DIAGRAMMES

L. COPPEY

Catégories de Peano et catégories algorithmiques, récursivité

Diagrammes, tome 12 (1984), exp. nº 1, p. LC1-LC47
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1984__12__A1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Vol.12, 1984.

A.M.S. Sub. Class.
18 A 99 , 18 B 99,
18 C 99.

CATEGORIES DE PEANO et CATEGORIES ALGORITHMIQUES

RECURSIVITE

par

L.COPPEY

Les classes usuelles de fonctions récursives (au moins primitives) fournissent "évidemment" des exemples typiques pour ce qui va suivre (voir § 3 par exemple). Il nous semble toutefois que les procédés classiques (particuliers et généraux) de l'algèbre ont été quelque peu négligés par les "récurseurs" (au profit d'autres points de vue...). Notre intention, ici, est donc de donner quelques définitions et quelques résultats de nature bien algébrique, destinés à suggérer, sur des exemples relativement simples, que l'algèbre des catégories a certainement un rôle à tenir en matière de récursivité. Nous ne prétendons pas, pour l'instant, rentrer dans toutes les subtilités usuelles concernant les fonctions ou les fonctionnelles récursives. Dans un autre ordre d'idées on pourra se reporter aussi à (R.E.C.S.) et à (U.S.R.U.) pour des approches catégoriques des fondements de la récursivité. A l'origine de cet article, il y a une question d'A.Burroni concernant la triplabilité des catégories de Peano sur les graphes; la réponse à cette question est donnée en (A.M.E.N.) et est seulement suggérée ici. Les quatre parties du texte sont relativement indépendantes. C'est, à notre avis, la dernière (engendrements par structures partielles de plus en plus totales...) qui tient la place la plus importante.

I. CATEGORIES DE PEANO.

Soit $\underline{C}$ une catégorie et soit C un objet de $\underline{C}$.

<u>Définition 1.</u> Un <u>objet de Peano engendré par</u> C , dans $\underline{C}$, est constitué d'un triplet (NC, i_C, s_C) , où

- NC est un objet de $\underline{C}$,
- i_C est une flèche de $\underline{C}$, de source C et de but NC ,
- s_C est une flèche de $\underline{C}$, fermée en NC ,

ce triplet devant satisfaire la propriété universelle suivante: quel que soit le triplet (C', f, t) où

- C' est un objet de $\underline{C}$,
- f est une flèche de $\underline{C}$, de source C et de but C' ,
- t est une flèche de $\underline{C}$, fermée en C' ,

il existe une unique flèche $\bar{f} = [f,t]$ telle que :

$$\bar{f}.i_C = f \quad \text{et} \quad \bar{f}.s_C = t.\bar{f} \quad .$$

<u>Remarques.</u>

(i) Soit $\underline{1}$ la catégorie à un seul objet, noté 0, une seule flèche Id_0 ; soit $\underline{N}$ la catégorie libre engendrée par le graphe suivant : $\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop right, "\sigma"] \end{tikzcd}$; soit $u : \underline{1} \longrightarrow \underline{N}$ l'unique foncteur possible défini par $u(0) = 0$. Alors, un objet de Peano engendré par C s'identifie naturellement à une extension de Kan inductive de $\tilde{C} : \underline{1} \longrightarrow \underline{C}$ le long de $u : \underline{1} \longrightarrow \underline{N}$, où $\tilde{C}(0) = C$.

$$\begin{tikzcd} \underline{1} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\tilde{C}"'] & & \underline{N} \arrow[dl, "\tilde{C}'"] \arrow[dl, bend right, "i"'] \\ & \underline{C} & \end{tikzcd}$$

$$\tilde{C}'(0) = NC \ , \quad \tilde{C}'(\sigma) = s_C \ , \quad i(0) = i_C \ .$$

(ii) La terminologie est suggérée par l'exemple classique : si X est un ensemble, alors $(\mathbb{N}.X, i_X, s_X)$ est un objet de

Peano engendré par X , dans $\underline{Ens}$, où on a posé:

$$i_X(x) = (x,0) \quad \text{et} \quad s_X(x,n) = (x,n+1) .$$

<u>Définition 2</u>. On dit que $\underline{C}_\sigma = (\underline{C}, i, s)$ est une <u>catégorie de Peano</u> si l'on s'est donné, pour chaque objet C de $\underline{C}$, un objet de Peano (NC, i_C, s_C) engendré par C .

Soit $\underline{C}_\sigma = (\underline{C}, i, s)$ une catégorie de Peano. Si f est une flèche de $\underline{C}$, de source C et de but C' , on pose : $Nf = [i_{C'}.f , s_{C'}]$; c'est l'unique flèche de $\underline{C}$ telle que:

$$Nf.i_C = i_{C'}.f \quad \text{et} \quad Nf.s_C = s_{C'}.Nf .$$

Ainsi, N détermine un endofoncteur de $\underline{C}$ et $i : Id_{\underline{C}} \longrightarrow N$ et $s : N \longrightarrow N$ sont des transformations naturelles.
Si C est un objet de $\underline{C}$, on pose encore $\mu_C = [Id_{NC}, s_C]$; c'est l'unique flèche de $\underline{C}$ telle que :

$$\mu_C.i_{NC} = Id_{NC} \quad \text{et} \quad \mu_C.s_{NC} = s_C.\mu_C .$$

Dans l'exemple (ii), on voit que :

$$\mu_X(x, n, m) = (x, n+m) .$$

On vérifie sans difficulté particulière les points suivants:
- μ est une transformation naturelle de N^2 vers N ,
- $\bar{N} = (N, i, \mu)$ est un triple dans $\underline{C}$,
- μ et s commutent, dans ce sens que $\mu.s_N = s.\mu$,
- $(N\ Id_{\underline{C}}, i,s)$ est un objet de Peano dans la catégorie $\underline{C}^{\underline{C}}$.

Plus généralement d'ailleurs, si $\underline{D}$ est une catégorie quelconque, $\underline{C}^{\underline{D}}$ est naturellement munie d'une structure de catégorie de Peano déduite de $\underline{C}_\sigma = (\underline{C}, i, s)$; c'est la structure suivante: $\underline{C}^{\underline{D}}_\sigma = (\underline{C}^{\underline{D}}, i^{\underline{D}}, s^{\underline{D}})$, où pour tout objet F de $\underline{C}^{\underline{D}}$ et tout objet D de $\underline{D}$, on a posé : $i^{\underline{D}}_F(D) = i_{F(D)}$ et $s^{\underline{D}}_F(D) = s_{F(D)}$.

. L'ensemble des $\bar{N}$-algèbres sur un objet C s'identifie naturellement à $End(C)$, de la manière suivante:
à une $\bar{N}$-algèbre θ sur C correspond l'élément $\theta.s_C.i_C$ de $End(C)$, et inversement, à l'élément v de $End(C)$ correspond la $\bar{N}$-algèbre sur C définie par $\theta = [Id_C, v]$.
On peut dire, de manière équivalente, que l'évaluation en 0, soit $V_0 : \underline{C}^{\underline{N}} \longrightarrow \underline{C}$, a un adjoint à gauche $S : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}^{\underline{N}}$ défini par $S(C)(\sigma) = s_C$ et que V_0 est triplable .
Ce n'est alors qu'un cas particulier de la situation suivante:

soit $\varphi : \underline{I} \longrightarrow \underline{J}$ un foncteur bijectif sur les objets. Supposons que le foncteur $\underline{C}^{\varphi} : \underline{C}^{\underline{J}} \longrightarrow \underline{C}^{\underline{I}}$ de composition par φ ait un adjoint à gauche L , et soit $\bar{T} = (T, i, \mu)$ le triple dans $\underline{C}^{\underline{I}}$ qui s'en déduit ; alors $\underline{C}^{\varphi}$ est triplable ; de plus, si $\theta : TF \longrightarrow F$ est une $\bar{T}$-algèbre sur F , la structure de prolongement F_θ de F à $\underline{J}$, correspondant à θ , est définie ainsi :
pour $j: I \longrightarrow I'$, on a : $F_\theta(j) = \theta_{I'}.(LF)(j).i_{F,I}$.

Voici encore le point de vue des $\underline{D}$-algèbres. Soit $\underline{C}$ une catégorie ; soit $\underline{D}$ le graphe multiplicatif trivial obtenu en attachant à chaque objet C de $\underline{C}$ une boucle formelle α_C , sans aucune équation particulière. Alors une $\underline{D}$-algèbre sur C s'identifie naturellement à un élément v de $End(C)$, et un homomorphisme entre $\underline{D}$-algèbres à un triplet (v', f, v) tel que $f.v = v'.f$. La catégorie des $\underline{D}$-algèbres est isomorphe à $\underline{C}^{\underline{N}}$ et son oubli naturel vers $\underline{C}$ est isomorphe à V_0 . Dire que cet oubli a un adjoint à gauche revient exactement à dire que $\underline{C}$ peut être muni d'une structure de catégorie de Peano . Si tel est le cas, on sait (cf. proposition n°1, page 28 de (T.A.E.P.), ou la version postérieure de cette même proposition, page 17 de (S.B.D.S.)) que V_0 est triplable à l'isomorphisme près.

Remarque. On ne confondra pas une catégorie de Peano avec un objet catégorie de Peano dans $\underline{Cat}$, d'autant plus que nous avons vu que , si $(\underline{C}\ ,\ i,\ s)$ est une catégorie de Peano, alors $(N\,Id_{\underline{C}},\ i,\ s)$ est un objet de Peano dans $\underline{C}^{\underline{C}}$ engendré par $Id_{\underline{C}}$. Un objet de Peano dans $\underline{Cat}$, engendré par $\underline{C}$, est la donnée du triplet $(\mathbb{N}.\underline{C}\ ,\ i_{\underline{C}},\ s_{\underline{C}})$ dans lequel $\mathbb{N}.\underline{C}$ désigne la somme de $\mathbb{N}$ copies de la catégorie $\underline{C}$, $i_{\underline{C}}$ est l'injection canonique définie par $i_{\underline{C}}(f) = (f,0)$ et $s_{\underline{C}}$ est l'endofoncteur défini par $s_{\underline{C}}(f,n) = (f,n+1)$.

Plus généralement, si $\underline{K}$ est une catégorie à sommes dénombrables (cf. par ex. : $\underline{Ens}$ et $\underline{Cat}$) les extensions de Kan le long de $u : \underline{1} \longrightarrow \underline{N}$ se calculent point par point, ce qui signifie que tout objet K de $\underline{K}$ engendre un objet de Peano $(\mathbb{N}.K\ ,\ i_K,\ s_K)$ trivial, où $\mathbb{N}.K$ est la somme $\mathbb{N}$ copies de K , et si $(i_n)_{n \geqslant 0}$ désigne la famille des coprojections de K vers $\mathbb{N}.K$, alors $i_K = i_0$ et s_K n'est autre que le crochet de la famille $(i_n)_{n \geqslant 1}$, i.e. l'unique flèche telle que $s_K.i_n = i_{n+1}.s_K$.

Définition 3. Un foncteur de Peano est un homomorphisme entre catégories de Peano , c'est-à-dire un foncteur préservant les objets de Peano choisis.

Donc, si $\underline{C}_\sigma = (\underline{C}\ ,\ i,\ s)$ et $\underline{C}'_\sigma = (\underline{C}',\ i',\ s')$ sont deux catégories de Peano, $F_\sigma : \underline{C}_\sigma \longrightarrow \underline{C}'_\sigma$ est un foncteur de Peano si et seulement si $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est un foncteur, et pour tout objet C de $\underline{C}$, on a les égalités suivantes :

$$i'_{F(C)} = F(i_C) \quad \text{et} \quad s'_{F(C)} = F(s_C)\ .$$

Dans ce cas, si C est un objet de $\underline{C}$ et si (f,t) est un couple de flèches ainsi dispodées : $C \xrightarrow{f} D \circlearrowleft t$, on voit que $F([f,t]) = [F(f),F(t)]$, par unicité du crochet .

En particulier, F commute avec les endofoncteurs N et N' sous-jacents à $\underline{C}_\sigma$ et $\underline{C}'_\sigma$.

Nous désignons par $\underline{Cat}_\Sigma$ la catégorie ayant pour objets les catégories de Peano et pour morphismes les foncteurs de Peano. Le foncteur d'oubli naturel $U : \underline{Cat}_\Sigma \longrightarrow \underline{Cat}$ a un adjoint à gauche et est triplable. Répétons (une nouvelle fois) l'argument (général) :

(i) $\underline{Cat}_\Sigma$ peut être décrite comme catégorie de $\underline{D}$-algèbres au-dessus de $\underline{Cat}$, relativement à un graphe multiplicatif $\underline{D}_u$, surgraphe d'un sous-graphe de $\underline{Cat}$, assez simple (cf.(T.A.E.P.) a) et b) , et (S.B.D.S.) pour les généralités sur les $\underline{D}$-algèbres, et le § suivant pour une description explicite de $\underline{D}_u$).

(ii) $\underline{Cat}$ est une catégorie de réalisations d'une esquisse projective (esquisse de catégories) . Il s'en suit que $\underline{Cat}_\Sigma$ est elle-même une catégorie de réalisations d'une esquisse projective, ayant un "étage" de cônes supplémentaire par rapport à l'esquisse de catégorie.

(iii) Il s'en suit que U a un adjoint à gauche et que U est triplable (cf. (T.A.E.P.), (S.B.D.S.), (E.D.S.A.), (C.T.F.A.)).

Venons-en à la description de $\underline{D}_u$. Il se trouve que, plus généralement, il y a moyen de décrire la catégorie des catégories à extensions de Kan choisies le long d'un foncteur q , à l'aide d'un graphe multiplicatif $\underline{D}_q$ isomorphe à $\underline{D}_u$: seules les arités des lois (i.e. les objets de $\underline{Cat}$ auxquels $\underline{D}_q$ et $\underline{D}_u$ sont greffés) et les lois naturelles (i.e. les flèches de $\underline{Cat}$ qui interviennent dans la description de $\underline{D}_q$ et de $\underline{D}_u$) diffèrent ; ceci étant, $\underline{D}_q$ aura, dans tous les cas, 5 objets , 8 lois naturelles, 3 lois formelles et 7 équations non triviales.

II. CATEGORIES A EXTENSIONS DE KAN COMME $\underline{D}$-ALGEBRES SUR $\underline{Cat}$.

Soit $q : \underline{I} \longrightarrow \underline{J}$ un foncteur ; on lui associe les trois catégories suivantes :

- La catégorie $\underline{Q}_1$. Elle a pour classe d'objets la réunion, supposée disjointe, des classes d'objets de $\underline{I}$ et de $\underline{J}$. Ceci étant, nous la décrivons par générateurs et relations : Soit, pour chaque objet I de $\underline{I}$, une flèche reliant I à $q(I)$, que nous notons q_I . Posons $L_q = \{q_I\}_{I \in Ob\, \underline{I}}$, puis $X = Fl\, \underline{I} \cup Fl\, \underline{J} \cup L_q$. La catégorie $\underline{Q}_1$ est la catégorie quotient de la catégorie libre des chemins propres de X , soit $L[X]$, par les relations suivantes:

  (i) " $h = g.f$ " , chaque fois que $g.f$ est défini dans $\underline{I}$ ou dans $\underline{J}$ et vaut justement h ,

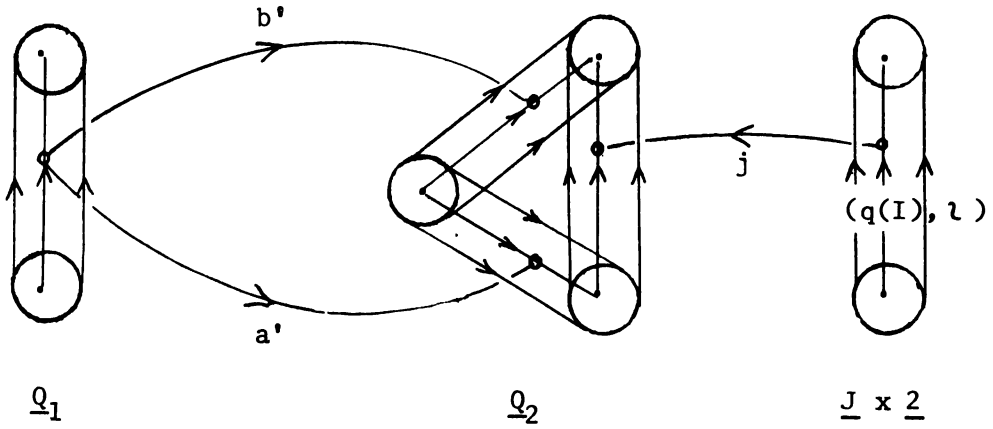
  (ii) " $q_{I'}.f = q(f).q_I$ " , pour toute flèche $f : I \longrightarrow I'$ dans $\underline{I}$.

Donc, $\underline{Q}_1 = L[X] / r$ où r est la relation d'équivalence bicompatible sur $L[X]$ engendrée par les relations ci-dessus. On dit encore que $\underline{Q}_1$ est le "cylindre de q " . Nous désignerons par a le foncteur injection canonique de $\underline{I}$ dans $\underline{Q}_1$.

- La catégorie $\underline{Q}_2$. Il est clair que la catégorie $\underline{Q}_1$, lorsque q est le foncteur $Id_{\underline{J}}$, est canoniquement isomorphe à la catégorie produit $\underline{J} \times \underline{2}$ où $\underline{2} = (0 \xrightarrow{\iota} 1)$.

La catégorie $\underline{Q}_2$ se décrit aisément comme un recollement de deux copies de $\underline{Q}_1$ et d'une copie de $\underline{J} \times \underline{2}$,

. d'une part selon le schéma suivant, qui précise les principales notations et les foncteurs injections canoniques dont nous avons besoin :

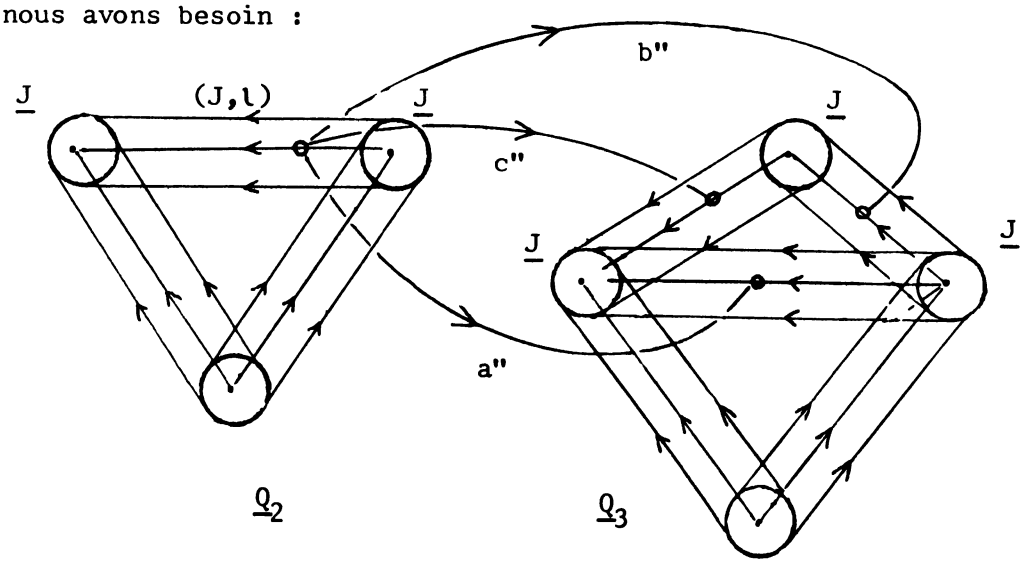


. d'autre part, en tenant compte des équations génératrices suivantes:

(2) $\forall\, I \in \mathrm{Ob}\, \underline{I} \quad j((q(I),\iota)).a'(q_I) = b'(q_I)$.

Bien sûr, on peut décrire, de plusieurs manières naturelles, la catégorie $\underline{Q}_2$ comme limite inductive dans $\underline{\mathrm{Cat}}$ de catégories "plus simples" , mais ceci est sans intérêt pour la suite.

- <u>La catégorie $\underline{Q}_3$</u> . C'est un recollement de 3 copies de $\underline{Q}_2$, . d'une part selon le schéma suivant, qui précise les principales notations et les foncteurs injections canoniques dont nous avons besoin :



. d'autre part , en tenant compte des équations génératrices suivantes :

(3) $\forall\ J \in \mathrm{Ob}\ \underline{J} \quad c''(J,\iota).b''(J,\iota) = a''(J,\iota)$.

Bien sûr, on peut décrire, de plusieurs manières naturelles, la catégorie $\underline{Q}_3$ comme limite inductive dans $\underline{\mathrm{Cat}}$ de catégories plus simples, mais ceci est sans intérêt pour la suite. On remarquera, de ce point de vue, que les limites inductives en question ont un aspect purement graphique (recollements des graphes orientés sous-jacents à $\underline{I}$, $\underline{J}$, $\underline{Q}_1$, $\underline{Q}_2$ etc...) et naturel (c'est le sens des dessins ci-dessus) <u>et</u> aussi un aspect purement équationnel (cf. les égalités (2) et (3),etc...) tout aussi naturel, et, de toute manière, inévitable pour ce que nous allons dire ensuite.

Soit e le foncteur naturel de $\underline{J} \times \underline{2}$ dans $\underline{Q}_2$ qui écrase le cylindre sur la base de son image par j .

Nous pouvons alors décrire le graphe multiplicatif $\underline{D}_q$, qui est donc une "syntaxe catégorique" des catégories à extensions de Kan le long de q choisies:

- ses objets sont les 5 catégories suivantes :

$$\underline{I} = \underline{Q}_0 \ , \ \underline{Q}_1 \ , \ \underline{Q}_2 \ , \ \underline{Q}_3 \ \text{ et } \ \underline{J} \times \underline{2} \ ,$$

- ses lois "naturelles" sont les 8 foncteurs (entre ces catégories) ci-dessous désignés :

$$a \ , \ a' \ , \ b' \ , \ a'' \ , \ b'' \ , \ c'' \ , \ j \ , \ e \ ,$$

- ses lois "formelles" génératrices sont au nombre de 3 :

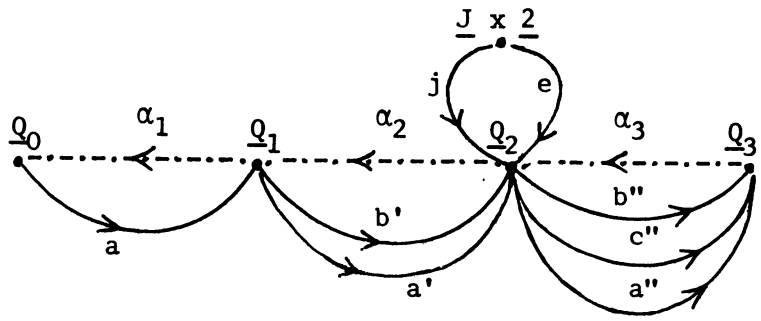
$$\alpha_1 : \underline{Q}_1 \dashrightarrow \underline{Q}_0$$
$$\alpha_2 : \underline{Q}_2 \dashrightarrow \underline{Q}_1$$
$$\alpha_3 : \underline{Q}_3 \dashrightarrow \underline{Q}_2 \ ,$$

les autres lois formelles à ajouter étant celles qui figurent (implicitement) dans les équations ci-dessous,

- les équations non triviales de $\underline{D}_q$ sont au nombre de 7 :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 . a &= Id \\
\alpha_2 . b' &= Id \\
\alpha_2 . a' &= a . \alpha_1 \\
\alpha_1 . \alpha_2 . j &= \alpha_1 . \alpha_2 . e \\
\alpha_3 . a'' &= a' . \alpha_2 \\
\alpha_3 . b'' &= b' . \alpha_2 \\
\alpha_3 . c'' &= Id \qquad .
\end{aligned}$$

Voici dessiné le graphe orienté générateur de $\underline{D}_q$:



Les $\underline{D}_q$-algèbres dans $\underline{Cat}$ sont exactement les catégories à extensions de Kan le long de q choisies. Ceci n'est pas à proprement parler un résultat, mais plutôt une prise de conscience qu'on a bien transcrit en termes symboliques appropriés la définition.

Indiquons simplement deux choses :

(i) la loi formelle α_1 permet de spécifier, pour une structure k sur $\underline{C}$ l'extension de Kan (le long de q) $\bar{F}$ choisie d'un foncteur $F : \underline{I} \longrightarrow \underline{C}$ donné : $\bar{F} = F \underset{k}{.} \alpha_1$

(ii) les lois formelles α_2 et α_3 , et les équations de structure de $\underline{D}_q$ permettent très exactement d'exprimer la propriété universelle de $\bar{F}$ (existence et unicité du crochet).

En prenant pour q le foncteur $u : \underline{1} \longrightarrow \underline{N}$, on obtient la description des catégories de Peano comme $\underline{D}_u$-algèbres au-dessus de $\underline{Cat}$, ce qui assure l'existence de catégorie de

Peano libre engendrée par une catégorie donnée , et, de plus, l'algébricité de $U : \underline{Cat}_{\Sigma} \longrightarrow \underline{Cat}$ au sens des triples, quitte à nous répéter (cf. la fin du § précédent).

Il est clair que, plus généralement, si $\underline{Cat}_R$ désigne la catégorie des catégories à extensions de Kan choisies le long de foncteurs $q \in R$, elle est algébrique au dessus de $\underline{Cat}$, pour les mêmes raisons, à la condition toutefois que R soit un ensemble ; le graphe multiplicatif $\underline{D}_R$ à considérer, dans ce cas, n'est autre que la somme (éventuellement amalgamée sur certains objets et sur certaines flèches) des différents $\underline{D}_q$, où $q \in R$.

Plus généralement encore, on peut aussi considérer les catégories à extensions de Kan liées choisies, les liaisons étant spécifiées par des équations supplémentaires imposées entre les diverses lois génératrices α_i données. Nous proposons d'appeler de telles structures des <u>catégories algorithmiques</u>.

<u>Peut-on faire plus général ?</u>

Absolument oui ! Considérons un sur-graphe multiplicatif $\underline{D}$ de $\underline{Cat}$ tel que la "différence" $D' = D - Cat$ soit petite. Nous obtenons alors des $\underline{D}$-algèbres qu'on pourrait qualifier d'hyper-algorithmiques. En fait, puisque $\underline{D}$ est générique maintenant, le seul point commun entre ces algèbres réside en ce que leurs syntaxes contiennent toujours $\underline{Cat}$; aussi pourrait-on les appeler (génériquement) des algèbres catégoriques, rappelant ainsi que les arités des lois formelles qui les définissent dans chaque cas particulier (i.e. pour un $\underline{D}$ donné) sont toujours des catégories. Ainsi on peut dire que les algèbres catégoriques (ou hyper-algorithmiques) sont algébriques sur $\underline{Cat}$, dans le sens précis suivant : quelle que soit la syntaxe catégorique $\underline{D}$ donnée , les algèbres catégoriques de type $\underline{D}$ sont triplables au-dessus de $\underline{Cat}$.

Dans le même ordre d'idées, on peut concevoir une extension de cette notion, qui consiste à envisager pour les arités des lois formelles des objets d'une catégorie $\underline{C}$ arbitraire. Ce point de vue n'est pas sans rappeler celui de (T.A.E.P.), a) et b). Ainsi, pour un sur-graphe multiplicatif $\underline{D}$ de $\underline{C}$, on a la notion d'algèbre de type $\underline{D}$, ou $\underline{D}$-algèbre, au-dessus de $\underline{C}$, et si $\underline{D}$ est donné génériquement, on peut tout à fait parler d'algèbres $\underline{C}$/ iques . Avec des conditions (non nécessaires d'ailleurs) concernant (i) la taille de $\underline{D} - \underline{C}$ et (ii) l'esquissabilité de $\underline{C}$, on peut énoncer un résultat du genre : "les algèbres $\underline{C}$/ iques sont algébriques sur $\underline{C}$", ce qui justifie pleinement le choix des mots puisque nous disposons maintenant de l'équation de commutation :

algèbres $\underline{C}$ / iques = algébriques / $\underline{C}$.

Nous avons tenu à écrire ce paragraphe pour bien mettre en évidence le fait que les catégories à extensions de Kan choisies se décrivent le plus naturellement du monde comme des algèbres catégoriques (i.e. les arités naturelles qui s'imposent dans la définition naturelle sont bien des catégories !) ce qui ne veut pas dire qu'il soit interdit, ou impossible a priori d'en donner une définition en termes d'algèbres $\underline{C}$/ iques, avec une catégorie $\underline{C} \neq \underline{Cat}$. Il est cependant établi en (A.M.E.N.) qu'il n'est pas toujours possible de les décrire en termes d'algèbres graphiques (i.e. $\underline{C} = \underline{Gra}$): notamment pour les catégories de Peano. Nous pensons aussi qu'il est utile à certains de se convaincre de la simplicité, de l'élégance, de la généralité (non gratuite) de certaines notions en examinant des cas particuliers. Ils en ont donc ici tout le loisir. Le point de vue des $\underline{D}$ - algèbres issu de la théorie des triples est très naturel dans la mesure où on ne se fixe pas <u>a priori</u> la catégorie de base $\underline{C}$ une fois pour toutes, c'est-à-dire dans la mesure où on tourne le dos au point de vue des algèbres $\underline{C}$ / iques (cf. le commentaire ci-dessus qu'il convient de ne pas réduire à un simple amusement !)

III. L'EXEMPLE DES FONCTIONS PRIMITIVES RECURSIVES.

L'ensemble PR des fonctions (totales) primitives récursives admet beaucoup de présentations équivalentes. Elles ne diffèrent pas fondamentalement les unes des autres, mais il est bien nécessaire de s'en convaincre dans chaque cas, avec quelque précision. Si donc on propose une présentation de l'ensemble PR "légèrement différente" (au moins en apparence) de celles qu'on trouve dans la littérature, on doit s'astreindre, quand bien même cela paraît "évident" à montrer l'équivalence avec une des définitions précises que fournit la littérature. Le bavardage autour de la "thèse de Church" n'est scientifiquement d'aucun secours !

Commençons par remarquer que PR est défini en général comme ensemble de fonctions de $\mathbb{N}^r$ dans $\mathbb{N}$, où $r \geq 1$ est variable. Reprenant le point de vue développé par Eilenberg et Elgot dans (R.E.C.S.), nous associons tout d'abord à PR la catégorie $\underline{PR}$ suivante:

- ses objets sont les ensembles $\mathbb{N}^n$, avec $n \geq 0$; on pose $\mathbb{N}^0 = 1$;
- ses flèches sont les applications $f : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}^r$ telles que $p_{r,i}.f = f_i : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ soit dans PR , pour $i = 1,2,\ldots,r$, $p_{r,i}$ désignant la $i^{\text{ème}}$ projection naturelle de $\mathbb{N}^r$ dans $\mathbb{N}$, et les applications $z_0 : 1 \longrightarrow \mathbb{N}$ et $C_0 : \mathbb{N} \longrightarrow 1$ définies par $z_0(0) = 0$ et $C_0(n) = 0$ (de sorte que $\underline{PR}$ est une catégorie à produits finis quelconques, y compris le $\emptyset$-produit 1)

Ceci étant, nous allons préciser une définition qui n'est pas très éloignée de celle qu'on trouve dans (R.E.C.S.) , puis nous montrerons qu'elle est équivalente à celle qu'on trouve dans le livre de Jaulin et Azra (R.E.C.U.) à la page 191, exercice I 11 . Nous utiliserons largement des faits simples, qu'on ren-

contre un peu partout dans la littérature.
Donc, peu d'originalité dans ce qui suit, mais quand même un tout cohérent qui peut éviter au lecteur consciencieux d'avoir à se noyer dans les romans-fleuves de la récursion primitive!

1. La catégorie de Péano $\underline{K}$.

Ses objets sont les ensembles $\mathbb{N}^n$, avec $n \geq 0$. Nous définissons alors $\underline{K}$ par récurrence comme suit :
on part de l'ensemble K_0' constitué des applications suivantes:

$$\text{les } i_r : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^{r+1} \text{ , où } i_r(V) = (V,0) \text{ ,}$$

$$\text{les } s_r : \mathbb{N}^{r+1} \longrightarrow \mathbb{N}^{r+1} \text{ , où } s_r(V,n) = (V,n+1),$$

l'entier r prenant toutes les valeurs ≥ 0 .
$\underline{K}_0$ est la catégorie d'applications engendrée par K_0' .
Supposons définie la catégorie $\underline{K}_m$. Nous définissons alors:
. l'ensemble K_{m+1}' comme réunion de K_m et de l'ensemble $[K_m,K_m]$ des crochets $[f,a]$ d'applications de K_m :

$$\mathbb{N}^q \xrightarrow{f} \mathbb{N}^r \circlearrowleft a \quad ; \quad [f,a](V,n) = a^n(f(V)),$$

. la catégorie d'applications $\underline{K}_{m+1}$ engendrée par K_{m+1}' .
La catégorie $\underline{K}$ est la réunion des catégories emboitées $\underline{K}_m$.
Cette présentation montre aussitôt que $(\underline{K}$, i, s) est une catégorie de Peano.

2. La catégorie $\underline{PR}$ (cf. (R.E.C.U.)) .

Comme convenu, on définit en fait l'ensemble PR : c'est le plus petit ensemble d'applications contenant :
. $s_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, où $s(n) = n+1$,
. $p_{r,i} : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}$, où $p_{r,i}(n_1,n_2,\ldots,n_r) = n_i$, $1 \leq i \leq r$
. $z_r : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}$, où $z_r(V) = 0$, $r \geq 0$,

et qui est stable pour les opérations de composition et de récurrence simple.

3. L'égalité $\underline{PR} = \underline{K}$.

Commençons par établir que certaines applications bien naturelles sont effectivement dans $\underline{K}$.

. $t_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$
$n \longmapsto (n+1,0)$, comme composée $t_1 = i_1 . s_0$;

. $s_{1,1} : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^2$
$(m,n) \longmapsto (m+1,n)$, comme crochet $s_{1,1} = [t_1, s_1]$;

. par récurrence, on obtient les applications successeurs :

$s_{p,q} : \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}^{p+1}$
$(n_1,\ldots,n_{p+1}) \longmapsto (n_1,\ldots,n_q+1,\ldots,n_{p+1})$;

si $q = p+1$, on voit que $s_{p,p+1} = s_p$ est dans K_0' ,
si $q \neq p+1$, on remarque que :

$$s_{p,q} = [i_{p-1} . s_{p-1} , s_q] \ ;$$

. par récurrence, on obtient les applications nulles :

$z_r : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}$
$V \longmapsto 0$

si $r = 0$, on voit que $z_0 = i_0$ est dans K ,
si $r \neq 0$, on remarque que $z_r = [z_{r-1}, Id_{\mathbb{N}}]$;

. par récurrence, on obtient les projections :

$p_{r,i} : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}$
$(n_1,\ldots,n_r) \longmapsto n_i$,avec $1 \leq i \leq r$;

si $r = 1$, on voit que $p_{1,1} = Id_{\mathbb{N}}$ est dans K,
si $r \neq 1$, ou bien $i = r$ et, dans ce cas $p_{r,r} = [z_{r-1}, s_0]$
ou bien $i \neq r$ et alors $p_{r,i} = [p_{r-1,i} , Id_{\mathbb{N}}]$

. par récurrence, on obtient les insertions de 0:

$$j_{r,i} : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^{r+1} \qquad 1 \leq i \leq r+1 \ ,$$
$$(n_1,\ldots,n_r) \longmapsto (n_1,\ldots,n_{i-1},0,n_i,\ldots,n_r) \quad ;$$

si $r = 0$, on voit que $j_{0,1} = i_0$ est dans K,
si $r \neq 0$, ou bien $i = r+1$ et, dans ce cas, $j_{r,r+1} = i_r$ est dans K, ou bien $i \neq r+1$ et alors:

$$j_{r,i} = [\, i_r . j_{r-1,i} \ , \ s_r] \quad ;$$

. par récurrence, on obtient les permutations:

$$\bar{\sigma} : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^r$$
$$(n_1,n_2,\ldots,n_r) \longmapsto (n_{\sigma(1)},n_{\sigma(2)},\ldots,n_{\sigma(r)})$$,où σ est une permutation de $1,2,\ldots,r$;

détaillons une procédure possible:

(i) d'abord la permutation des 2 dernières variables $(r \geq 2)$

$$(n_1,n_2,\ldots,n_{r-1},n_r) \longmapsto (n_1,n_2,\ldots,n_{r-2},n_r,n_{r-1})$$

n'est autre que le crochet suivant:

$$[j_{r-1,r-1} \ , \ s_{r-1,r-1}] \quad ,$$

(ii) ensuite, la permutation circulaire $(r \geq 2)$

$$(n_1,n_2,\ldots,n_r) \longmapsto (n_r,n_1,\ldots,n_{r-1})$$

n'est autre que le crochet suivant:

$$[\, j_{r-1,1} \ , \ s_{r-1,1}] \quad ;$$

. la diagonale $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$

$n \longmapsto (n,n)$ est le crochet suivant:

$$[\, i_1 . i_0 \ , \ s_{1,2} . s_{1,1}] \quad ;$$

. par récurrence, on obtient les diagonales

$d_r : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^r$, pour $r > 1$;

indiquons une procédure possible pour récupérer d_{r+1} à partir de d_r :

d'une part, d_r suivie de deux insertions convenables de 0 fournit l'application h suivante : $V \longmapsto (V,0,V,0)$,où $V \in \mathbb{N}^r$;

d'autre part, on prend $a = s_{2r,r+1} \cdot s_{2r,2r+1}$;

on obtient alors $d_{r+1} = [h,a]$;

toujours par récurrence, on obtient les diagonales générales:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^r &\longrightarrow \mathbb{N}^{rq} \\ V &\longmapsto (V,V,\ldots,V) \end{aligned}$$

. la catégorie $\underline{K}$ est à produits. Soit $f : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}^r$ une application, élément de K ; alors, quel que soit $q \geq 0$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q &\longrightarrow \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^q \\ (V_1 , V_2) &\longmapsto (f(V_1), V_2) \end{aligned}$$

est encore élément de K . En effet, pour $q = 0$, il s'agit simplement de f, et on poursuit par récurrence sur la "longueur de V_2".

De même, soit $g : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}^t$ dans K ; quel que soit $q \geq 0$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}^p &\longrightarrow \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}^t \\ (V_1, V_2) &\longmapsto (V_1, g(V_2)) \end{aligned}$$

est encore dans K, comme compée des trois applications suivantes:

$$(V_1, V_2) \longmapsto (V_2, V_1) \longmapsto (g(V_2), V_1) \longmapsto (V_1, g(V_2)) \quad ;$$

(permutation , cas précédent , permutation)

on obtient alors, pour f et g données dans K, de même source $\mathbb{N}^p$, l'application $(f,g) : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^t$

$V \longmapsto (f(V),g(V))$, en composant les trois applications suivantes:

$$V \longmapsto (V, V) \longmapsto (f(V), V) \longmapsto (f(V), g(V)) \quad ;$$

(diagonale , cas précédent , cas précédent)

on généralise facilement au cas d'un nombre quelconque d'applications de même source. Ainsi $\underline{K}$ est une catégorie à produits. C'est une théorie de Lawvere particulière qui jouit d'une remarquable propriété universelle par rapport à toutes les théories de Lawvere finiment présentables (nous en reparlerons dans un travail ultérieur, et nous laissons à la sagacité du lecteur la découverte de ce que sont les $\underline{K}$-algèbres !)

. A partir du moment où l'on dispose de l'opération de <u>juxtaposition au but</u>:

$$(f_1,f_2,\ldots,f_k)(V) = (f_1(V),\ f_2(V),\ldots,f_k(V))$$

dans K , il est licite de reprendre (les yeux fermés) les nombreux engendrements décrits dans les ouvrages spécialisés en récursivité ; on obtiendra, par exemple, la fonction caractéristique de l'ordre, le prédécesseur, la valeur absolue de la différence, les fonctions caractéristiques des ensembles sur lesquels l'égalité $f = g$ entre deux éléments de K a lieu, ce qui signifie que $\underline{K}$ est à noyaux virtuels,etc...

. Pour prouver l'inclusion $\underline{K} \supset \underline{PR}$, il reste à établir maintenant que $\underline{K}$ est stable par le schéma de récurrence simple. Soit donc $g : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N}^{p+2} \longrightarrow \mathbb{N}$ deux applications, éléments de K , et soit $f : \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par:

$$f(V,0) = g(V) ,$$
$$f(V,y+1) = h(V,y,f(V,y)) .$$

Introduisons les deux applications suivantes:

$$\hat{g} : \begin{array}{l} \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}^{p+2} \\ V \longmapsto (V,\ 0,\ g(V)) \end{array} ,$$

$$\hat{h} : \begin{array}{l} \mathbb{N}^{p+2} \longrightarrow \mathbb{N}^{p+2} \\ (V,\ y,\ z) \longmapsto (V,\ y+1,\ h(V,y,z)) \end{array} .$$

En composant avec les projections convenables, on trouve des éléments de K ; donc, d'après la possibilité établie de juxtaposition au but, on voit que $\hat{g}$ et $\hat{h}$ sont éléments de K . Le crochet $\hat{f} = [\hat{g}\ ,\ \hat{h}]$ est donc élément de K, et l'on vérifie par récurrence que $\hat{f}(V,\ y) = (V,\ y,\ f(V,y))$, donc que f est bien dans K comme composée de $\hat{f}$ et de la dernière projection.

. Reste à établir l'inclusion inverse $\underline{K} \subset \underline{PR}$.
On voit tout d'abord que $\underline{PR}$ contient K_0' , et donc $\underline{K}_0$ grâce aux égalités suivantes:

$$p_{r,i}\cdot i_r = p_{r-1,i} \qquad \text{si} \quad 1 \leq i \leq r$$

$$p_{r,r}\cdot i_r = z_{r-1}$$

$$p_{r+1,i}\cdot s_r = p_{r+1,i} \qquad \text{si} \quad 1 \leq i \leq r$$

$$p_{r+1,r+1}\cdot s_r = s_0\cdot p_{r+1,r+1} \quad ;$$

il suffit alors d'établir que $\underline{PR}$ est stable par l'opération de crochetage $[\ ,\ ]$. Or ceci résulte des deux points suivants :

(i) Soit $\mathbb{N}^p \xrightarrow{f} \mathbb{N} \circlearrowleft a$, avec f, a dans PR ; alors $[f,a]$ n'est autre que l'application h définie par le schéma de récurrence simple suivant:

$$h(V,0) = f(V) \ ,$$

$$h(V,\ n+1) = \hat{a}(V,\ n,\ h(V,n)) \ , \text{ où } \ \hat{a}(V,n,m) = a(m) \ .$$

(ii) Soit $\mathbb{N}^p \xrightarrow{f} \mathbb{N}^r \circlearrowleft a$, avec f, a dans $\underline{PR}$ et $r \geq 2$. Choisissons une bijection récursive primitive γ de $\mathbb{N}^r$ sur $\mathbb{N}$ (il y en a beaucoup !) et posons $f_\gamma = \gamma.f$, $a_\gamma = \gamma.a.\gamma^{-1}$; f_γ et a_γ sont dans $\underline{PR}$ et on est ramené aucas (i) ; on sait donc que $[f_\gamma,\ a_\gamma]$ est dans $\underline{PR}$, et comme $[f,\ a] = \gamma^{-1}.[f_\gamma, a_\gamma]$, la conclusion en résulte aussitôt.

IV. DES STRUCTURES VOISINES PLUS FAIBLES.

(Méthode d'engendrement par structures partielles)

On peut chercher à affaiblir la structure de catégorie de Peano en y remplaçant l'axiome d'unicité du crochet [,] par un ensemble plus ou moins riche d'axiomes, qui seraient des conséquences de l'unicité, si celle-ci était réalisée. Ceci peut conduire, par exemple, à une connaissance plus précise de ce que sont les algèbres du triple induit dans Gra par l'adjonction $\underline{Cat}_{\Sigma} \rightleftarrows \underline{Gra}$ décrite en (I).
On voit un autre intérêt possible : celui de la classification algébrique d'un certain nombre de classes de fonctions récursives, utilisant les résultats généraux de la théorie des esquisses ou des D-algèbres.
Cependant, l'intérêt premier de ce paragraphe est la présentation, sur des exemples significatifs, d'une méthode d'engendrement de structures libres, à l'aide de structures partielles de plus en plus totales, dont l'originalité est double:
- elle colle à la réalité de l'engendrement tel qu'il est pratiqué usuellement, plus ou moins consciemment,
- elle montre que la totalisation peut s'effectuer en rattrapant le(s) retard(s) sur les domaines partiels de définition des lois, afin de contrôler au mieux l'injectivité dans la structure totale.

A. Les SC-monoïdes.

Quel que soit l'objet C d'une catégorie de Peano, le monoïde End(NC) est naturellement muni d'une structure de SC-monoïde. La définition proposée ici de cette structure est volontairement "un peu" compliquée, pour qu'à son sujet nous puissions expliquer la technique de partialisation.

<u>Définition 1.</u> Un monoïde à succession cohérente, en abrégé un SC-monoïde, est constitué par un triplet $(M^{\bullet},s,c)$ dans lequel $M^{\bullet}$ est un monoïde d'élément neutre e, s est un élément distingué, appelé "succession", et c est une loi binaire dans M, dite de "cohérence", satisfaisant les axiomes suivants:

SC_1 $\forall (y,x) \in M^2$ $\quad c(y,x).s = x.c(y,x)$

SC_2 $\forall (y,x) \in M^2$ $\quad c(y,x).c_o = y.c_o$, où $c_o = c(e,e)$

SC_3 $\forall (z,y,x,x') \in M^4$ $\quad c(z.c(y,x),x') = c(z.y,x')$

SC_4 $\forall (z,y,x) \in M^3$ $\quad c(y,x).c(z,s) = c(c(y,x).z,x)$

SC_5 $\quad c(s,s) = s$, $c(e,s) = e$, $c(e,c_o) = c_o$

Citons quelques conséquences immédiates de ces axiomes:

C_0 $\forall p \geq 0$ $\quad c(s^p,s) = s^p$. (par convention, $s^0 = e$)
et $c_o^2 = c_o$

C_1 $\forall (x',x) \in M^2$ $\quad c(x',s).c(c_o x,s) = c(x'.c_o.x , s)$

C_2 $\forall (z,x) \in M^2$ $\quad c(e,x).c(z,s) = c(c(e,x).z , x)$

La con équence C_1 résulte de SC_2 et SC_4, et elle rend compte de la fonctorialité du crochet, quand les boucles sont prises égales à s, tandis que C_2, cas particulier de SC_4, rend compte du changement de boucle seul ($s \longmapsto x$). En fait, SC_3 , en présence de SC_2, équivaut à :

C_3 $\forall (z,x) \in M^2$ $\quad c(z.c_o,x) = c(z,x)$.

Mais C_1 et C_2, même assorties de SC_1,SC_2 et SC_5 n'entraînent pas en retour la validité de SC_3 et SC_4 !

<u>Définition 2.</u> Un monoïde de Peano est un triplet $(M^{\bullet},s,c)$ dans lequel $M^{\bullet}$ est un monoïde, s est un élément distingué de M, et c est une loi binaire dans M ayant la propriété suivante, où c_o désigne toujours $c(e,e)$:

P $\quad (y,x) \in M^2$ $\quad c(y,x)$ est l'unique élément z possible tel que $z.s = x.z$ et $z.c_o = y.c_o$

On vérifie sans peine que tout monoïde de Peano est un SC-monoïde. La réciproque n'est pas vraie, comme nous aurons l'occasion de le voir plus loin.

Les SC-monoïdes s'esquissent avec des cônes distingués à bases discrètes de cardinal $\leqslant 4$. L'esquisse en question engendre une théorie de Lawvere.

<u>L'exemple typique</u>. Soit $\underline{C}_\sigma = (\underline{C}, i, s)$ une catégorie de Peano, et soit C un objet de $\underline{C}$; on lui associe naturellement le SC-monoïde $(M^\bullet_C, s_C, c_C)$ suivant:

$M^\bullet_C$ est le monoïde des endomorphismes de l'objet NC ,

s_C est la valeur de la transformation naturelle s en C , c'est donc bien un élément distingué dans M_C ,

$c_C(y,x)$ n'est autre que le crochet $[y.i_C,x]$.

L'unicité du crochet dans une catégorie de Peano fait que ces divers SC-monoïdes $(M^\bullet_C, s_C, c_C)$ sont des monoïdes de Peano. On est donc déjà assuré de l'existence de SC-monoïdes non triviaux. On verra plus loin des exemples de SC-monoïdes qui ne sont pas des monoïdes de Peano. Notons enfin que la terminologie que nous employons ne doit pas entretenir une confusion possible: un monoïde de Peano (définition 2 ci-dessus) n'est pas une catégorie de Peano à un seul objet (définition 2 du § I).

B. Les SC-monoïdes partiels.

Plusieurs descriptions classiques du SC-monoïde libre engendré par un monoïde $M^\bullet$ sont possibles. Nous allons en présenter une ici, sans doute moins classique, mais dont l'intérêt théorique ne peut pas échapper au catégoricien attentif; nous lui demandons donc d'envisager ce qui suit d'un point de vue

générique; nous développerons ces idées de façon plus systématique dans un article séparé. Nous partirons de la définition de SC-monoïde partiel suivante.

<u>Définition 3.</u> On dit que $(M^{\bullet},s,c)_{P,Q,Z}$ où $P \subset Z\times Z \subset Q \subset M\times M$, est un SC-monoïde partiel de domaines P,Q,Z lorsque:
$M^{\bullet}$ est un monoïde d'élément neutre e, s est un élément distingué de M, c est une loi binaire partielle dans M, de source Q, satisfaisant les axiomes SC_i' $(i = 1,2,\ldots,5)$ suivants:

SC_i' n'est autre que l'énoncé SC_i dans lequel les égalités sont conditionnées, pour $i = 1,2,3,4,5$, au fait qu'elles soient bien définies (i.e. appartenance à Q de tous les couples voulus) et surconditionnées, pour $i = 3,4$, au fait que $(y,x) \in P$, et en plus, pour $i = 3$, au fait que $z \in Z$.

<u>Définition 4.</u> Par homomorphisme entre SC-monoïdes partiels il faut entendre la donnée suivante:

$$(M^{\bullet},s,c)_{P,Q,Z} \xrightarrow{\ f\ } (M'^{\bullet},s',c')_{P',Q',Z'} \quad ,$$

où $f: M^{\bullet} \longrightarrow M'^{\bullet}$ est un homomorphisme entre monoïdes,

$f(s) = s'$,

$(f \times f)(P) \subset P'$, $(f \times f)(Q) \subset Q'$ et $f(Z) \subset Z'$,

$c'(f(y),f(x)) = f(c(y,x))$, pour tout (y,x) dans Q .

On peut imaginer bien des variantes de "partialisation de la structure de SC-monoïde" : l'une d'entre elles consisterait, par exemple, à partialiser aussi la structure de monoïde sous-jacente. Cependant, il convient de dégager nettement, sur cet exemple, le trait caractéristique souhaité pour la structure de l'opération de partialisation (esquisse de partialisation d'esquisses !) : c'est l'inclusion des domai-

nes de "deux" lois (par ex.: $P \hookrightarrow Q$) qui se trouvent être superposées dans l'égalité axiomatique requise (par ex.: ici c se superpose à elle-même dans les expressions $c(z.c(y,x),x')$ et $c(c(y,x).z,x)$. Bien sûr, si on avait voulu partialiser, par exemple, aussi, la loi de monoïde $k(y,x) = y.x$, on aurait fait apparaître une chaîne d'inclusions de domaines plus longue: en rendant partielle l'expression $c(k(z,c(y,x)),x')$ on pourrait introduire trois domaines inclus les uns dans les autres, comme suit : $P_1 \hookrightarrow P_2 \hookrightarrow P_3$, où
P_1 serait le domaine du " c intérieur " ,
P_2 le domaine de k ,
P_3 le domaine du " c extérieur " .
C'est sur cette structure de "retard entre les domaines" que nous voulons attirer l'attention principale.

Encore une fois, il n'y a aucune "obligation a priori" de partialiser comme ceci ou comme cela. Le rôle de Z dans SC_3' apparaîtra clairement plus loin.

Revenons alors à la définition 3 de SC-monoïde partiel proposée ci-dessus. Ecrivons, à titre d'exemple, les axiomes SC_2' et SC_3' avec précision:

$$SC_2' \quad \forall (y,x) \in Q \ [(e,e) \in Q \longrightarrow c(y,x).c(e,e) = y.c(e,e)]$$

$$SC_3' \quad \forall (z,y,x,x') \ [(y,x) \in P,\ (z.c(y,x),x') \in Q\ ,\ (z.y,x') \in Q\ ,\ z \in Z \longrightarrow c(z.c(y,x),x') = c(z.y,x')]$$

Lorsqu'on construit le SC-monoïde libre $(\overline{M}^*,\overline{s},\overline{c})$ engendré par un SC-monoïde partiel $(M^*,s,c)_{P,Q,Z}$, on doit ajouter, si nécessaire, librement, les valeurs particulières de $\overline{c}$ pour les couples de constantes comme (s^p,s) , avec $p \geqslant 0$, (e,e), puis (e,c_o) ..., qui ne figureraient pas dans la source de c .

On peut convenir que cette adjonction s'effectue en premier. Nous allons traiter en détail le cas de l'adjonction de (e,e) à Q, pour mettre en évidence un procédé qui est en fait général.

Soit donc $(M^{\bullet},s,c)_{P,Q,Z}$ un SC-monoïde partiel de domaines P,Q,Z, tel que (e,e) ne soit pas dans Q et e soit dans Z. On veut adjoindre (e,e) à Q. Le problème est d'attribuer à $c(e,e)$ une valeur convenable.
On commence par aggrandir M sans trop se préoccuper de la structure partielle : soit $L(M')^{\circ}$ le monoïde libre engendré par $M' = M \cup \{c_o\}$ et soit $M_1^{\bullet}$ le monoïde quotient de $L(M')^{\circ}$ par les relations suivantes, dans lesquelles on a identifié M à une partie de $L(M')$, et où $Q_1 = Q \cup \{(e,e)\}$:

$$c_o \circ s = c_o \quad ,$$
$$\forall (y,x) \in Q_1 \quad c(y,x) \circ c_o = y \circ c_o \quad ,$$
$$\forall (y,x) \in M^2 \quad y \circ x = y.x \quad ,$$
$$\emptyset = e \quad ;$$

on distingue s dans M_1 et on définit c_1, de domaine Q_1, par : $c_1(y,x) = c(y,x)$, pour tout (y,x) dans Q,
$c_1(e,e) = c_o$.

Le problème est maintenant de savoir si $(M_1^{\bullet}, s, c_1)$ est bien un SC-monoïde partiel de domaines P_1,Q_1,Z, où on a posé $P_1 = P \cup \{(e,e)\}$. Ce problème équivaut au fait de savoir si $(M^{\bullet},s,c)_{P,Q,Z} \xrightarrow{j} (M_1^{\bullet},s,c_1)_{P_1,Q_1,Z}$ est bien un homomorphisme entre SC-monoïdes partiels. Si c'en est un, on peut poursuivre les adjonctions (par exemple, celle de (e,c_o) à P_1 et Q_1). Si ce n'en est pas un, on doit procéder à un quotient de $M_1^{\bullet}$, ce qui peut éventuellement détruire l'injectivité de j ; on connaîtra alors une raison précise de la non

injectivité dans la structure libre.
A cet effet, examinons les axiomes SC_i' . Par construction , $(M_1^{\bullet},s,c_1)_{P_1,Q_1,Z}$ satisfait SC_1' , SC_2' , SC_5' . Par contre , en ce qui concerne SC_3' et SC_4' , cela va dépendre de la structure initiale $(M^{\bullet},s,c)_{P,Q,Z}$.
Supposons, par exemple, qu'il existe x_o , y_o , z_o , dans M , tels que $(y_o,x_o) \in P$, $(z_o.c(y_o,x_o),e) \in Q$, $z_o \in Z$ et $z_o.y_o = e$. (on ne peut pas avoir $z_o.c(y_o,x_o) = e$, puisque, par hypothèse, $(e,e) \notin Q$) . Comme $(M_1^{\bullet},s,c_1)$ doit satisfaire SC_3' , on est obligé d'identifier c_o et $c_o' = c(z_o.c(y_o,x_o),e)$ dans M_1.
Pour abréger, nous dirons qu'il existe dans $(M^{\bullet},s,c)_{P,Q,Z}$ une occurence simple de c_o , à savoir c_o' (via (z_o,y_o,x_o)).
On définit aisément les occurences doubles, triples, etc... mais nous ne nous y attarderons pas ici. Soit $E(c_o)$ l'ensemble des occurences simples de c_o dans $(M^{\bullet},s,c)_{P,Q,Z}$. On voit que l'adjonction de (e,e) à Q et à P conduit à deux possibilités qui s'excluent mutuellement:
. ou bien $E(c_o) = \emptyset$ et, dans ce cas, c_o a du être ajouté formellement ; $(M_1^{\bullet},s,c_1)_{P_1,Q_1,Z}$ est un SC-monoïde partiel de domaines P_1,Q_1,Z ;
. ou bien $E(c_o) \neq \emptyset$; dans ce cas, on doit faire le quotient de M_1 par la plus petite relation d'équivalence, compatible avec la structure partielle, engendrée par la relation qui identifie c_o aux divers éléments de $E(c_o)$. Même si $E(c_o)$ est réduit à un seul élément c_o' , il se peut fort bien que ce quotient identifie entre eux des éléments de M , notamment ici, à cause de l'axiome SC_2' .

Pour la suite des constructions, nous supposons qu'on dis-

pose maintenant d'un SC-monoïde partiel $(M_1^{\bullet},s_1,c_1)_{P_1,Q_1,Z_1}$ dont les domaines contiennent les "constantes" , i.e. (e,e) et les (s_1^p,s_1) , pour $p \geqslant 0$, appartiennent à P_1 , et posant toujours $c_o = c_1(e,e)$, (e,c_o) appartient à P_1. Ainsi, les axiomes où figurent c_o et $s\cdot$ sont efficients.

Supposons déjà construite une suite d'homomorphismes entre SC-monoïdes partiels $\mathbb{M}_i = (M_i^{\bullet},s_i,c_i)_{P_i,Q_i,Z_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$:

$$\mathbb{M}_1 \xrightarrow{j_1} \mathbb{M}_2 \xrightarrow{j_2} \mathbb{M}_3 \ldots \xrightarrow{j_{k-1}} \mathbb{M}_k ,$$

ayant les propriétés suivantes:

(i) $Q_{i+1} = j_i(M_i) \times j_i(M_i)$

$P_{i+1} = (j_i \times j_i)(Q_i)$

$Z_{i+1} = j_i(M_i)$, pour $1 \leqslant i < k$,

(ii) pour tout homomorphisme $\mathbb{M}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{M}'$ dont le but est un SC-monoïde total (i.e. de domaines $M'xM'$, $M'xM'$, M'), il existe un unique homomorphisme $\mathbb{M}_k \xrightarrow{f_k} \mathbb{M}'$ qui prolonge f , i.e. tel que $f_k \cdot j_{k-1} \cdot j_{k-2} \cdots j_1 = f$.

Construisons alors l'homomorphisme au rang k : $\mathbb{M}_k \xrightarrow{j_k} \mathbb{M}_{k+1}$ de la manière suivante :

soit L_k le monoïde libre engendré par la somme, supposée disjointe, $M_k + [M_k,M_k]$, où $[M_k,M_k]$ est écrit pour une copie du produit cartésien $M_k \times M_k$; on convient d'écrire les mots sans parenthèses, identifiant canoniquement M_k à une partie des générateurs de L_k ; pour plus de précaution, nous écrirons les éléments de $[M_k,M_k]$ sous la forme $[y,x]$, réservant ainsi la notation (y,x) pour les éléments de $L_k \times L_k$ tels que y et x soient dans M_k ! La composition dans L_k est notée par simple juxtaposition, alors que celle de $M_k^{\bullet}$ est notée "." Enfin, [,] est regardé comme une loi partielle définie jus-

tement pour les couples (y,x) éléments de $M_k \times M_k$ et à valeurs dans $[M_k,M_k]$. Le crochet a donc ici une nouvelle signification.

On désigne par M_{k+1} le quotient de L_k par la relation d'équivalence compatible avec la composition de L_k et la loi $[,]$ engendrée par les relations élémentaires (r_i) ci-dessous :

(r_0) $\forall (y,x) \in M_k^2$ $\quad y.x = yx$, et $\emptyset = e$

$\forall (y,x) \in Q_k$ $\quad c_k(y,x) = [y,x]$

(r_1) $\forall (y,x) \in M_k^2$ $\quad [y,x]s_k = x[y,x]$

(r_2) $\forall (y,x) \in M_k^2$ $\quad [y,x]c_{o,k} = yc_{o,k}$,où $c_{o,k} = c_k(e,e)$

(r_3) $\forall (y,x) \in Q_k$ $\forall (z,x') \in M_k$ $\quad [z.c_k(y,x),x'] = [z.y,x']$

(r_4) $\forall (y,x) \in Q_k$ $\forall z \in M_k$ $\quad c_k(y,x)[z,s_k] = [c_k(y,x).z,x]$

La classe d'équivalence de m est alors notée $\langle m\rangle$. On définit, dans M_{k+1}, la loi de monoïde suivante: $\langle m'\rangle.\langle m\rangle = \langle m'm\rangle$. L'application canonique $j_k : M_k \longrightarrow M_{k+1}$, donnée par $j_k(x) = \langle x\rangle$, définit clairement un homomorphisme de monoïdes. On pointe $M_{k+1}^{\bullet}$ par l'élément $s_{k+1} = j_k(s_k)$; on pose:

$$Q_{k+1} = j_k(M_k) \times j_k(M_k)$$

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= (j_k \times j_k)(Q_k) = (j_k \times j_k)(j_{k-1}(M_{k-1}) \times j_{k-1}(M_{k-1})) \\ &= (j_k j_{k-1})(M_{k-1}) \times (j_k j_{k-1})(M_{k-1}) \ , \end{aligned}$$

$$Z_{k+1} = j_k(M_k) \ ,$$

et on définit enfin c_{k+1} par $c_{k+1}(\langle y\rangle,\langle x\rangle) = \langle [y,x]\rangle$.

Par construction, les conditions de domaines sont satisfaites à l'ordre $k+1$. Ensuite j_k est un homomorphisme satisfaisant $j_k(s_k) = s_{k+1}$ et $(y,x) \in Q_k$

$$\begin{aligned} j_k(c_k(y,x)) &= \langle c_k(y,x)\rangle \\ &= \langle [y,x]\rangle \\ &= c_{k+1}(\langle y\rangle,\langle x\rangle) . \end{aligned}$$

Reste à vérifier que $\mathbb{M}_{k+1} = (M_{k+1}, s_{k+1}, c_{k+1})_{P_{k+1}, Q_{k+1}, Z_{k+1}}$ est bien un SC-monoïde partiel. L'aspect mécanique de cette vérification vaut d'être analysé de près, car c'est bien une conséquence logique de la structure de partialisation décrite ci-dessus; en fait, c'est bien sûr la volonté que les vérifications suivantes s'effectuent sans problèmes qui a naturellement dicté la structure de partialisation donnée.

SC_1'. Soit $(\langle y\rangle, \langle x\rangle) \in Q_{k+1}$; on a :

$$\begin{aligned}
c_{k+1}(\langle y\rangle,\langle x\rangle).\langle s_k\rangle &= \langle [y,x]\rangle.\langle s_k\rangle && \text{(déf.)}\\
&= \langle [y,x]\, s_k\rangle && \text{(déf.)}\\
&= \langle x\,[y,x]\rangle && (r_1)\\
&= \langle x\rangle.\langle [y,x]\rangle && \text{(déf.)}\\
&= \langle x\rangle.c_{k+1}(\langle y\rangle,\langle x\rangle) && \text{(déf.)}
\end{aligned}$$

SC_2'. Soit $(\langle y\rangle,\langle x\rangle) \in Q_{k+1}$, avec $(y,x) \in M_k^2$; on a :

$$\begin{aligned}
&c_{k+1}(\langle y\rangle,\langle x\rangle).c_{k+1}(\langle e\rangle,\langle e\rangle)\\
&\qquad = \langle [y,x]\rangle.\langle [e,e]\rangle && \text{(déf.)}\\
&\qquad = \langle [y,x]\rangle.\langle c_k(e,e)\rangle && (r_0\text{+comp.})\\
&\qquad = \langle [y,x]\rangle.\langle c_{o,k}\rangle && \text{(déf.)}\\
&\qquad = \langle [y,x]\, c_{o,k}\rangle && \text{(déf.)}\\
&\qquad = \langle y c_{o,k}\rangle && \text{(déf.)}\\
&\qquad = \langle y\rangle.\langle c_{o,k}\rangle && \text{(déf.)}\\
&\qquad = \langle y\rangle.c_{k+1}(\langle e\rangle,\langle e\rangle) && \text{(déf.)}
\end{aligned}$$

SC_3'. Supposons que $\langle z\rangle \in Z_{k+1}$, avec $z \in M_k$, et
$(\langle y\rangle,\langle x\rangle) \in P_{k+1}$, avec $(y,x) \in Q_k$,
$(\langle z\rangle.\langle y\rangle,\langle x'\rangle) \in Q_{k+1}$,
$(\langle z\rangle c_{k+1}(\langle y\rangle,\langle x\rangle),\langle x'\rangle) \in Q_{k+1}$; alors:

$$
\begin{aligned}
& c_{k+1}(\langle z\rangle c_{k+1}(\langle y\rangle \prec x\rangle) \prec x'\rangle) \\
&\quad = c_{k+1}(\langle z\rangle \prec [y,x]\rangle \prec x'\rangle) && \text{(déf.)} \\
&\quad = c_{k+1}(\langle z.c_k(y,x)\rangle \prec x'\rangle) && (r_0\text{+comp.}) \\
&\quad = \langle [z.c_k(y,x),x']\rangle && \text{(déf.)} \\
&\quad = \langle [z.y,\ x']\rangle && (r_3) \\
&\quad = c_{k+1}(\langle z.y\rangle \prec x'\rangle) && \text{(déf.)} \\
&\quad = c_{k+1}(\langle z\rangle \prec \langle y\rangle \prec x'\rangle) && (r_0\text{+déf.})
\end{aligned}
$$

Il était important ici de conditionner le domaine de la variable z (par Z) . Si nous n'avions pas pris cette précaution, on aurait du établir un résultat du genre:

" Soit $m \in L_k$; si l'on a $\langle m[y,x]\rangle = \langle t\rangle, \langle my\rangle = \langle t'\rangle$ avec $(y,x) \in Q_k$, $t, t' \in M_k$, alors $m \in M_k$ ".

Ce résultat, s'il est exact, nécessite une démonstration bien redoutable ! Il se trouve que le plongement dans la structure de SC-monoïde total ne dépend pas en fait de la validité de cet énoncé.

SC_4'. Supposons $(\langle y\rangle \prec x\rangle) \in P_{k+1}$, avec $(y,x) \in Q_k$,
$(\langle z\rangle \prec s_k\rangle) \in Q_{k+1}$, avec $x, y, z \in M_k$,
$(c_{k+1}(\langle y\rangle \prec x\rangle) \prec z\rangle \prec x\rangle) \in Q_{k+1}$. On a:

$$
\begin{aligned}
& c_{k+1}(c_{k+1}(\langle y\rangle \prec x\rangle) \prec z\rangle \prec x\rangle) \\
&\quad = c_{k+1}(\langle [y,x]z\rangle \prec x\rangle) && \text{(déf.+comp.)} \\
&\quad = c_{k+1}(\langle c_k(y,x).z\rangle \prec x\rangle) && (r_0\text{+comp.}) \\
&\quad = \langle [c_k(y,x).z,x]\rangle && \text{(déf.)} \\
&\quad = \langle c_k(y,x)[z,s_k]\rangle && (r_4) \\
&\quad = \langle c_k(y,x) \prec [z,s_k]\rangle && \text{(déf.+comp.)} \\
&\quad = \langle [y,x] \prec [z,s_k]\rangle && (r_0\text{+comp.}) \\
&\quad = c_{k+1}(\langle y\rangle \prec x\rangle).c_{k+1}(\langle z\rangle, s_{k+1}) && \text{(déf.)}
\end{aligned}
$$

Déf. = par définition, Comp. = par compatibilité
r_i = d'après la relation (r_i).

Contrairement à ce qui s'est passé pour SC_3° , il n'est pas utile ici de conditionner z . Cela provient du fait que la composition du monoïde ne figure pas à l'intérieur dans les deux expressions égalisées de SC_4 , mais seulement à l'intérieur de l'une d'elles, à savoir $c(c(y,x).z,x)$.

L'axiome SC_5° se vérifie sans difficulté.
Soit enfin $f : \mathbb{M}_k \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}$ un homomorphisme de but un SC-monoïde total $(\overline{M},\overline{s},\overline{c})$. Soit $\langle m\rangle \in M_{k+1}^{\circ}$; alors on sait que $\langle m\rangle = \langle z_n z_{n-1}\ldots z_1\rangle$ où chaque z_i est soit de la forme $x_i \in M_k$, soit de la forme $[y_i,x_i] \in [M_k,M_k]$. Dans le premier cas, on a $\langle z_i\rangle = j_k(x_i)$, et dans le deuxième cas, on a $\langle z_i\rangle = \langle[y_i,x_i]\rangle = c_{k+1}(\langle y_i\rangle\langle x_i\rangle)$. S'il existe un homomorphisme f_1 tel que $f_1 \circ j_k = f$, on doit avoir:

$$\begin{aligned} f_1(\langle z_i\rangle) &= f(x_i) \quad \text{si } \langle z_i\rangle = j_k(x_i) , \\ f_1(\langle z_i\rangle) &= f_1(c_{k+1}(\langle y_i\rangle\langle x_i\rangle)) \\ &= \overline{c}(f(y_i),f(x_i)) \quad \text{si } \langle z_i\rangle = \langle[y_i,x_i]\rangle . \end{aligned}$$

Donc f_1 est déterminé de manière unique par l'égalité suivante:

$$f_1(\langle m\rangle) = f_1(\langle z_n\rangle).f_1(\langle z_{n-1}\rangle)\ldots f_1(\langle z_1\rangle) ,$$

et c'est évidemment un homomorphisme.

On passe alors à la limite inductive (filtrante !) des j_k dans la catégorie des monoïdes pointés. Soit $(\overline{M}^{\circ},\overline{s})$ cette limite; désignons par $i_k : (M_k^{\circ},s_k) \longrightarrow (\overline{M}^{\circ},\overline{s})$ l'homomorphisme canonique. On dispose sur $(\overline{M}^{\circ},\overline{s})$ d'une structure de SC-monoïde total : soient en effet $\overline{y}$ et $\overline{x} \in \overline{M}^{\circ}$; pour k assez grand, on trouve x et y tels que $\overline{y} = i_k(y)$ et $\overline{x} = i_k(x)$, et $c_k(y,x)$ défini. On pose alors $\overline{c}(\overline{y},\overline{x}) = i_k c_k(y,x)$. Cette définition de $\overline{c}$ ne dépend pas des représentants choisis; la vérification du fait que $(\overline{M}^{\circ},\overline{s},\overline{c})$ est bien le SC-monoïde (total) libre engendré

par le SC-monoïde partiel $(M_1^\bullet, s_1, c_1)_{P_1,Q_1,Z_1}$ est aisée.

L'engendrement à partir d'un monoïde $M^\bullet$ d'élément neutre e s'effectue de la manière suivante :

on adjoint librement un élément s à M, ce qui fournit un monoïde $M_0^\bullet$ "contenant" $M^\bullet$ comme sous-monoïde. On lui associe le SC-monoïde partiel $(M_0^\bullet, s, c)_{\emptyset,\emptyset,\emptyset}$ de domaines vides. L'adjonction de $c_o = c(e,e)$ est formelle puisque $E(c_o)$ est vide ; on obtient alors un SC-monoïde partiel $(M_1^\bullet, s, c)$ de domaines P_1, Q_1, Z_1, P_1 et Z_1 bien choisis, et Q_1 est alors constitué des seuls couples (s^p, s), pour $p \geq 0$, (e,e) et (e,c_o). La loi de cohérence c est définie par les égalités suivantes:

$$c(s^p,s) = s^p \quad , \quad c(e,e) = c_o \quad , \quad c(e,c_o) = c_o \ .$$

L'engendrement général peut alors s'effectuer comme plus haut.

On voit que $M^\bullet$ s'injecte dans $M_1^\bullet$, et on peut établir alors, par récurrence (reprenant les étapes de la construction générale ci-dessus), que $M^\bullet$ se plonge bien dans le monoïde $\overline{M}^\bullet$ sous-jacent au SC-monoïde total engendré par $M^\bullet$.
Ce dernier fait peut s'établir plus rapidement en remarquant que $M^\bullet$ se plonge bien dans le monoïde sous-jacent à un SC-monoïde particulier. Soit $E^\bullet$ le monoïde des applications de $M \times \mathbb{N}$ dans $M \times \mathbb{N}$. On le pointe par l'application de succession s définie par $s(m,n) = (m,n+1)$; enfin, à tout couple $(g,f) \in E \times E$ on fait correspondre $c(g,f) \in E$, définie par :

$$c(g,f)(m,n) = f^n(g(m,0)) \ .$$

Il est trivial de constater que $(E^\bullet, s, c)$ est un SC-monoïde total. D'autre part, si l'on pose $j(m')(m,n) = (m'.m,n)$, on définit un homomorphisme injectif j de $M^\bullet$ dans $E^\bullet$.

B. Les SCL-catégories.

Les SCL-catégories sont aux catégories de Peano ce que les SC-monoïdes sont aux monoïdes de Peano.

Définition 1. Une catégorie à successions cohérentes libres, en abrégé une SCL-catégorie, est la donnée d'un quadruplet $\underline{C}_{\sigma,k} = (\underline{C}, i, s, k)$ dans lequel:

(i) $\underline{C}$ est une catégorie,

(ii) pour tout objet C de $\underline{C}$, (i_C, s_C) est un couple de flèches ainsi disposées :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i_C"'] & NC \arrow[loop right, "s_C"] \end{tikzcd}$$

(iii) k est une loi de composition qui fait correspondre à tout couple (f,a) de flèches ainsi disposées:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"'] & C' \arrow[loop right, "a"] \end{tikzcd}$$

une flèche $k(f,a) : NC \longrightarrow C'$, cette correspondance étant soumise aux axiomes suivants:

SCL_1 $\forall \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] & C' \arrow[loop right, "a"] \end{tikzcd}$ $\quad k(f,a).s_C = a.k(f,a)$

et $k(f,a).i_C = f$

SCL_2 $\forall \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] & NC' \end{tikzcd}$ $\forall \begin{tikzcd} C' \arrow[r, "f'"] & C'' \arrow[loop right, "a"] \end{tikzcd}$ $\quad k(f',a).k(f,s_{C'}) = k(k(f',a).f\ ,\ a)$

SCL_3 $\forall C$ $\quad k(s_C.i_C\ ,\ s_C) = s_C$

$k(i_C, s_C) = Id_{NC}$

$k(i_C,\ k(i_C, Id_{NC})) = k(i_C, Id_{NC})$

On définit aisément les homomorphismes entre SCL-catégories, et on obtient ainsi la catégorie $\underline{Cat}_{SCL}$ des SCL-catégories, et les foncteurs d'oubli naturels $\underline{Cat}_{SCL} \longrightarrow \underline{Cat}$ et $\underline{Cat}_{SCL} \longrightarrow \underline{Gra}$, qui sont évidemment algébriques ! Toute catégorie de Peano est une SCL-catégorie, i.e. $\underline{Cat}_{\Sigma}$ est une

sous-catégorie pleine de $\underline{Cat}_{SCL}$. Nous verrons plus loin un exemple typique de SCL-catégorie qui n'est pas une catégorie de Peano.

La technique d'engendrement à partir de structures partielles est applicable à la construction de la SCL-catégorie libre engendrée par une catégorie $\underline{C}$. Nous ne donnerons pas ici de définition particulière de SCL-catégorie partielle, les mêmes remarques et les mêmes constructions qu'au paragraphe précédent pouvant être conduites. Nous ne décrirons pas non plus l'engendrement complet de la SCL-catégorie libre, mais seulement une première étape possible, dont l'intérêt est de permettre d'appréhender la seule difficulté dans la question de la non triplabilité des catégories de Peano sur les graphes (cf.(A.M.E.N.) à ce sujet).

Avant cela, nous devons modifier un peu le début des constructions du paragraphe précédent pour la raison suivante: soit $\underline{C}$ une catégorie ; si l'on veut construire la SCL-catégorie (resp. la catégorie de Peano) libre engendrée par $\underline{C}$, la "première idée qui vient à l'esprit" est d'adjoindre formellement , pour chaque objet C de $\underline{C}$, le couple $(i_C : C \longrightarrow NC \ , \ s_C : NC \longrightarrow NC)$; en posant formellement:

$$c_C(y,x) = k(y.i_C,x) \quad (\text{resp. } [y.i_C,x]) \ ,$$

on voudrait pouvoir décrire $\hat{\mathbb{M}} = (End(NC) \ , \ s_C, \ c_C)$ à partir du SC-monoïde (resp. monoïde de Peano) libre engendré par $M = End(C)$ et profiter ainsi des constructions précédentes. A cet effet, les deux premières étapes consistaient en l'adjonction formelle à M des deux éléments s et c_o ; ces deux premières étapes doivent être modifiées ici, pour une description correcte de $End(NC)$, de la manière suivante : il faut adjoindre librement à M deux éléments s et c_o qui <u>commutent avec les éléments de M</u> ; en effet, le plongement $End(C) \xrightarrow[j]{} End(NC)$ sera représenté com-

me restriction du foncteur N :

$$\begin{aligned} x \longmapsto N(x) &= k(i_C.x\ ,\ s_C) \\ &= k(N(x).i_C\ ,\ s_C) \\ &= c_C(N(x)\ ,\ s_C)\ ; \end{aligned}$$

alors, d'une part $N(x)$ commute avec s_C ; d'autre part , $c_o = c_C(Id_{NC}\ ,\ Id_{NC}) = k(i_C\ ,\ Id_{NC})$, d'où $N(x).c_o = c_o.N(x) = k(i_C.x\ ,\ Id_{NC})$ (axiomes SC_i ou unicité !) Notons aussi que la valeur de c_C est fixée sur les couples $(N(x)\ ,\ s_C)$ par l'égalité $c_C(N(x)\ ,\ s_C) = N(x)$.

En résumé, on doit partir avec le SC-monoïde partiel $\mathbb{M}_1 = (M_1^{\bullet}\ ,\ s,\ c_1)_{P_1,Q_1,Z_1}$ dans lequel:

(i) $M_1^{\bullet}$ est le monoïde libre engendré par $M^{\bullet}$, s, c_o et les équations suivantes :

$$x.s = s.x\ ,\quad x.c_o = c_o.x\ ,\ \text{où}\ \ x \in M\ (\approx End(C))$$
$$c_o^{\,2} = c_o\ ,\quad c_o.s = c_o\ ,$$

(ii) P_1 et Z_1 sont choisis convenablement et Q_1 est l'ensemble des : (s^p,s) , pour $p \geq 0$, (e,e) , (e,c_o) , (x,s) , $x \in M$,

(iii) c_1 est définie par les égalités suivantes:

$$c_1(s^p,s) = s^p,\ \text{pour}\ p \geq 0\ ,\ c_1(e,e) = c_o\ ,\ c_1(e,c_o) = c_o,$$
$$c_1(x,s) = x\ ,\ \text{pour}\ \ x\ \text{dans}\ \ M\ .$$

On peut alors engendrer le SC-monoïde libre $\overline{\mathbb{M}} = (\overline{M}\ ,\ s,\ c)$ à partir de $\mathbb{M}_1$ comme on l'a fait au paragraphe A. Les modifications à faire ne portaient donc que sur le passage de $M^{\bullet}$ à $\mathbb{M}_1$.

Gardant des notations similaires, voici la première étape de la construction de la SCL-catégorie libre engendrée par une catégorie $\underline{C}$, utilisant pour chaque objet C de $\underline{C}$ la construction de $\mathbb{M}_{1,C}$ à partir de $M_C \approx End(C)$, puis celle de $\overline{\mathbb{M}}_C$ à partir de $\mathbb{M}_{1,C}$.

On constitue la catégorie $\underline{C}_1$ de la manière suivante :

(i) On dispose de deux copies de $\underline{C}$: l'une est $\underline{C}$ elle-même; l'autre, notée $N\,\underline{C}$, a pour objets les NC , C objet de $\underline{C}$, et pour flèches les $N(x)$, ou simplement $\hat{x}$, x flèche de $\underline{C}$.

(ii) On relie ces deux copies,
dans le sens $\underline{C} \longrightarrow N\,\underline{C}$, en adjoignant des flèches i_C : $C \longrightarrow NC$, pour chaque objet de $\underline{C}$,
dans le sens $N\,\underline{C} \longrightarrow \underline{C}$, en adjoignant des flèches k_C : $NC \longrightarrow C$, pour chaque objet de $\underline{C}$.

(iii) Pour chaque objet C de $\underline{C}$, on dispose du monoïde $M_C^{\bullet}$ ($\approx$ End(C)) des boucles fermées en NC de la forme $\hat{x}$, $x \in \mathrm{End}(C)$; on constitue alors $\mathbb{M}_{1,C} = (M_{1,C}^{\bullet}, s_C, c_C)$ comme indiqué plus haut , et on <u>aggrandit</u> End(NC) <u>d'au moins</u> $\overline{M}_C$; la notation " $\hat{x}$ " permet de distinguer les éléments de M_C;

(iv) Disposant alors d'assez de générateurs:
. flèches de $\underline{C}$ et de $N\,\underline{C}$,
. flèches i_C et k_C , C variable ,
. flèches $\overline{x}$ des $\overline{M}_C$, C variable ,
et disposant déjà des relations existant dans $\underline{C}$, $N\,\underline{C}$, et les $\overline{M}_C$, C variable , on ajoute les relations suivantes:

(s_1) $k_C \cdot i_C = Id_C$
$k_C \cdot s_C = k_C$
$i_C \cdot k_C = c_{o,C}$, pour tout objet C de $\underline{C}$

(s_2) $k_C \cdot \hat{x} = x \cdot k_C$, pour tout objet C de $\underline{C}$ et pour tout x de End(C) ,

(s_3) $\hat{f} \cdot i_C = i_{C'} \cdot f$
$\hat{f} \cdot s_C = s_{C'} \cdot \hat{f}$, pour toute flèche $f : C \longrightarrow C'$ de $\underline{C}$.

Ces relations sont nécessitées par le choix de l'opération k , choix qui sera opéré plus loin. La catégorie $\underline{C}_1$ est ainsi définie par générateurs et relations.

Nous avons besoin des lemmes suivants, dans lesquels nous reprenons les notations et définitions précédentes.

<u>Lemme 1</u>. Quel que soit l'objet C de $\underline{C}$, quel que soit $\overline{x}$ élément de $\overline{M}_C$, il existe un unique élément $x = g(\overline{x})$ de End C et un unique entier $p \geq 0$ tel que $\overline{x}.i_C = s^p.i_C.x$.

☹ On supprime l'indice C dans les notations. Soit :

$$M^\bullet \longrightarrow M_1^\bullet \longrightarrow M_2^\bullet \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_k^\bullet \longrightarrow \ldots \longrightarrow \overline{M}$$

la chaîne d'inclusions de monoïdes intervenant dans la construction de $\overline{M}$ (paragraphe A), la première inclusion $M^\bullet \longrightarrow M_1^\bullet$ prenant en compte les modifications apportées au début du paragraphe B.

. Tout élément de M_1 s'écrit de manière unique sous l'une ou l'autre formes $s^p.c_o.\hat{x}$, $s^p.\hat{x}$.

. De là résulte déjà l'unicité, car si $\overline{x}.i = s^p.i.x = s^q.i.y$, il vient d'abord : $s^p.\hat{x}.i = s^q.\hat{y}.i$, puis en composant par k à droite : $s^p.\hat{x}.c_o = s^q.\hat{y}.c_o$, ou encore $s^p.c_o.\hat{x} = s^q.c_o.\hat{y}$, d'où $p = q$ et $x = y$.

. De là résulte aussi la validité de l'énoncé pour $k = 1$, car

$s^p.c_o.\hat{x}.i = s^p.c_o.i.x = s^p.i.x$ $\qquad$ (s_3 + 2 fois s_1)

ou $s^p.\hat{x}.i = s^p.i.x$

. Supposons le lemme établi à l'ordre k et soit $\overline{z}$ un élément de M_{k+1} ; il existe, par construction, des éléments $\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n$ tels que $\overline{z} = \overline{z}_n \ldots \overline{z}_2.\overline{z}_1$, où $\overline{z}_i$ est soit de la forme $c(\overline{y}_i, \overline{x}_i)$, avec $\overline{y}_i$ et $\overline{x}_i$ éléments de M_k , soit élément de M_k, auquel cas il est licite de supposer que $\overline{z}_{i+1}$ n'est pas élément de M_k.

- Faisons alors une récurrence sur n .
- Si $n = 1$, le seul cas à examiner est celui où $\overline{z} = c(\overline{y}, \overline{x})$ avec $\overline{x}, \overline{y}$ éléments de M_k ; on a alors:

$$\overline{z}.i = c(\overline{y}, \overline{x}).i = \overline{y}.i \qquad \text{(SC 2 + k épi.)}$$

et l'hypothèse de récurrence à l'ordre k s'applique .

- Si le résultat est vrai jusqu'à $n-1$, deux cas restent à examiner:

<u>1^{er}cas.</u> $\bar{z}_1 \in M_k$ et $\bar{z}_2 = c(\bar{y}_2,\bar{x}_2)$, avec $\bar{y}_2$, $\bar{x}_2 \in M_k$; il existe un entier $p \geq 0$ et un élément x_1 de M tels que

$$\begin{aligned}
\bar{z}_n \ldots \bar{z}_2 . \bar{z}_1 . i &= \bar{z}_n \ldots \bar{z}_2 . s^p . i . x_1 && \text{(Réc./k)} \\
&= \bar{z}_n \ldots \bar{z}_3 . \bar{x}_2^p . c(\bar{y}_2,\bar{x}_2) . i . x_1 && \text{(SC 1)} \\
&= \bar{z}_n \ldots \bar{z}_3 . \bar{x}_2^p . \bar{y}_2 . i . x_1 && \text{(SC 2 + } s_1\text{)} \\
&= \bar{z}_n \ldots \bar{z}_3 . s^q . i . x_2' . x_1 && \text{(Réc./k)} \\
&= s^r . i . y . x_2' . x_1 = s^r . i . x && \text{(Réc./n)}
\end{aligned}$$

<u>2^{ème}cas.</u> $\bar{z}_1 = c(\bar{y}_1,\bar{x}_1)$, avec $\bar{y}_1$, $\bar{x}_1 \in M_k$; on a :

$$\bar{z}_n \ldots \bar{z}_2 . c(\bar{y}_1,\bar{x}_1) . i = \bar{z}_n \ldots \bar{z}_2 . \bar{y}_1 . i \quad \text{(SC 2 + } s_1\text{)}$$

et on est ramené au premier cas si $\bar{z}_2 = c(\bar{y}_2,\bar{x}_2)$, avec $\bar{x}_2$ et $\bar{y}_2 \in M_k$, ou à l'application directe de l'hypothèse de récurrence au rang k si $\bar{z}_2 \in M_k$! ☺

<u>Lemme 2.</u> Soient C et C' deux objets de $\underline{C}$. Toute flèche $\tilde{x}$ de NC vers NC' peut s'écrire d'au moins une façon de la manière suivante :

$$\tilde{x} = \bar{x}_n . \hat{f}_n . \bar{x}_{n-1} . \hat{f}_{n-1} \ldots \bar{x}_1 . \hat{f}_1 . \bar{x}_0 \quad ,$$

où $\bar{x}_i \in \bar{M}_{C_i}$, $\hat{f}_i : NC_{i-1} \longrightarrow NC_i$ provient d'une flèche $f_i : C_{i-1} \longrightarrow C_i$ de $\underline{C}$, $C_0 = C$ et $C_n = C'$.

☹ En effet, ces flèches $\tilde{x}$, celles de $\underline{C}$, les i_C , les k_C et les relations $(s_j)_{j = 1,2,3}$ définissent une sous catégorie de $\underline{C}_1$; c'est donc, par définition de l'engendrement, la catégorie $\underline{C}_1$ elle-même ! ☺

<u>Lemme 3.</u> Pour tout objet C de $\underline{C}$, et pour tout $\tilde{x} \in End(NC)$ il existe un unique $x \in End(C)$, soit $x = g(\tilde{x})$ et un unique

entier $p \geq 0$ tels que $\tilde{x}.i_C = s^p.i_C.x$.

☹ En effet, $\tilde{x}$ s'écrit, en vertu du lemme 2 dont nous reprenons les notations :

$$\tilde{x} = \bar{x}_n.\hat{f}_n.\bar{x}_{n-1}.\hat{f}_{n-1}.\ldots.\bar{x}_1.\hat{f}_1.\bar{x}_0 \ ;$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}.i_C &= \bar{x}_n.\hat{f}_n.\bar{x}_{n-1}.\hat{f}_{n-1}.\ldots.\bar{x}_1.\hat{f}_1.\bar{x}_0.i_C \\
&= \bar{x}_n.\hat{f}_n.\bar{x}_{n-1}.\hat{f}_{n-1}.\ldots.\hat{f}_1.s^{p_1}.i_C.x_0 \qquad \text{(lemme 1)} \\
&= \bar{x}_n.\hat{f}_n. \ \ldots \ \ldots \ \ldots \hat{f}_2.\bar{x}_1.s^{p_1}.\hat{f}_1.i_C.x_0 \quad (s_3) \\
&= \bar{x}_n.\hat{f}_n. \ \ldots \ \ldots \ \ldots \hat{f}_2.\bar{x}_1.s^{p_1}.i_{C_1}.f_1.x_0 \quad (s_3) \\
&= \bar{x}_n.\hat{f}_n. \ \ldots \ \ldots \ \ldots \hat{f}_2.s^{p_2}.i_{C_1}.x'_1.f_1.x_0 \quad \text{(lemme 1)} \\
&= \ldots \\
&= s^{p_n}.i_C.x'_n.f_n. \ \ldots \ .x'_1.f_1.x_0 \ ,
\end{aligned}$$

qui est bien de la forme voulue.
L'unicité s'établit comme dans le lemme 1. ☺

On établit de la même manière le lemme suivant.

<u>Lemme 4</u>. Pour toute flèche $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(NC,NC')$, il existe une unique flèche $f = g(\tilde{f}) : C \longrightarrow C'$ et un unique entier $q \geq 0$ tels que $\tilde{f}.i_C = s^q_{C'}.i_{C'}.f$.

<u>Lemme 5</u>. $\underline{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{C}_1$ et toute flèche $h:C \longrightarrow NC'$ s'écrit de manière unique sous la forme $h = s^q_{C'}.i_{C'}.f$, où $f : C \longrightarrow C'$ est une flèche de $\underline{C}$.

☹ A priori, une flèche de source et but dans $\underline{C}$ est la composée d'un certain nombre de flèches de la forme $k_{C'}.\tilde{f}.i_C.y$, où x et y sont dans $\underline{C}$ et où $\tilde{f}$ est dans $\underline{NC}$. Pour une telle flèche, on a les égalités suivantes:

$$
\begin{aligned}
k_{C'}.\tilde{f}.i_C.y &= k_{C'}.s^q.i_{C'}.g(\tilde{f}).y && \text{(lemme 4)}\\
&= k_{C'}.s^{q-1}.i_{C'}.g(\tilde{f}).y && (s_1)\\
&= k_{C'}.i_{C'}.g(\tilde{f}).y && (s_1 \ \ q\text{-}1 \text{ fois})\\
&= g(\tilde{f}).y && \text{(encore } s_1)
\end{aligned}
$$

qui est bien une flèche de $\underline{C}$. La seconde partie du lemme s'établit tout aussi facilement.

☺

On est maintenant en mesure de définir sur la catégorie $\underline{C}_1$ une structure de SCL-catégorie partielle , en choisissant convenablement les valeurs de $k(f,a)$ pour certains couples (f,a) ainsi disposés : $C \xrightarrow{f} \cdot \circlearrowleft a$ dans $\underline{C}_1$.

Tout d'abord, les lois i et s ne sont définies que partiellement ; seulement pour les objets de $\underline{C}$: ce sont les i_C et les k_C ajoutés plus haut, pour constituer $\underline{C}_1$.

Ensuite, soit (f,a) un couple de flèches de $\underline{C}$ ainsi disposées : $C \xrightarrow{f} C' \circlearrowleft a$; nous poserons:

$$k(f,a) = k_{C'}.c_{C'}(Id_{NC'},\hat{a}).\hat{f} \ .$$

On trouve alors:

$$
\begin{aligned}
k(f,a).s_C &= k_{C'}.c_{C'}(Id_{NC'},\hat{a}).\hat{f}.s_C\\
&= k_{C'}.c_{C'}(Id_{NC'},\hat{a}).s_{C'}.\hat{f} && (s_3)\\
&= k_{C'}.\hat{a}.c_{C'}(Id_{NC'},\hat{a}).\hat{f} && \text{(SC 1)}\\
&= a.k_{C'}.c_{C'}(Id_{NC'},\hat{a}).\hat{f} && (s_2)\\
&= a.k(f,a) && \text{(déf.)}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
k(f,a).i_C &= k_{C'}.c_{C'}(Id_{NC'},\hat{a}).\hat{f}.i_C\\
&= k_{C'}.c_{C'}(Id_{NC'},\hat{a}).i_{C'}.f && (s_3)
\end{aligned}
$$

$$= k_{C'}.i_{C'}.f \qquad (SC\ 2 + s_1)$$
$$= f\ . \qquad (s_1)$$

Enfin, soit $(h,\overline{b})$ un couple de flèches de $\underline{C}_1$ ainsi disposées :

$$C \xrightarrow{h} NC' \circlearrowleft \overline{b}\ , \text{ où } \overline{b} \in \overline{M}_{C'}\ , \quad h = s^q_{C'}.i_{C'}.f,$$

avec $f : C \longrightarrow C'$ dans $\underline{C}$; nous poserons:

$$k(h,\overline{b}) = c_{C'}(s^q_{C'}, \overline{b}).\hat{f}\ .$$

On trouve alors:

$$\begin{aligned} k(h,\overline{b}).s_C &= c_{C'}(s^q_{C'}, \overline{b}).\hat{f}.s_C \\ &= c_{C'}(s^q_{C'}, \overline{b}).s_{C'}.\hat{f} && (s_3) \\ &= \overline{b}.c_{C'}(s^q_{C'}, \overline{b}).\hat{f} && (SC\ 1) \\ &= \overline{b}.k(h,\overline{b}) && (\text{déf.}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} k(h, \overline{b}).i_C &= c_{C'}(s^q_{C'}, \overline{b}).\hat{f}.i_C \\ &= c_{C'}(s^q_{C'}, \overline{b}).i_{C'}.f && (s_3) \\ &= s^q_{C'}.i_{C'}.f = h && (SC\ 2 + s_1) \end{aligned}$$

Ainsi se trouvent bien satisfaites les égalités qui figurent dans l'axiome SCL_1.

Nous allons vérifier maintenant l'égalité figurant dans l'axiome SCL_2 , en distinguant deux cas.

<u>1er cas</u>. Soit $h : C \longrightarrow NC'$, avec $h = s^q_{C'}.i_{C'}.f$,
et soit $C' \xrightarrow{f'} C'' \circlearrowleft a$ dans $\underline{C}$.

Nous calculons séparément les deux membres de l'égalité figurant dans SCL_2.

$$\begin{aligned} k(f',a).k(h,s_{C'}) &= k_{C''}.c(Id_{NC''},\hat{a}).\hat{f}'.c(s^q_{C'},s_{C'}).\hat{f} && (\text{déf.}) \\ &= k_{C''}.c(Id_{NC''},\hat{a}).\hat{f}'.s^q_{C'}.\hat{f} && (C_0) \end{aligned}$$

$$= k_{C''}.c(Id_{NC''},\hat{a}).s^q_{C''}.\hat{f}'.\hat{f} \qquad (s_3)$$

et $k(k(f',a).h,a)$

$$= k(k_{C''}.c(Id_{NC''},\hat{a}).\hat{f}'.s^q_{C'}.i_{C'}.f,a) \qquad (\text{déf.})$$

$$= k(k_{C''}.\hat{a}^q.i_{C''}.f'.f,a) \qquad (s_3,\ SC_1,\ SC_2,\ s_1)$$

$$= k(k_{C''}.i_{C''}.a^q.f'.f,a) \qquad (s_3)$$

$$= k(a^q.f'.f,a) \qquad (s_1)$$

$$= k_{C''}.c(Id_{NC''},\hat{a}).\hat{a}^q.\hat{f}'.\hat{f} \ . \qquad (\text{déf.})$$

Reste à établir que $c(Id,\hat{a}).s^q = c(Id,\hat{a})\hat{a}^q$;

or $c(Id,\hat{a}).s^q = c(Id,\hat{a}).c(s^q,s) \qquad (C_0)$

$$= c(c(Id,\hat{a}).s^q,\hat{a}) \qquad (SC_4)$$

$$= c(\hat{a}^q.c(Id,\hat{a}),\hat{a}) \qquad (SC_1 \text{ q fois})$$

$$= c(\hat{a}^q.c(Id,\hat{a}).c_o,\hat{a}) \qquad (C_3)$$

$$= c(\hat{a}^q.c_o,\hat{a}) \qquad (SC_2)$$

$$= c(\hat{a}^q,\hat{a}) \qquad (C_3)$$

et $c(Id,\hat{a}).\hat{a}^q = c(Id,\hat{a})c(\hat{a}^q,s) \qquad (\text{struc.de } M_1)$

$$= c(c(Id,\hat{a}).\hat{a}^q,\hat{a}) \qquad (SC_4)$$

$$= c(c(Id,\hat{a}).\hat{a}^q.c_o,\hat{a}) \qquad (C_3)$$

$$= c(c(Id,\hat{a}).c_o.\hat{a}^q,\hat{a}) \qquad (\text{struc.de } M_1)$$

$$= c(c_o.\hat{a}^q,\hat{a}) \qquad (SC_2)$$

$$= c(\hat{a}^q.c_o,\hat{a}) \qquad (\text{struc.de } M_1)$$

$$= c(\hat{a}^q,\hat{a}) \qquad (C_3)$$

<u>2ème cas</u>. Soit toujours $h : C \longrightarrow NC'$, avec $h = s^q_{C'}.i_{C'}.f$, et soit $C' \xrightarrow{h'} NC'' \circlearrowleft \overline{b}$, avec $h' = s^p_{C''}.i_{C''}.f'$ et $\overline{b} \in \overline{M}_{C''}$. Nous calculons de nouveau, séparément, les deux membres de l'égalité figurant dans SCL_2.

$k(h',\overline{b}).k(h,s_{C'})$

$$= c_{C''}(s^p_{C''},\overline{b}).\hat{f}'.c_{C'}(s^q_{C'},s_{C'}).\hat{f} \qquad (\text{déf.})$$

$$= c_{C''}(s^p_{C''},\overline{b}).\hat{f}'.s^q_{C'}.\hat{f} \qquad (C_0)$$

$$= c_{C''}(s^p_{C''},\overline{b}).s^q_{C''}.\hat{f}'.\hat{f} \qquad (s_3)$$

et, d'autre part, on voit que :

$$k(h',\overline{b}).\ h = c_{C''}(s^p_{C''},\overline{b}).\hat{f}'.s^q_{C'}.i_{C'}.f$$
$$= \overline{b}^q.s^p.i_{C''}.f'.f\ ;$$

posons alors, en vertu du lemme 4, $\overline{b}^q.s^p.i_{C''} = s^r_{C''}.i_{C''}.g$, avec $g \in \underline{C}$; on peut donc calculer :

$$k(k(h',\overline{b}).h,\overline{b})$$
$$= c(s^r_{C''},\overline{b}).\hat{g}.\hat{f}'.\hat{f} \qquad (\text{déf.})$$

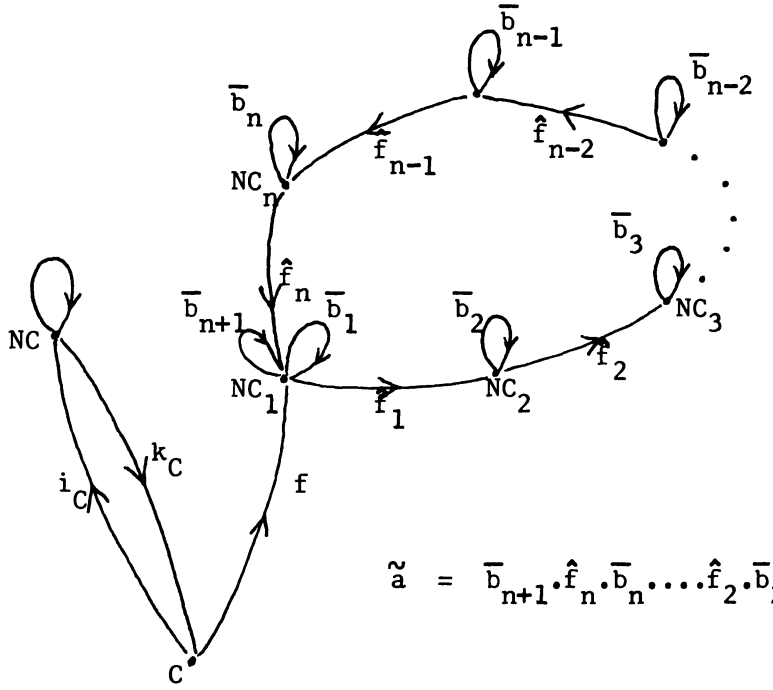
et il reste à prouver l'égalité : $c(s^p_{C''},\overline{b}).s^q_{C''} = c(s^r_{C''},\overline{b}).\hat{g}$.
Laissons tomber l'indice C" pour alléger les écritures:

$$\begin{aligned}
c(s^r,\overline{b}).\hat{g} &= c(s^r,\overline{b}).c(\hat{g},s) && (\text{struc.de } M_1)\\
&= c(c(s^r,\overline{b}).\hat{g},\overline{b}) && (SC_4)\\
&= c(c(s^r,\overline{b}).\hat{g}.c_o,\overline{b}) && (C_3)\\
&= c(c(s^r,\overline{b}).c_o.\hat{g},\overline{b}) && (\text{struc.de } M_1)\\
&= c(s^r.c_o.\hat{g},\overline{b}) && (SC_2)\\
&= c(s^r.i.g.k,\overline{b}) && (s_1 + s_2)\\
&= c(\overline{b}^q.s^p.i.k,\overline{b}) && (\text{déf.})\\
&= c(\overline{b}^q.s^p.c_o,\overline{b}) && (s_1)\\
&= c(\overline{b}^q.s^p,\overline{b}) \quad , && (C_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et}\quad c(s^p,\overline{b}).s^q &= c(s^p,\overline{b}).c(s^q,s) && (C_0)\\
&= c(c(s^p,\overline{b}).s^q,\overline{b}) && (SC_4)\\
&= c(\overline{b}^q.c(s^p,\overline{b}),\overline{b}) && (SC_1)\\
&= c(\overline{b}^q.s^p,\overline{b}) && (C_3 \text{ deux fois})
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de validité de l'axiome SCL_2 pour la loi partielle $k(.,.)$. La vérification de SCL_3 est immédiate, le passage de $c(.,.)$ à $k(.,.)$ n'offrant aucune difficulté au niveau des "constantes" des théories en question.
On voit que $(\underline{C}_1\ ,\ i,\ s,\ k)$ est une SCL-catégorie partielle en un sens qu'on peut préciser maintenant : non seulement les

lois i et s sont partielles (définies uniquement pour les objets C de $\underline{C}$) , mais encore la loi k , qui est "doublement" partielle, d'abord à cause de la limitation aux objets C de $\underline{C}$, puis, pour ces objets, à certains couples (f,a) qui en sont issus, et non pas a priori à tous, car nous n'avons pas défini $k(f,\tilde{a})$, lorsque $\tilde{a}$ est une boucle bouclée dans $N\underline{C}$ non réductible à une boucle $\bar{a}$ (d'un $\bar{M}_C$!) . Nous voyons que s'amorce ici une autre étape de la construction récurrente de la SCL-catégorie libre engendrée par $\underline{C}$.



$$\tilde{a} = \bar{b}_{n+1}.\hat{f}_n.\bar{b}_n....\hat{f}_2.\bar{b}_2.\hat{f}_1.\bar{b}_1 .$$

Nous terminerons en donnant un exemple de SCL-catégorie (totale) qui n'est pas une catégorie de Peano , ce qui nous assurera aussi de l'existence de SC-monoïdes qui ne sont pas des monoïdes de Peano. Appelons $\underline{L}$ cette catégorie, à définir.
Les objets de la catégorie nommée $\underline{L}$ sont les $\mathbb{N}^p$, avec $p \geq 2$.
On convient de désigner un élément de $\mathbb{N}^{p+1}$ par (V,n) où V est un élément de $\mathbb{N}^p$ et n un entier.

On décrit alors par récurrence l'ensemble des flèches de $\underline{L}$. Considérons l'ensemble L'_0 des applications suivantes :

$$i_p : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}^{p+1}$$
$$V \longmapsto (V,1)$$

$$\text{et} \quad s_p : \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}^{p+1}$$
$$(V,n) \longmapsto (V,n+2) \quad .$$

On constitue la catégorie d'applications $\underline{L}_0$ engendrée par L'_0 . Supposons construite la catégorie d'applications $\underline{L}_m$ et indiquons comment s'effectue le passage de $\underline{L}_m$ à $\underline{L}_{m+1}$. On constitue l'ensemble d'applications L'_{m+1} en ajoutant à L_m <u>toutes</u> les applications $k'_{(h,a)}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(i) (h,a) est un couple d'applications appartenant à L_m et ainsi disposées : $\mathbb{N}^p \xrightarrow{h} \mathbb{N}^q \circlearrowleft a$,

(ii) $k'_{(h,a)} \circ i_p = h$

$k'_{(h,a)} \circ s_p = a \circ k'_{(h,a)}$.

L'ensemble L'_{m+1} engendre alors une catégorie d'applications $\underline{L}_{m+1}$. La catégorie $\underline{L}$ est la réunion des catégories $\underline{L}_m$.

Voyons ce que les conditions (i) et (ii) imposent à $k'_{(h,a)}$:

. Si $(V,2n+1) \in \mathbb{N}^{p+1}$, on a :

$$\begin{aligned} k'_{(h,a)}(V,2n+1) &= k'_{(h,a)} \circ s_p^n (V,1) \\ &= k'_{(h,a)} \circ s_p^n \circ i_p(V) \\ &= a^n \circ k'_{(h,a)} \circ i_p(V) \\ &= a^n(h(V) \quad ; \end{aligned}$$

donc la valeur de $k'_{(h,a)}(V,2n+1)$ est bien déterminée, pour tout V et tout n , par la donnée du couple (h,a) .

. Si $(V,2n) \in \mathbb{N}^{p+1}$, on a :

$$\begin{aligned} k'_{(h,a)}(V,2n) &= k'_{(h,a)} \circ s_p^n(V,0) \\ &= a^n \circ k'_{(h,a)}(V,0) \quad , \end{aligned}$$

et on peut choisir la valeur de $k'_{(h,a)}(V,0)$ arbitrairement, a priori !

Pour définir la loi binaire partielle k qui fera de $(\underline{L}\ , i, s, k)$ une SCL-catégorie, on choisit, parmi les applications $k'_{(h,a)}$ possibles, les suivantes :

.si (h,a) n'est pas de la forme $(s_p^m \circ i_p, s_p)$, alors

$k_{(h,a)}(V,0) = (p_1 h(V),0)$, où l'on convient que si $h(V) = (W,q)$, $p_1 h(V) = W$

.si $(h,a) = (s_p^m \circ i_p, s_p)$, alors

$k_{(h,a)}(V,0) = (V,2m)$

La vérification du fait que $(\underline{L}\ , i, s, k)$ est bien une SCL-catégorie est laissée au lecteur : elle est longue, mais ne présente pas de difficulté particulière.

Bien sûr, il ne peut s'agir en aucun cas d'une catégorie de Peano puisque, pour un même couple (h,a), il y a une multitude de $k'_{(h,a)}$ possibles !...

Bibliographie.

T.A.E.P. (a) L.COPPEY, Théories algébriques et extension de préfaisceaux, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol.XIII,1 (1972)

T.A.E.P. (b) L.COPPEY, Compléments à l'article "Théories algébriques et extension de préfaisceaux" , Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol XIII,3 (1972)

S.B.D.S. L.COPPEY, Sur quelques structures de base pour définir les structures, Diagrammes, Vol.7(1982)

E.D.S.A. C.LAIR, Thèse d'Etat, Esquissabilité des structures algébriques, Multigraphié, Amiens (1977)

C.T.F.A. C.LAIR, Condition syntaxique de triplabilité des foncteurs algébriques esquissés, Diagrammes, Vol.1, Paris 1979.

A.M.E.N. L.COPPEY, C.LAIR, Algébricité,Monadicité,Esquissabilité,Non-algébricité, à paraître dans Diagrammes, Vol.13, Juillet 1985 .

R.E.C.S. S.EILENBERG, C.ELGOT, Recursiveness, Academic press, New York and London, 1970.

R.E.C.U. JP.AZRA, B.JAULIN, Récursivité, Collection "Programmation", Gauthier-Villars, Paris,Bruxelles,Montréal, 1973.

U.S.R.U. R.MIJOULE,L'universalité des semi-fonctions récursives universelles, Diagrammes, Vol.12 (1984)