DIAGRAMMES

P. AGERON

Catégories accessibles à limites projectives non vides et catégories accessibles à limites projectives finies

Diagrammes, tome 34 (1995), p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1995__34__1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CATEGORIES ACCESSIBLES A LIMITES PROJECTIVES NON VIDES ET CATEGORIES ACCESSIBLES A LIMITES PROJECTIVES FINIES

P. Ageron

RÉSUMÉ

Soit β un cardinal régulier. Nous caractérisons comme catégories de modèles d'esquisses particulières les catégories β-accessibles possédant les limites projectives non vides ; nous en déduisons que ces catégories sont les objets d'une catégorie cartésienne fermée (les morphismes étant les foncteurs préservant les limites inductives β-filtrantes). Nous caractérisons aussi les catégories accessibles possédant les limites projectives finies (resp. non vides finies, resp. non vides connexes).

ZUSAMMENFASSUNG

Sei β eine reguläre Kardinalzahl. Diejenigen β-erreichbaren Kategorien, die alle nichtleeren Limites besitzen, werden als Modellkategorien besonderer Skizzen beschrieben. Daraus folgt, daß diese Kategorien die Objekte einer kartesischen abgeschlossenen Kategorie sind, deren Morphismen die β-filtrierende Kolimites erhaltenden Funktoren sind. Ähnlicherweise werden β-erreichbare Kategorien mit endlichen (bzw. nichtleeren endlichen, bzw. zusammenhängenden endlichen) Limites charakterisiert.

La partie 1 est, pour l'essentiel, la rédaction d'une idée de Christian Lair ; elle a fait l'objet d'un exposé par C. Lair et C. Henry à Paris (séminaire Catégories et Structures, 23 septembre 1995) et d'un par moi-même à Caen (Journée sur les Catégories, 11 janvier 1996).

La partie 2 a fait l'objet d'exposés par moi-même à Paris (séminaire Catégories et Structures, 13 octobre 1995), à Caen (Journée sur les Catégories, 11 janvier 1996) et (avec des développements ultérieurs) à Dunkerque (61ème PSSL, 9 juin 1996).

INTRODUCTION

Précisons quelques conventions de langage. Si $\mathbb{C}$ est une catégorie, l'expression « **diagramme** dans $\mathbb{C}$ » désigne tout foncteur d'une *petite* catégorie (appelée **indexation** du diagramme) vers $\mathbb{C}$. L'expression « $\mathbb{C}$ possède les limites projectives non vides » (resp. « finies ») signifie que tout diagramme dans $\mathbb{C}$ d'indexation non vide (resp. finie) admet une limite projective. Par abus de langage, on appellera « indexation d'un cône (projectif ou inductif) » l'indexation du diagramme qui lui sert de base.

Une **esquisse** $\mathbb{E}$ est (ici) une *petite catégorie* dans laquelle on distingue certains cônes projectifs et/ou inductifs ; un **modèle** de $\mathbb{E}$ est un foncteur de $\mathbb{E}$ vers **Ens** qui transforme ces cônes en cônes limite. Une catégorie est **esquissable** si elle est équivalente à la catégorie Mod($\mathbb{E}$) des modèles et transformations naturelles d'une certaine esquisse $\mathbb{E}$. Dans [Lair81] est fournie une caractérisation intrinsèque des catégories esquissables, qui sera rappelée plus bas (théorème 0). Sa démonstration repose sur les trois outils fondamentaux suivants (évidemment étroitement liés), introduits dans [Guitart-Lair80]. Dans ces définitions, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{C}$ sont deux catégories localement petites et $U : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ un foncteur.

DÉFINITION 1.— Soient $p = (p_I : S \to \iota(I))_{I \in \mathbf{I}}$ un cône projectif dans $\mathbb{C}$ et C un objet de $\mathbb{C}$. On dit que C **valide** p si et seulement si l'application canonique de $\varinjlim_{I \in \mathbf{I}^{op}} \mathrm{Hom}(\iota(I), C)$ dans $\mathrm{Hom}(S, C)$ est bijective.

DÉFINITION 2.— Soient C un objet de $\mathbb{C}$, $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$ un diagramme dans $\mathbb{A}$ et $\eta = (\eta_L : C \to U(\lambda(L)))_{L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{L})}$ une famille de flèches dans $\mathbb{C}$. On dit que λ est un **diagramme localement libre** engendré par C si et seulement si pour tout objet A de $\mathbb{A}$, l'application canonique de $\varinjlim_{L \in \mathbf{L}^{op}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\lambda(L), A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, U(A))$ est bijective.

DÉFINITION 3.— Soient $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{A}$, $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$ deux diagrammes et $t = (t_{D,L} : \delta(D) \to \lambda(L))_{D \in \mathbf{D}, L \in \mathbf{L}}$ un « tronc de cône » inductif dans $\mathbb{A}$. On dit que λ est un **diagramme localement limite inductive** pour δ si et seulement si, pour tout objet A de $\mathbb{A}$, l'application canonique de $\varinjlim_{L \in \mathbf{L}^{op}} \mathrm{Hom}(\lambda(L), A)$ dans $\varprojlim_{D \in \mathbf{D}^{op}} \mathrm{Hom}(\delta(D), A)$ est bijective.

REMARQUES.— Compte tenu du calcul des limites inductives dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$, il est possible de donner une forme plus concrète à ces définitions : ainsi, par exemple, dire que λ est un diagramme localement libre engendré par C (définition 2) signifie que toute flèche de C vers un $U(A)$ factorise à travers au moins un objet de la forme $\lambda(L)$ (avec L objet de $\mathbb{L}$), et que s'il factorise à la fois à travers $\lambda(L)$ et $\lambda(L')$, il existe dans $\mathbb{L}$ un zigzag reliant L et L' permettant de connecter ces deux factorisations. On peut alors noter comme dans [Guitart86] que, pour C donné, son diagramme localement libre λ est déterminé à isomorphisme près dans la catégorie dont les objets sont les diagrammes dans $\mathbb{C}$ et dont les flèches sont les « atlas ». Malheureusement, la notion d'isomorphie dans cette catégorie est si faible que cette remarque est rarement utile : en particulier l'indexation $\mathbb{L}$ de λ n'est pas déterminée à isomorphisme de catégories près. Signalons que dans [Lair83] sont présentés quatre « cas d'unicité », c'est-à-dire quatre catégories de diagrammes très particuliers dans lesquelles l'isomorphie des diagrammes implique l'isomorphie des indexations.

Voici la caractérisation obtenue par Lair :

THÉORÈME 0.— *Une catégorie localement petite $\mathbb{A}$ est esquissable si et seulement si il existe un cardinal régulier β tel que :*

(*a*) *$\mathbb{A}$ possède les limites inductives β-filtrantes ;*

(*b*) *sa sous-catégorie pleine $\mathbb{A}_\beta$ constituée des objets β-présentables est*

— *essentiellement petite (1)*

— *dense dans $\mathbb{A}$;*

(*c*) *pour tout objet A de $\mathbb{A}$, la catégorie $\mathbb{A}_\beta/A$ est β-filtrante.*

Suivant un usage qui s'est répandu, on dira, lorsque $\mathbb{A}$ et β vérifient les clauses (*a*), (*b*) et (*c*), que $\mathbb{A}$ est **β-accessible**. Il n'est pas question ici de redonner la démonstration complète du théorème de Lair, mais il sera nécessaire cependant d'en indiquer les grandes lignes. Le lemme suivant, essentiel, montre l'intérêt de la notion de diagramme localement limite inductive dans la théorie des catégories accessibles.

LEMME 0.— *Dans le théorème 0, la clause (c) est équivalente à :*

(c') tout diagramme d'indexation β-petite à valeurs dans $\mathbb{A}_\beta$ admet un diagramme localement limite inductive dans $\mathbb{A}$, à valeurs dans $\mathbb{A}_\beta$.

DÉMONSTRATION.— (c) $\Rightarrow$ (c') Soit δ un diagramme β-petit dans $\mathbb{A}_\beta$. Notons $\mathbb{L}$ la (petite) catégorie $\underrightarrow{\mathrm{Cône}}_\beta(\delta)$ dont les objets sont les cônes inductifs de base δ dont le sommet est dans $\mathbb{A}_\beta$, et λ le foncteur de $\mathbb{L}$ dans $\mathbb{A}$ qui envoie chaque cône inductif sur son sommet. Il est facile de vérifier que λ est un diagramme localement limite inductive pour δ (que l'on qualifiera de *canonique*).

(1) Dans la suite, on notera abusivement $\mathbb{A}_\beta$ toute catégorie petite qui lui est équivalente.

$(c') \Rightarrow (c)$ Soit $(f_I : A_I \to A)_{I\in\mathbb{I}}$ un diagramme d'indexation β-petite à valeurs dans $\mathbb{A}_\beta/A$. Le diagramme $(A_I)_{I\in\mathbb{I}}$ admet dans $\mathbb{A}$ un diagramme localement limite inductive $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}_\beta$. Le cône inductif constitué par les f_I factorise donc à travers au moins l'un des $\lambda(L)$, ce qui fournit un cône inductif de base $(f_I)_{I\in\mathbb{I}}$ dans $\mathbb{A}_\beta/A$.

Ceci acquis, voici un résumé des constructions de [Lair81], légèrement modernisées dans l'esprit de [Lair87] :

— si l'on part d'une catégorie β-accessible $\mathbb{A}$, on construit en agrandissant $\mathbb{A}_\beta^{op}$ une esquisse $\mathbf{E}$ dans laquelle les indexations des cônes projectifs distingués sont β-petites et les indexations des cônes inductifs distingués sont les duales de celles des diagrammes localement limite inductive (canoniques ou non) du lemme 0 ;

— si l'on part d'une esquisse $\mathbb{E}$ et si l'on note $\mathbb{E}^-$ l'esquisse projective sous-jacente (obtenue en oubliant les cônes inductifs), on vérifie d'abord que Mod($\mathbb{E}$) est la sous-catégorie pleine de la catégorie Mod($\mathbb{E}^-$) dont les objets sont ceux qui y valident les cônes projectifs de la forme $Y(q)$, où $Y : \mathbf{E}^- \to$ Mod($\mathbb{E}^{-op}$) est le comodèle canonique et où q est un cône inductif distingué de $\mathbf{E}$. Ensuite, en choisissant β *suffisamment grand*, on montre que tout diagramme β-petit δ à valeurs dans Mod$(\mathbb{E})_\beta$ admet un diagramme localement limite inductive dans Mod($\mathbb{E}$), à valeurs dans Mod$(\mathbb{E})_\beta$, obtenu en calculant d'abord la limite inductive L de δ dans Mod($\mathbb{E}^-$), puis en construisant par une récurrence transfinie le diagramme localement libre engendré par L (en « forçant » L à valider les cônes projectifs précédents de toutes les façons possibles).

Le but du présent travail est de caractériser en termes d'esquisses :

(1) les catégories accessibles possédant les limites projectives non vides
(telles que, par exemple, la catégorie des anneaux de caractéristique nulle) ;

(2) les catégories accessibles possédant les limites projectives finies
(telles que, par exemple, la catégorie des anneaux de caractéristique non nulle).

Ces deux problèmes ont été suscités respectivement par [Adámek95] et par [Solian-Viswanathan90], mais le lecteur constatera que nos démonstrations ne sont que des *adaptations* à des situations particulières de celles de [Lair81]. Elles mettront en évidence l'ubiquité et la souplesse des concepts de diagramme localement libre et localement limite inductive. Plus précisément, elles fourniront deux nouveaux exemples de classes **localement librement co-stables** : on appelle ainsi toute classe $\mathbf{X}$ de cônes inductifs telle que, si tous les cônes inductifs distingués d'une esquisse $\mathbb{E}$ sont éléments de $\mathbf{X}$, alors tout modèle de $\mathbb{E}^-$ engendre un diagramme localement libre dans Mod($\mathbb{E}$) dont l'indexation, augmentée d'un objet initial, est duale d'un élément de $\mathbf{X}$. (Pour la théorie des classes localement librement co-stables, voir l'appendice de [Lair87].)

1. CATÉGORIES ACCESSIBLES À LIMITES PROJECTIVES NON VIDES

THÉORÈME 1.— *Soit* $\mathbb{A}$ *une catégorie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
— $\mathbb{A}$ est β-accessible et possède les limites projectives non vides ;
— $\mathbb{A}$ est esquissable par une esquisse dans laquelle tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation β-petite et tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation vide [ou isomorphe à $\mathbf{1}$*].*

Si une esquisse a des cônes inductifs d'indexation isomorphe à $\mathbf{1}$, on peut évidemment les éliminer sans modifier la catégorie des modèles ; cependant, comme c'est la classe des cônes inductifs d'indexation vide *ou* isomorphe à $\mathbf{1}$ qui va s'avérer librement co-stable, il paraît préférable de mentionner, dans l'énoncé du théorème 1, ces cônes inutiles.

LEMME 1.1.— *Si $\mathbb{A}$ est β-accessible et possède les limites projectives non vides, alors tout diagramme β-petit dans $\mathbb{A}_\beta$ admet un diagramme localement limite inductive dans $\mathbb{A}$, indexé par la catégorie vide ou par la catégorie* $\mathbf{1}$ *et à valeurs dans $\mathbb{A}_\beta$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.1.— Soit δ un diagramme β-petit dans $\mathbb{A}_\beta$. On sait que δ admet le diagramme localement limite inductive canonique $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}_\beta$, où $\mathbb{L} = \underrightarrow{\text{Cône}}_\beta(\delta)$. Cela revient à dire que $\mathbb{L}$ est une sous-catégorie initiale de la catégorie $\underrightarrow{\text{Cône}}(\delta)$ de tous les cônes inductifs de base δ. Deux cas se présentent naturellement. Premier cas : $\mathbb{L}$ est vide. Cela se produit si et seulement si $\underrightarrow{\text{Cône}}(\delta)$ est vide. Deuxième cas : $\mathbb{L}$ est non vide. Alors $L = \underleftarrow{\text{Lim}}\,\lambda$ existe dans $\mathbb{A}$, ce qui crée une limite projective pour le diagramme $\text{id}_{\mathbb{L}}$. Mais puisque $\mathbb{L}$ est initiale dans $\underrightarrow{\text{Cône}}(\delta)$, la limite projective de $\text{id}_{\mathbb{L}}$ est aussi, par un lemme classique, celle de $\text{id}_{\underrightarrow{\text{Cône}}(\delta)}$; c'est donc, par un autre lemme classique, un objet initial de $\underrightarrow{\text{Cône}}(\delta)$, ce qui n'est rien d'autre qu'une limite inductive de δ. Il en résulte que L est isomorphe à un objet de $\mathbb{A}_\beta$, puisque (encore un lemme classique) toute limite inductive β-petite d'objets β-présentables est β-présentable.

LEMME 1.2.— *Si $\mathbb{A}$ est β-accessible et si tout diagramme β-petit dans $\mathbb{A}_\beta$ admet un diagramme localement limite inductive dans $\mathbb{A}$, indexé par la catégorie vide ou par la catégorie* $\mathbf{1}$ *et à valeurs dans $\mathbb{A}_\beta$, alors $\mathbb{A}$ est esquissable par une esquisse dans laquelle tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation β-petite et tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation vide [ou isomorphe à* $\mathbf{1}$*].*

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.2.— Il suffit de reprendre le procédé général de construction d'une esquisse associée à une catégorie accessible.

LEMME 1.3.— *Soit* $\mathbb{E}$ *une esquisse dans laquelle tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation* β*-petite et tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation vide [ou isomorphe à* $\mathbf{1}$*]. Alors la catégorie* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *est* β*-accessible.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.3.— On peut supposer que les seuls cônes inductifs distingués sont d'indexation vide. On va vérifier successivement les clauses (a), (c') et (b). La clause (a) résulte de la commutation dans **Ens** entre limites inductives β-filtrantes et limites projectives β-petites. Montrons ensuite (c'). Soit δ un diagramme d'indexation β-petite à valeurs dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_\beta$: admet-il un diagramme localement limite inductive dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$, à valeurs β-présentables ? Comme il est rappelé plus haut, on commence par calculer dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}^-)$ la limite inductive $L = \varinjlim(\delta)$. Parmi les modèles de $\mathbb{E}^-$, les modèles de $\mathbb{E}$ sont ceux qui valident les cônes projectifs de la forme $Y(q)$ (q distingué dans $\mathbb{E}$), autrement dit, les bases des cônes étant vides, ceux qui ne sont but d'aucune flèche partant des sommets. Il en résulte que si L n'est pas modèle de $\mathbb{E}$, δ ne sera base d'aucun cône inductif dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$: on peut prendre comme diagramme localement limite inductive pour δ soit le diagramme d'indexation $\mathbf{1}$ réduit à L, soit le diagramme d'indexation vide. Dans les deux cas, ce diagramme est bien à valeurs β-présentables ; on a donc établi (c'), et donc aussi (c) : pour tout modèle M de $\mathbb{E}$, la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_\beta/M$ est β-filtrante.

Terminons alors par (b) : il s'agit, un modèle M de $\mathbb{E}$ étant fixé, de montrer que le foncteur canonique de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_\beta/M$ vers $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ admet M pour limite inductive. La théorie classique des esquisses projectives enseigne que le comodèle canonique $Y^{op} : \mathbb{E}^{-op} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}^-)$ est dense et à valeurs β-présentables dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}^-)$, donc aussi dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$. Or on voit facilement qu'il ne peut exister de flèche de $Y(E)$ vers M (E étant un objet de $\mathbb{E}$) que si $Y(E)$ est lui-même modèle de $\mathbb{E}$. On obtient donc que M est limite inductive canonique d'un diagramme dont l'indexation est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_\beta/M$. En saturant cette indexation par limites inductives β-petites, on obtient un diagramme $\sigma : \mathbf{S} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ dont l'indexation est, d'après un lemme classique, β-filtrante et finale dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_\beta/M$, et dont la limite inductive est encore M. Par un autre lemme classique, ceci prouve que le diagramme $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_\beta/M \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ admet M pour limite inductive.

LEMME 1.4.— *Si* p *est un cône projectif d'indexation vide dans une catégorie* $\mathbb{C}$*, toute limite projective non vide d'objets qui valident* p *valide encore* p*.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.4.— En effet, si la limite projective ne validait pas p, il serait possible de choisir une projection et d'en déduire qu'au moins un des objets du diagramme de départ ne valide pas p.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.— L'implication directe résulte immédiatement des lemmes 1.1. et 1.2. L'implication réciproque résulte du lemme 1.3. et de l'application du lemme 1.4. à la catégorie $\mathbb{C} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E}^-)$.

REMARQUES.— Il est clair que les catégories β-accessibles possédant les limites projectives non vides sont exactement les catégories β-accessibles *conditionnellement cocomplètes*, c'est-à-dire où tout diagramme qui est la base d'au moins un cône inductif admet une limite inductive. Ce sont donc exactement (lorsque $\beta = \aleph_0$) les « Scott-complete categories » étudiées dans [Adámek95], mais déjà considérées dans [Taylor90]. Cette classe de catégories β-accessibles est intermédiaire entre celle des catégories localement β-présentables ([Gabriel-Ulmer71]) et celle des catégories localement β-multiprésentables ([Diers80]). On peut aussi la caractériser comme la classe des catégories localement β-polyprésentables ([Lamarche88]) possédant les produits binaires.

Citons comme exemples représentatifs :

— la catégorie des anneaux de caractéristique n (n entier naturel fixé) ;

— la catégorie des G-ensembles sans point fixe (G groupe fixé).

Pour chacun de ces deux exemples, il est d'ailleurs facile de construire une esquisse ayant la forme annoncée dans le théorème 1 (on a besoin d'y spécifier que certains noyaux sont vides).

L'intérêt d'une caractérisation syntaxique comme celle fournie par le théorème 1 est de permettre la mise en œuvre des outils « classiques » de la théorie des esquisses ; à titre d'exemple, signalons qu'on retrouve aisément le résultat principal de [Adámek95] :

COROLLAIRE 1.— *La catégorie dont les objets sont les catégories β-accessibles conditionnellement cocomplètes et dont les flèches sont les foncteurs préservant les limites inductives β-filtrantes est cartésienne fermée.*

DÉMONSTRATION.— Il suffit d'appliquer le théorème 4.3. de [Ageron92] : en effet, la classe des esquisses dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation β-petite et tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation vide satisfait manifestement les hypothèses de ce théorème.

2. CATÉGORIES ACCESSIBLES À LIMITES PROJECTIVES FINIES

THÉORÈME 2.— *Soit $\mathbb{A}$ une catégorie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

— $\mathbb{A}$ est accessible et possède les limites projectives finies ;

— $\mathbb{A}$ est esquissable par une esquisse dont tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation filtrante.

La démonstration résultera de trois lemmes.

LEMME 2.1.— *Si $\mathbb{A}$ est β-accessible et possède les limites projectives finies, alors tout diagramme β-petit dans $\mathbb{A}_\beta$ admet un diagramme localement limite inductive dans $\mathbb{A}$, indexé par une catégorie cofiltrante et à valeurs dans $\mathbb{A}_\beta$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.1.— Soit δ est un diagramme β-petit dans $\mathbb{A}_\beta$. On sait que δ admet le diagramme localement limite inductive canonique $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}_\beta$, où $\mathbb{L} = \underrightarrow{\text{Cône}}_\beta(\delta)$. Cela revient à dire que $\mathbb{L}$ est une sous-catégorie initiale de la catégorie $\underrightarrow{\text{Cône}}(\delta)$ de tous les cônes inductifs de base δ. On va montrer que $\mathbb{L}$ est cofiltrante. Soit en effet $(q_I : \delta(D) \to A_I)_{D\in\mathbf{D}, I\in\mathbf{I}}$ un diagramme dans $\mathbb{L}$ d'indexation finie. Alors la limite projective $A = \underleftarrow{\text{Lim}}_{I\in\mathbf{I}} A_I$ existe et crée une limite projective $q = \underleftarrow{\text{Lim}}_{I\in\mathbf{I}} q_I$ dans $\underrightarrow{\text{Cône}}(\delta)$. Mais $\mathbb{L}$ étant initiale dans $\underrightarrow{\text{Cône}}(\delta)$, il existe au moins un objet q_0 de $\mathbb{L}$ et une flèche de q_0 vers q dans $\underrightarrow{\text{Cône}}(\delta)$. Par composition, on obtient un cône inductif $(q_0 \to q_I)_{I\in\mathbf{I}}$ dans $\mathbb{L}$. (En comparant cette démonstration à celle du lemme 1.1., on constatera que l'on n'a pas eu besoin ici de modifier l'indexation des diagrammes localement limite inductive.)

LEMME 2.2.— *Si $\mathbb{A}$ est β-accessible et si tout diagramme β-petit dans $\mathbb{A}_\beta$ admet un diagramme localement limite inductive dans $\mathbb{A}$, indexé par une petite catégorie cofiltrante, à valeurs dans $\mathbb{A}_\beta$, alors $\mathbb{A}$ est esquissable par une esquisse dans laquelle tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation β-petite et tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation filtrante.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.2.— Il suffit de répéter le procédé général de construction d'une esquisse associée à une catégorie accessible.

LEMME 2.4.— *Si p est un cône projectif d'indexation cofiltrante dans une catégorie $\mathbb{C}$, toute limite projective finie d'objets qui valident p valide encore p.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.4.— Posons $p = (p_I : S \to \iota(I))_{I\in\mathbf{I}}$ (où $\mathbb{I}$ est une petite catégorie cofiltrante). Soient $\mathbb{D}$ une catégorie finie et $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ un diagramme d'objets qui valident p. Supposons que la limite projective C de δ existe et vérifions que C valide aussi p. On a successivement :

$\text{Hom}(S, C) = \text{Hom}(S, \underleftarrow{\text{Lim}}_{D\in\mathbf{D}}\, \delta(D))$

$\cong \underleftarrow{\text{Lim}}_{D\in\mathbf{D}}\, \text{Hom}(S, \delta(D))$

$\cong \underleftarrow{\text{Lim}}_{D\in\mathbf{D}}\, \underrightarrow{\text{Lim}}_{I\in\mathbf{I}^{op}}\, \text{Hom}(\iota(I), \delta(D))$

$\cong \underrightarrow{\text{Lim}}_{I\in\mathbf{I}^{op}}\, \underleftarrow{\text{Lim}}_{D\in\mathbf{D}}\, \text{Hom}(\iota(I), \delta(D))$ (puisque $\mathbb{D}$ est finie et $\mathbb{I}^{op}$ filtrante, on peut utiliser la commutation dans Ens entre limites projectives finies et inductives filtrantes)

$\cong \underrightarrow{\text{Lim}}_{I\in\mathbf{I}^{op}}\, \text{Hom}(\iota(I), \underleftarrow{\text{Lim}}_{D\in\mathbf{D}}\, \delta(D))$

$= \underrightarrow{\text{Lim}}_{I\in\mathbf{I}^{op}}\, \text{Hom}(\iota(I), C)$. .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.— L'implication directe résulte immédiatement des lemmes 2.1. et 2.2. L'implication réciproque résulte du théorème 0 et de l'application du lemme 2.4. à la catégorie $\mathbb{C} = \text{Mod}(\mathbb{E}^-)$.

REMARQUES.— Il est clair que les catégories β-accessibles possédant les limites projectives finies sont exactement les catégories β-accessibles où tout diagramme admet un diagramme localement limite inductive d'indexation cofiltrante. De même, un foncteur $U : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ entre deux telles catégories préserve les limites projectives finies si et seulement si tout objet de $\mathbb{C}$ engendre un diagramme localement libre dans $\mathbb{A}$ d'indexation cofiltrante. L'exemple classique, déjà considéré dans [Guitart-Lair80], est celui où $\mathbb{A}$ est la catégorie des anneaux de caractéristique non nulle et U le foncteur d'oubli vers la catégorie de tous les anneaux. Dans la terminologie de [SGA4], cela revient à dire que U admet un *proadjoint*, notion qui se trouve ainsi complètement explicitée. L'article [Solian-Viswanathan90] retrouve d'ailleurs ce lien entre préservation des limites projectives finies et existence de diagrammes localement libres d'indexation cofiltrante (cependant, les auteurs ne font référence ni à [SGA4], ni à [Guitart-Lair80], et rebaptisent *pluriadjoints* les classiques proadjoints).

Par des démonstrations analogues à celle du théorème 2, il est facile d'établir :

THÉORÈME 3.— *Soit $\mathbb{A}$ une catégorie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
— $\mathbb{A}$ est accessible et possède les limites projectives non vides finies ;
— $\mathbb{A}$ est esquissable par une esquisse dont tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation vide ou filtrante.

THÉORÈME 4.— *Soit $\mathbb{A}$ une catégorie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
— $\mathbb{A}$ est accessible et possède les limites projectives connexes finies ;
— $\mathbb{A}$ est esquissable par une esquisse dont tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation pseudofiltrante (au sens de [SGA4]*).*

Contrairement au cas du théorème 1, on ne peut pas, dans les théorèmes 2 à 4, contrôler le « rang » d'accessibilité de Mod($\mathbb{E}$) à partir de la taille des cônes projectifs distingués de $\mathbb{E}$. Il ne semble donc pas possible d'établir de résultats analogues au corollaire 1.

Signalons pour finir que la caractérisation des catégories accessibles possédant les produits fibrés (finis) est plus délicate : elle a fait l'objet d'un exposé au 61$^{\text{ème}}$ PSSL (Dunkerque, 9 juin 1996) et sera intégrée à un article ultérieur.

BIBLIOGRAPHIE

[Adámek95] J. ADÁMEK, *From Scott domains to Scott-complete categories*, résumé d'une conférence donnée au Cambridge Summer Meeting in Category Theory le 7 août 1995 (2 pages)

[Ageron92] P. AGERON, *The logic of structures*, Journal of Pure and Applied Algebra 79 (1992) 15-34

[Diers80] Y. DIERS, *Catégories localement multiprésentables*, Archiv der Mathematik 34 (1980) 344-356

[Gabriel-Ulmer71] P. GABRIEL und F. ULMER, *Lokal präsentierbare Kategorien*, Lecture Notes in Mathematics 221 (Springer, 1971)

[Guitart-Lair80] R. GUITART et C. LAIR, *Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes*, Diagrammes 4 (1980) 1-106

[Guitart86] R. GUITART, *On the geometry of computations*, Cahiers de Topologie et de Géométrie Différentielle Catégoriques XXVII (1986) 107-136

[Lair81] C. LAIR, *Catégories modelables et catégories esquissables*, Diagrammes 7 (1981) L1-L20

[Lair83] C. LAIR, *Diagrammes localement libres, extensions de corps et théorie de Galois*, Diagrammes 10 (1983) L1-L17

[Lair87] C. LAIR, *Catégories qualifiables et catégories esquissables*, Diagrammes 17 (1987) 1-153

[Lamarche88] F. LAMARCHE, *Modelling polymorphism with categories*, thesis, McGill University, Montréal, 1988

[SGA4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics 269 (Springer, 1972)

[Solian-Viswanathan90] A. SOLIAN and T.M. VISWANATHAN, *Pluriadjoints and the preservation of finite limits*, Journal of Pure and Applied Algebra 65 (1990) 69-90

[Taylor90] P. TAYLOR, *Locally finitely polypresentable categories*, manuscript, Imperial College, London, 1990

Pierre AGERON, Département de Mathématiques, Université de Caen,
14032 Caen Cedex, France
ageron@math.unicaen.fr