PREUVE. Comme il est dit plus haut, on va suivre la méthode générale pour esquisser une catégorie β-accessible A donnée. Rappelons qu'elle consiste, pour tout diagramme dans A d'indexation petite et à valeurs β-présentables, à choisir un diagramme localement limite inductive dans A à valeurs β-présentables. On peut alors, en agrandissant A_β^{op}, construire une esquisse E dans laquelle les indexations des cônes projectifs distingués sont β-petites et les indexations des cônes inductifs distingués sont duales de celles des diagrammes localement limites inductives. Cependant, on suppose ici (ce qui est plus précis) que l'on dispose de diagrammes *librement* limites inductives. Il en résulte que, pour tout cône inductif distingué $(q_I : B(I) \to S)_{I \in I^{op}}$ et tout modèle M de E, le foncteur $M{\circ}B$ sera automatiquement libre. On peut donc spécifier cette condition supplémentaire dans E sans restreindre la classe des modèles : c'est exactement ce qui est exprimé dans la condition (ii) (on laisse au lecteur le soin de décrire de façon entièrement élémentaire les ingrédients syntaxiques nécessaires à la spécification de cette condition). FIN DE LA PREUVE.

Il s'agit ensuite de montrer que, réciproquement, la catégorie des modèles d'une telle esquisse possède les produits fibrés. Pour cela, on va la décrire en termes d'objets *validant* des cônes projectifs (voir [Guitart-Lair80] ou [Lair87]).

DEFINITION 4. Soient $p = (p_I : S \to \iota(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$ un cône projectif dans une catégorie localement petite $\boldsymbol{C}$ et C un objet de $\boldsymbol{C}$. On dit (classiquement) que C ***valide*** p si, et seulement si, l'application canonique de $\mathrm{LimInd}_{I \in \boldsymbol{I}^{op}} \mathrm{Hom}(\iota(I),C)$ dans $\mathrm{Hom}(S,C)$ est bijective. On dira que C ***valide librement*** p si, et seulement si, de plus, $\boldsymbol{I}$ est cofibrante et le foncteur $\mathrm{Hom}(\iota(-),C)$ est libre.

REMARQUE. Compte tenu du calcul des limites inductives dans ***Ens***, il est possible de donner une forme plus concrète à cette définition. En effet, dire que C valide librement p signifie que :

(1) toute flèche f de S vers C s'écrit au moins d'une façon sous la forme $f = h\, p_I$ (avec I objet de $\boldsymbol{I}$ et $h : \iota(I) \to C$),

(2) si $f = h' p_{I'} = h'' p_{I''}$, il existe dans $\boldsymbol{I}$ un objet I et deux flèches $i' : I \to I'$ et $i'' : I \to I''$ vérifiant $h' \iota(i') = h'' \iota(i'')$,

(3) si, dans les mêmes conditions, on dispose de deux objets I_1 et I_2 et quatre flèches $i'_1 : I_1 \to I'$, $i''_1 : I_1 \to I''$, $i'_2 : I_2 \to I'$ et $i''_2 : I_2 \to I''$ vérifiant $h' \iota(i'_1) = h'' \iota(i''_1)$ et $h' \iota(i'_2) = h'' \iota(i''_2)$, alors il existe un objet I et deux flèches $i_1 : I \to I_1$ et $i_2 : I \to I_2$ tels que $i'_1 i_1 = i'_2 i_2$ et $i''_1 i_1 = i''_2 i_2$.

Il est établi dans [Lair87] que la catégorie des modèles d'une esquisse peut toujours être vue comme la sous-catégorie pleine d'une catégorie localement présentable dont les objets sont ceux qui valident certains cônes projectifs. Dans le contexte "libre", ce principe a la traduction suivante :

LEMME 4. *Soit $\boldsymbol{E}$ une esquisse vérifiant (pour un certain cardinal régulier β) les propriétés énoncées au lemme 3. Alors il existe une catégorie localement petite $\boldsymbol{C}$ admettant les produits fibrés et un ensemble de cônes projectifs dans $\boldsymbol{C}$ d'indexations cofibrantes tels que la catégorie* $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E})$ *soit équivalente à la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{C}$ dont les objets sont ceux qui valident librement ces cônes.*

PREUVE. Posons $\boldsymbol{C} = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}^-)$ où $\boldsymbol{E}^-$ est l'esquisse obtenue à partir de $\boldsymbol{E}$ en supprimant tous les cônes inductifs distingués, ainsi que les cônes projectifs distingués dont la présence est requise par la condition (ii). Alors $\boldsymbol{C}$ est localement β-présentable, donc en particulier localement petite et à produits fibrés.

Considérons dans C l'ensemble des cônes projectifs de la forme $Y(q)$, où Y est le modèle canonique de $(E^-)^{op}$ dans $\mathrm{Mod}(E^-)$ et où q est un cône inductif distingué de E. Il est classique (et facile à vérifier) qu'un modèle M de E^- valide les $Y(q)$ si, et seulement si, les $M(q)$ sont des limites inductives dans ***Ens***. Il est alors clair que M valide *librement* ces mêmes $Y(q)$ si, et seulement si, M est un modèle de E. FIN DE LA PREUVE.

Il ne reste donc plus, pour conclure, qu'à établir :

LEMME 5. *Soient* C *une catégorie localement petite possédant les produits fibrés et* p *un cône projectif dans* C *d'indexation cofibrante. Alors la sous-catégorie pleine de* C *dont les objets sont ceux qui valident librement* p *est fermée dans* C *par produits fibrés.*

PREUVE. Posons $p = (p_I : S \to \iota(I))_{I \in I}$ (où I est une petite catégorie cofibrante). Soient deux flèches $c_1 : C_1 \to C_0$ et $c_2 : C_2 \to C_0$, où C_0, C_1, C_2 valident librement p. Choisissons un produit fibré $C = C_1 \times_{C_0} C_2$ et notons $\pi_1 : C \to C_1$, $\pi_2 : C \to C_2$ et $\pi_0 : C \to C_0$ les projections correspondantes. Nous allons montrer que C valide librement p.

Commençons par vérifier la clause (1). Donnons-nous une flèche $f : S \to C$ et posons $f_1 = \pi_1 f$, $f_2 = \pi_2 f$, $f_0 = \pi_0 f$. D'après la clause (1) pour C_1, il existe I_1 et $h_1 : \iota(I_1) \to C_1$ tels que $f_1 = h_1 p_{I_1}$. De même, il existe I_2 et $h_2 : \iota(I_2) \to C_2$ tels que $f_2 = h_2 p_{I_2}$.

On a donc $f_0 = c_1 \pi_1 f = c_1 f_1 = c_1 h_1 p_{I_1}$ et $f_0 = c_2 \pi_2 f = c_2 f_2 = c_2 h_2 p_{I_2}$ et, d'après la clause (2) pour C_0, il existe I, $i_1 : I \to I_1$, $i_2 : I \to I_2$ tels que $c_1 h_1 \iota(i_1) = c_2 h_2 \iota(i_2)$. Par la propriété universelle du produit fibré, ceci implique qu'il existe une unique $h : \iota(I) \to C$ telle que $\pi_1 h = h_1 \iota(i_1)$ et $\pi_2 h = h_2 \iota(i_2)$. On a alors $\pi_1 h p_I = h_1 \iota(i_1) p_I = h_1 p_{I_1} = f_1 = \pi_1 f$ et, de même, $\pi_2 h p_I = \pi_2 f$ ce qui fournit une factorisation de f à travers ι.

Etablissons ensuite la clause (2) : on suppose que f admet deux factorisations $f = h' p_{I'} = h'' p_{I''}$ et on cherche à les connecter. On note d'abord que $f_1 = \pi_1 h' p_{I'} = \pi_1 h'' p_{I''}$: d'après la clause (2) pour C_1, il existe donc I_1, $i'_1 : I_1 \to I'$ et $i''_1 : I_1 \to I''$ tels que $\pi_1 h' \iota(i'_1) = \pi_1 h'' \iota(i''_1)$. De même, il existe I_2, $i'_2 : I_2 \to I'$ et $i''_2 : I_2 \to I''$ tels que $\pi_2 h' \iota(i'_2) = \pi_2 h'' \iota(i''_2)$. Alors, on constate successivement que :

$$f_0 = \pi_0 h' p_{I'} = \pi_0 h'' p_{I''},$$

$$\pi_0 h' \iota(i'_1) = \pi_0 h'' \iota(i''_1),$$

$$\pi_0 h' \iota(i'_2) = \pi_0 h'' \iota(i''_2).$$

En utilisant la clause (3) pour C_0, on obtient l'existence de I, $i_1 : I \to I_1$ et $i_2 : I \to I_2$ tels que $i'_1 i_1 = i'_2 i_2$ et $i''_1 i_1 = i''_2 i_2$. Alors, on voit que :

$$\pi_1 h' \iota(i'_1 i_1) = \pi_1 h' \iota(i'_1) \iota(i_1) = \pi_1 h'' \iota(i''_1) \iota(i_1) = \pi_1 h'' \iota(i''_1 i_1)$$

et, de même, que :

$$\pi_2 h' \iota(i'_2 i_2) = \pi_2 h'' \iota(i''_2 i_2) .$$

En posant $i' = i'_1 i_1 = i'_2 i_2$ et $i'' = i''_1 i_1 = i''_2 i_2$, on obtient donc $h' \iota(i') = h'' \iota(i'')$, ce qui est la connexion cherchée.

Il reste enfin à établir la clause (3). Supposons toujours que $f : S \to C$ ait deux factorisations $f = h' p_{I'} = h'' p_{I''}$ et supposons de plus qu'on dispose de deux connexions entre ces factorisations : $h' \iota(i'_1) = h'' \iota(i''_1)$ et $h' \iota(i'_2) = h'' \iota(i''_2)$. On a alors aussi :

$$f_1 = (\pi_1 h') p_{I'} = (\pi_1 h'') p_{I''} ,$$

$$(\pi_1 h') \iota(i'_1) = (\pi_1 h'') \iota(i''_1) ,$$

$$(\pi_1 h') \iota(i'_2) = (\pi_1 h'') \iota(i''_2) .$$

En utilisant la clause (3) pour C_1, il existe donc un objet I et deux flèches $i_1 : I \to I_1$ et $i_2 : I \to I_2$ tels que $i'_1 i_1 = i'_2 i_2$ et $i''_1 i_1 = i''_2 i_2$. On a donc bien la comparaison voulue entre les deux connexions précédentes. FIN DE LA PREUVE.

En rassemblant les acquis des lemmes 2 à 5, nous pouvons conclure :

THEOREME. *Soit* $\mathcal{A}$ *une catégorie. les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $\mathcal{A}$ *est accessible et possède les produits fibrés,*
- $\mathcal{A}$ *est esquissable par une esquisse* $\mathbf{E}$ *dans laquelle tout cône inductif distingué* $(q_I : \mathcal{B}(I) \to S)_{I \in \mathcal{I}^{op}}$ *vérifie :*
  - (i) *sa catégorie d'indexation* $\mathcal{I}^{op}$ *est fibrante,*
  - (ii) *si on a dans* $\mathcal{I}$ *quatre flèches* $i'_1 : I_1 \to I'$, $i'_2 : I_2 \to I'$, $i''_1 : I_1 \to I''$, $i''_2 : I_2 \to I''$, *sans qu'il existe de flèches* $i_1 : I \to I_1$ *et* $i_2 : I \to I_2$ *telles que* $i'_1 i_1 = i'_2 i_2$ *et* $i''_1 i_1 = i''_2 i_2$, *alors* $\mathbf{E}$ *contient des cônes projectifs distingués (d'indexation finie) et un cône inductif distingué (d'indexation vide) permettant de spécifier que le produit fibré :*

$$(\mathcal{B}(I') \times_{\mathcal{B}(I_1)} \mathcal{B}(I'')) \times_{\mathcal{B}(I') \times \mathcal{B}(I'')} (\mathcal{B}(I') \times_{\mathcal{B}(I_2)} \mathcal{B}(I''))$$

est vide.

Signalons que le problème, a priori analogue, consistant à caractériser les catégories accessibles possédant les produits de deux objets est résolu dans [Lair96]. Il est surprenant que, dans ce cas (comme dans ceux envisagés dans [Ageron95]), aucune contrainte syntaxique de "liberté" (du type de (ii)) ne soit nécessaire : il suffit d'une condition sur l'indexation I^{op} (qui doit être "tamisante").

4. Limites inductives libres et produits fibrés.

Convenons que l'expression *limite inductive libre* est une abréviation pour : limite inductive d'un foncteur libre. Voici un corollaire du LEMME 5 :

PROPOSITION 1. *Dans la catégorie* **Ens**, *les limites inductives libres commutent avec les produits fibrés.*

PREUVE. On adapte une idée présente dès [Guitart-Lair80]. Soit I une catégorie fibrante. Notons I^+ la catégorie obtenue en ajoutant un objet final à I et C la catégorie des cônes inductifs d'indexation I dans **Ens** : on identifiera C à Fonct(I^+,**Ens**). Alors C est localement petite et possède, en particulier, les produits fibrés. On dispose du plongement de Yoneda $Y : (I^+)^{op} \to C$, dont l'image est alors un cône projectif p dans C d'indexation cofibrante. Soit maintenant q un objet de C : il est classique (et facile à vérifier) que q valide p si et seulement si q est une limite inductive dans **Ens** . Il est alors clair que q valide *librement* p si et seulement si q est une limite inductive *libre*. En appliquant le LEMME 5, on obtient que la sous-catégorie pleine de C dont les objets sont les limites inductives libres est fermée dans C par produits fibrés. FIN DE LA PREUVE.

Le LEMME 2 indique que le résultat de la PROPOSITION 1 est, en un sens, le meilleur possible. Par ailleurs, il résulte des travaux de [Foltz81] sur la commutation des limites que :

PROPOSITION 2. *Soit* I *une petite catégorie telle que toutes les limites inductives d'indexation* I^{op} *commutent avec les produits fibrés dans* **Ens**. *Alors,* I *est pseudocofiltrante.*

PREUVE. On sait que I satisfait aux conditions (1) et (2') de [Foltz81]. Mais les zigzags qui interviennent dans (2') sont forcément triviaux ; il est donc clair que la conjonction de ces conditions signifie exactement que I^{op} est pseudocofiltrante. FIN DE LA PREUVE.

Il en résulte que les seules catégories cofibrantes I telles que tout foncteur $\iota : I^{op} \to$ **Ens** soit libre sont les catégories pseudocofiltrantes.