C. HENRY

Sur quelques problèmes de plongements en algèbre

Diagrammes, tome 10 (1983), exp. n° 1, p. 1-56
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1983__10__A1_0>

Diagrammes, Vol. 10 , 1983.

A.M.S. Sub. Class.
18 C 10 , 08 A 30,
08 B 05 , 08 B 20.

SUR QUELQUES PROBLEMES DE PLONGEMENTS EN ALGEBRE (+)

C. HENRY.

Introduction.

On sait qu'une structure algébrique S d'un type donné engendre toujours une structure algébrique S' d'un type plus fort donné: on dispose alors d'un homomorphisme de S vers S' et il est particulièrement intéressant de savoir pour quelles structures S cet homomorphisme est un plongement (i. e. est injectif) et, a fortiori, s'il est un plongement pour toute structure S .
Par exemple (pour fixer les idées), tout groupe engendre un groupe abélien dans lequel il ne se plonge que lorsqu'il est lui-même commutatif ! De même, tout monoïde abélien engendre un groupe abélien dans lequel il ne se plonge que s'il est régulier. Par contre, toute algèbre de Lie sur un anneau unitaire, contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau unitaire, se plonge dans son algèbre enveloppante, ou encore, tout ensemble ("de générateurs") se plonge dans l'algèbre libre (d'un quelconque type ... non trivial - voir le §1 du Chap. IV !) qu'il engendre (c'est au-moins intuitivement évident).

En Algèbre, pour établir de telles propriétés de plongement, on procède, classiquement, en décrivant aussi explicitement que possible la structure S' à partir de la structure S , supposée connue: lorsque cette description est suffisamment simple, il est assez facile de répondre; cependant, en général, cette description utilise des quotients d'ensembles (construits à partir de

(+) Thèse de 3ème Cycle, préparée sous la direction de C. Lair, présentée à l'Université Paris 7, devant le Jury constitué de MM. M. Zisman (Président), J.-Y. Girard, L. Coppey et C. Lair.

S) ce qui empêche, pratiquement, de constater que S se plonge dans S' ; il faut alors procéder au "coup par coup" , i. e. utiliser des méthodes propres aux types de structures considérés et à la structure S concernée (et encore, lorsque c'est possible, ou lorsque l'on y parvient!).

On sait, au moins depuis C. Ehresmann et F. W. Lawvere (voir (E.T.S.A.) et (S.A.A.T.)) qu'on peut décrire (i. e. définir) un type de structure algébrique au moyen d'une théorie (de Lawvere) ou, plus généralement, d'une esquisse projective, i. e. au moyen d'une catégorie particulière munie de produits finis, ou de limites projectives. Si T et T' sont deux telles théories, T' est "plus fort" que T si l'on dispose d'un foncteur de T vers T' qui préserve les produits finis; alors, beaucoup des propriétés (dites sémantiques) des algèbres de type T (resp. T') et du foncteur d'oubli canonique de la catégorie des algèbres de T' vers celle des algèbres de T ne résultent, en fait, que des seules propriétés (dites syntaxiques) des catégories T et T' et du foncteur qui les compare: de ce point de vue, il est naturel d'essayer de traduire les propriétés de plongement des structures S dans les structures S' qu'elles engendrent en termes de propriétés de T et T' et du foncteur qui les compare. Ainsi, Lawvere a établi qu'une condition nécessaire (syntaxique, par conséquent) pour que toute structure S se plonge dans la structure S' qu'elle engendre est que le foncteur qui compare T à T' soit injectif. Plus précisément, en (C.S.D.P.) est énoncée une condition suffisante syntaxique qui, lorsqu'elle est vérifiée, assure que toute structure S se plonge dans la structure S' qu'elle engendre.

Le but du présent travail est de montrer que la condition suffisante de (C.S.D.P.) est effective, i. e. permet, dans la pratique, à l'aide de méthodes combinatoires assez simples et systématiques, de conclure à des propriétés de plongements: pour ce faire, nous avons appliqué cette condition dans des cas particuliers soigneusement choisis, en raison de leur caractère générique. En particulier, nous obtenons:

- une caractérisation des homomorphismes $h: M \longrightarrow M'$ de monoïdes pour lesquels on peut affirmer que tout M-ensemble se plonge dans le M'-ensemble libre qu'il engendre (cette caractérisation est à rapprocher de la caractérisation, en terme de pureté, des homomorphismes $V \longrightarrow V'$ d'anneaux unitaires commutatifs pour lesquels on peut affirmer que tout V-module se plonge dans le V'-module libre qu'il engendre),

- une démonstration purement combinatoire, et relativement simple, du fait que toute algèbre de Lie sur un anneau commutatif contenant $\mathbb{Q}$ se plonge dans son algèbre enveloppante,

- la preuve que tout ensemble (de générateurs) se plonge dans la structure algébrique (d'un type quelconque ... non trivial) qu'il engendre librement (ce qui n'a rien de surprenant ... mais dont nous ne connaissons pas de démonstration, en tout cas aussi simple!),

- la preuve que, si $T \dashrightarrow T'$ est une comparaison de deux types de structures algébriques (i. e. si $T \longrightarrow T'$ est un homomorphisme de théories de Lawvere), alors les structures de type T qui sont <u>régulières</u> pour T', i. e. qui se plongent dans les structures de types T' qu'elles engendrent, sont encore des structures (essentiellement) algébriques, i. e. projectivement esquissables; ainsi, les monoïdes réguliers sont, parmi les monoïdes, ceux qui se plongent dans les groupes qu'ils engendrent: qu'ils soient projectivement esquissables n'a rien de surprenant; par contre, les semi-groupes réguliers (au sens précédent) sont les semi-groupes qui vérifient les conditions de Lambek, ou Malcev (voir (A.T.S.G.)): il n'est pas trivial, a priori, d'établir qu'ils sont également projectivement esquissables!

Les résultats ainsi obtenus complètent ceux de (C.S.D.P.), ils les précisent (notamment, dans l'énoncé de la condition suffisante syntaxique de plongement que l'on s'attache à appliquer systématiquement) et en prouvent l'efficacité. Ils fournissent une réponse complète à la question posée, sur ce sujet, en (S.A.A.T.) et ils infirment, en partie, certaines des affirmations de (A.P.A.T.).

Le lecteur trouvera au Chapitre I, tous les rappels de terminologie et notations (ne faisant pas partie de la théorie "standard" des Catégories) que nous utilisons par la suite. Il y trouvera également, outre l'énoncé précis des résultats généraux que nous utilisons (notamment, celui de la condition syntaxique suffisante de plongement) une présentation rapide (à la fin du dernier paragraphe) de la succession des Chapitres I à IV, motivée par une étude des conditions, de moins en moins particulières, d'application de cette condition suffisante. En Appendice, nous avons regroupé quelques considérations, non exclusivement syntaxiques, mais suffisamment systématiques pour pouvoir aboutir à quelques résultats notables.

12 bis Rue JONQUOY,
75 014 PARIS
FRANCE.

CHAPITRE I: GENERALITES.

1. Terminologie et notations préliminaires.

Si $\underline{C}$ est une catégorie, on note $Gr(\underline{C})$ son graphe orienté sous-jacent.

Si $F: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est un foncteur entre deux catégories et si C est un objet de $\underline{C}$, on dit que F est C-fidèle si, et seulement si, la restriction de F à $Hom_{\underline{C}}(C,C)$ est injective.

Pour tout entier $n \geq 0$, on note z_n la catégorie représentée par:

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow \quad \ldots\ldots \longrightarrow 2n-1 \longleftarrow 2n \longrightarrow 2n+1 \quad .$$

Si $\underline{C}$ est une catégorie, un foncteur $Z: z_n \longrightarrow \underline{C}$ est appelé zigzag de $\underline{C}$. On dit qu'un tel zigzag est fermé en C si, et seulement si, $Z(1)=C=Z(2n+1)$.

2. Théories de Lawvere.

On rappelle que $/\underline{T}/ = (\underline{T} , ((\pi(n,i))_{1 \leq i \leq n})_{n \geq 1})$ est une théorie de Lawvere si, et seulement si (voir (S.A.A.T.)):

- $\underline{T}$ est une catégorie ayant une famille dénombrable $(A^n)_{n \geq 0}$ d'objets (on pose alors $A^1 = A$ et $A^0 = 1$) ,
- pour tout entier $n \geq 1$, la famille $(\pi(n,i): A^n \longrightarrow A)_{1 \leq i \leq n}$ de flèches de $\underline{T}$ est un produit, dit distingué, dans $\underline{T}$,
- $A^0 = 1$ est un objet final, distingué, de $\underline{T}$ et $\pi(1,1) = Id_A$.

Dans ces conditions, pour tout $n \geq 1$, on note $\delta_n: A \longrightarrow A^n$ l'unique flèche de $\underline{T}$ telle que $\pi(n,i).\delta_n = Id_A$, pour tout $1 \leq i \leq n$, (en particulier, on a donc $\delta_1 = Id_A$).

De même, pour tous m , $n \geq 0$, si $(f_i : A^m \longrightarrow A)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de flèches de $\underline{T}$, on note $[f_i]_{1 \leq i \leq n} : A^m \longrightarrow A^n$ (avec tous les abus de notation que cela suppose, si n ou m sont nuls) l'unique flèche de $\underline{T}$ telle que $\pi(n,i).[f_i]_{1 \leq i \leq n} = f_i$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

Si $/\underline{T}/$ et $/\underline{T}'/$ sont deux théories de Lawvere, on dit que $/H/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme si, et seulement si:

- $H : \underline{T} \longrightarrow \underline{T}'$ est un foncteur tel que $H(A^n) = A'^n$, pour tout $n \geq 0$,
- $H(\pi(n,i)) = \pi'(n,i) : A'^n \longrightarrow A'$, pour tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq i \leq n$,

(autrement dit, un homomorphisme est un foncteur qui respecte les objets - i. e. la graduation des objets - et les produits distingués dans $\underline{T}$ et $\underline{T}'$).

3. Algèbres d'une théorie de Lawvere.

Si $/\underline{T}/$ est une théorie de Lawvere, on dit que $F : /\underline{T}/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est une algèbre (ou une réalisation) de $/\underline{T}/$ si, et seulement si:

- $F : \underline{T} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un foncteur,
- $F(A^0)$ est un ensemble à un élément,
- pour tout $n \geq 1$, la famille $(F(\pi(n,i)) : F(A^n) \longrightarrow F(A))_{1 \leq i \leq n}$ est un produit dans Ens .

On note, alors, $\mathrm{Ens}^{/\underline{T}/}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{T}}$ dont les objets sont ces algèbres.

Dans ces conditions, on sait que:

- le plongement de Yoneda $y : \underline{T}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{T}}$ admet une restriction

$$Y : \underline{T}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{T}/} \quad ,$$

- le foncteur "évaluation en A " $ev_A : \mathrm{Ens}^{\underline{T}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ admet une restriction

$$Ev_A : \mathrm{Ens}^{/\underline{T}/} \longrightarrow \mathrm{Ens} \quad ,$$

- le foncteur Ev_A admet un adjoint à gauche

$$Q_A : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{T}/} \quad .$$

De plus, il est immédiat d'établir que:

- naturellement en tout $n \geq 0$, on a $Y(A^n) \simeq Q_A(\underline{n})$ (où $\underline{0} = \emptyset$ et $\underline{n} = \{1,\ldots,n\}$, si $n \geq 1$) ,
- $Y\colon \underline{T}^{op} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}/}$ est un foncteur plein, fidèle et dense.

Si $/H/\colon /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme de théories de Lawvere, il induit un foncteur d'oubli canonique $Ens^{/H/}\colon Ens^{/\underline{T}'/} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}/}$ admettant un adjoint à gauche $G\colon Ens^{/\underline{T}/} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}'/}$ de sorte que les deux diagrammes ci-dessous commutent:

$$\begin{tikzcd} Ens^{/\underline{T}'/} \arrow[r] \arrow[d, "Ens^{/H/}"'] & Ens^{\underline{T}'} \arrow[d, "Ens^{H}"] \\ Ens^{/\underline{T}/} \arrow[r] & Ens^{\underline{T}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{T}'^{op} \arrow[r] & Ens^{/\underline{T}'/} \\ \underline{T}^{op} \arrow[r] \arrow[u, "H^{op}"] & Ens^{/\underline{T}/} \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd} \quad .$$

Ainsi, pratiquement, pour décrire une théorie $/\underline{T}/$ dont la catégorie des algèbres est supposée, a priori, connue, on décrira $\underline{T}^{op}$: c'est la sous-catégorie pleine de cette catégorie d'algèbres dont les objets sont les structures libres (relativement au foncteur d'oubli canonique vers Ens) à un nombre fini n (quelconque) de générateurs.
De même, pour décrire un homomorphisme $/H/\colon /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$, où $/\underline{T}/$ et $/\underline{T}'/$ sont décrites comme précédemment, il suffit alors de préciser la restriction de l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli (supposé connu), de la catégorie des algèbres de $/\underline{T}'/$ vers celle des algèbres de $/\underline{T}/$, sur les algèbres de $/\underline{T}/$ libres à un nombre fini de générateurs.

4. Foncteurs à plongements et foncteurs d'oubli à plongements libres.

Supposons que $U\colon \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur admettant un adjoint à gauche $G\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ et notons $e\colon Id_{\underline{C}} \Longrightarrow U.G : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ la transformation naturelle associée à cette adjonction. On dira que U est à plongements si, et seulement si:

- pour tout objet C de $\underline{C}$, la flèche $e_C\colon C \longrightarrow UG(C)$ est un monomorphisme de $\underline{C}$,

(autrement dit, U est à plongements si, et seulement si, toute "structure" de $\underline{C}$ se "plonge" dans la structure de $\underline{C}'$ qu'elle engendre).

Il est facile de vérifier que:

Proposition 1. Si $U: \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur admettant un adjoint à gauche $G: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ alors, U est à plongements si, et seulement si, G est fidèle.

Supposons, maintenant, que $/H/: /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme de théories de Lawvere. Alors, le foncteur $U = \mathrm{Ens}^{/H/}: \mathrm{Ens}^{/\underline{T}'/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{T}/}$ admet un adjoint à gauche $G: \mathrm{Ens}^{/\underline{T}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{T}'/}$.
Dans ces conditions, nous dirons que U est à plongements libres si, et seulement si:

- pour tout $n \geq 0$, la flèche $e_{Y(A^n)}: Y(A^n) \longrightarrow UG(Y(A^n)) = U(Y'(A'^n))$ est un monomorphisme de $\mathrm{Ens}^{/\underline{T}/}$,

(autrement dit, si et seulement si les algèbres libres de $/\underline{T}/$, à un nombre fini de générateurs, se plongent dans les algèbres de $/\underline{T}'/$ qu'elles engendrent, qui sont des algèbres libres de $/\underline{T}'/$ ayant le même nombre de générateurs).
Evidemment, si le foncteur d'oubli $U = \mathrm{Ens}^{/H/}$ est à plongements, il est à plongements libres mais la réciproque est fausse en général.
Précisément, on montre facilement (en utilisant le fait que les plongements de Yonéda sont pleins, fidèles et denses) que:

Proposition 2 . Si $/H/: /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme de théories de Lawvere, pour que le foncteur d'oubli canonique $\mathrm{Ens}^{/H/}: \mathrm{Ens}^{/\underline{T}'/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{T}/}$ soit à plongements libres, il faut et il suffit que $H: \underline{T} \longrightarrow \underline{T}'$ soit un foncteur fidèle. Pour que $\mathrm{Ens}^{/H/}$ soit à plongements, il est donc nécessaire que H soit fidèle.

5. Condition syntaxique suffisante pour qu'un foncteur d'oubli soit à plongements.

Supposons que $/H/: /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme entre deux théories de Lawvere, la proposition 2 précédente énonce une condition nécessaire syntaxique (i. e. ne portant que sur $H: \underline{T} \longrightarrow \underline{T}'$) pour que $\mathrm{Ens}^{/H/}$ soit à plongements. Une condition syntaxique suffisante pour que $\mathrm{Ens}^{/H/}$ soit

<u>à plongements</u> est que (voir (C.S.D.P.)):

(CS) si $Z: z_n \longrightarrow \underline{T}$ est un zigzag de $\underline{T}$ tel que $Z(1) = A = Z(2n+1)$ et si l'on dispose d'un diagramme commutatif de $\underline{T}'$ tel que ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 & \cdots \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "Z"] & 2n-1 & 2n \arrow[l] \arrow[r] & 2n+1 \\
A & A^{p_2} \arrow[l] \arrow[r] & A^{p_3} & \cdots \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "H"] & A^{p_{2n-1}} & A^{p_{2n}} \arrow[l] \arrow[r] & A \\
A' \arrow[drrr, "t'_1 = Id_{A'}"'] & A'^{p_2} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[drr, "t'_2"] & A'^{p_3} \arrow[dr, "t'_3"] & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & A'^{p_{2n-1}} \arrow[dl, "t'_{2n-1}"'] & A'^{p_{2n}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dll, "t'_{2n}"'] & A' \arrow[dlll, "t'_{2n+1} = Id_{A'}"] \\
& & & A' & & &
\end{tikzcd}$$

alors, il existe un foncteur $N: z_m \longrightarrow z_n$ tel que $N(1) = 1$ et $N(2m+1) = 2n+1$ et un diagramme commutatif de $\underline{T}$ tel que ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 & \cdots \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "Z.N"] & 2m-1 & 2m \arrow[l] \arrow[r] & 2m+1 \\
A \arrow[drrr, "t_1 = Id_A"'] & A^{p_{N(2)}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[drr, "t_2"] & A^{p_{N(3)}} \arrow[dr, "t_3"] & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & A^{p_{N(2m-1)}} \arrow[dl, "t_{2m-1}"'] & A^{p_{N(2m)}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dll, "t_{2m}"'] & A \arrow[dlll, "t_{2m+1} = Id_A"] \\
& & & A & & &
\end{tikzcd}$$

Cette condition précise celle qui est énoncée en (C.S.D.P.) et se démontre d'une manière tout à fait analogue. On établit facilement que si /H/ vérifie cette condition, alors il est fidèle. On remarquera, enfin, que cette condition <u>n'énonce pas</u> que l'image par H du second diagramme commutatif doit être le premier : elle énonce simplement que s'il existe un diagramme commutatif tel que le premier, alors il existe un diagramme commutatif tel que le second. Bien sûr, il est naturel, pour établir qu'un homomorphisme $/H/$ vérifie (CS) (et donc prouver qu'il induit un foncteur d'oubli à plongements), de commencer par essayer de prouver que, si l'on dispose d'un diagramme commutatif tel que le premier, il est nécessairement image par H d'un diagramme commutatif tel que le second (où $n = m$) : c'est ce cas qui est étudié au Chapitre II . A défaut d'une telle éventualité, il est normal d'essayer d'associer (par constructions fonctorielles) à un diagramme commutatif tel que le premier un diagramme commutatif tel que le second, par exemple en supposant que $H: \underline{T} \longrightarrow \underline{T}'$ admet une sorte d'inverse à gauche: c'est ce procédé qui est étudié au Chapitre III. Si ces deux premières méthodes échouent, c'est que le cas considéré est "vraiment" général, il reste donc à l'étudier comme tel: des exemples de cette nature sont traités dans le Chapitre IV.

CHAPITRE II: CAS DES HOMOMORPHISMES DIVISIBLES.

1. Homomorphismes divisibles.

Si $/H/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme entre deux théories de Lawvere, on dit qu'il est divisible si, et seulement si:

- le foncteur $H : \underline{T} \longrightarrow \underline{T}'$ est A-fidèle (voir Chap. I, §1),
- pour toutes flèches $t_1 : A^n \longrightarrow A^m$ et $t_2 : A^n \longrightarrow A^p$ de $\underline{T}$ et toute flèche $t' : A'^m \longrightarrow A'^p$ de $\underline{T}'$ telles que $t'.H(t_1) = H(t_2)$, il existe une flèche $t : A^m \longrightarrow A^p$ de $\underline{T}$ telle que $H(t) = t'$ et $t.t_1 = t_2$.

Dans ces conditions, nous avons:

Proposition 3. Si $/H/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme divisible, le foncteur $Ens^{/H/} : Ens^{/\underline{T}'/} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}/}$ est à plongements (voir Chap. I, §4).

Preuve. Pour montrer que $Ens^{/H/}$ est à plongements, il suffit d'établir que l'homomorphisme $/H/$ vérifie la condition (CS) (voir Chap. I, §5).
Pour ce faire, supposons que

$$A = A_1 \xleftarrow[x_1]{} A_2 \xrightarrow[x_2]{} A_3 \longleftarrow \quad \cdots\cdots \quad \longrightarrow A_{2n-1} \xleftarrow[x_{2n-1}]{} A_{2n} \xrightarrow[x_{2n}]{} A_{2n+1} = A$$

est un zigzag de $\underline{T}$, fermé en A, et supposons que

$$\begin{tikzcd}
A' = H(A_1) = A'_1 \arrow[drr, dashed, "Id_{A'} = g'_1"'] & A'_2 \arrow[l, "H(x_1)"'] \arrow[dr, "g'_2"] & \cdots\cdots & A'_{2n} \arrow[r, "H(x_{2n})"] \arrow[dl, "g'_{2n}"'] & A'_{2n+1} = H(A_{2n+1}) = A' \arrow[dll, dashed, "g'_{2n+1} = Id_{A'}"] \\
 & & A' & &
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de $\underline{T}'$.

Comme $/H/$ est divisible, il existe une flèche $g_3 : A_3 \longrightarrow A$ de $\underline{T}$ telle que $g_3 . x_2 = \mathrm{Id}_A . x_1 = x_1$.

Supposons que, si $1 < p < n$, on dispose du diagramme commutatif de $\underline{T}$ suivant:

$$
\begin{tikzcd}
A = A_1 \arrow[drrr, "\mathrm{Id}_A = g_1"'] & A_2 \arrow[l, "x_1"'] \arrow[r, "x_2"] \arrow[drr, "g_2"] & A_3 \arrow[dr, "g_3"] & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & A_{2p-1} \arrow[dl, "g_{2p-1}"'] & A_{2p} \arrow[l, "x_{2p-1}"'] \arrow[r, "x_{2p}"] \arrow[dll, "g_{2p}"] & A_{2p+1} \arrow[dlll, "g_{2p+1}"] \\
 & & & A & & &
\end{tikzcd}
$$

où $H(g_i) = g'_i$, pour tout $1 \leq i \leq 2p+1$.

Comme $/H/$ est divisible, il existe une flèche $g_{2p+3} : A_{2p+3} \longrightarrow A$ de $\underline{T}$ telle que $g_{2p+3} . x_{2p+2} = g_{2p+1} . x_{2p+1}$ et $H(g_{2p+3}) = g'_{2p+3}$.

Au total, il existe bien un diagramme commutatif de $\underline{T}$ tel que ci-dessous:

$$
\begin{tikzcd}
A = A_1 \arrow[drrr, dashed, "\mathrm{Id}_A = g_1"'] & A_2 \arrow[l, dashed, "x_1"] \arrow[r, "x_2"'] \arrow[drr, dashed, "g_2"] & A_3 \arrow[dr, "g_3"] & \cdots\cdots \arrow[l] \arrow[r] & A_{2n-1} \arrow[dl, "g_{2n-1}"'] & A_{2n} \arrow[l, "x_{2n-1}"] \arrow[r, "x_{2n}"'] \arrow[dll, "g_{2n}"] & A_{2n+1} = A \arrow[dlll, dashed, "g_{2n+1}"] \\
 & & & A & & &
\end{tikzcd}
$$

où $H(g_i) = g'_i$, pour tout $1 \leq i \leq 2n+1$.

On a, en particulier, $H(g_{2n+1}) = \mathrm{Id}_{A'}$. Comme H est A-fidèle, on en déduit $g_{2n+1} = \mathrm{Id}_A$ et la condition (CS) est bien vérifiée. D'où la conclusion. Fin de la preuve.

2. Application aux monoïdes d'opérateurs.

Supposons que M est un sous-monoïde d'un monoïde M' et notons $h : M \longrightarrow M'$ l'homomorphisme injection canonique.

On dit que M est divisible dans M' (ou que l'homomorphisme h de monoïdes est divisible) si, et seulement si:

- pour tous éléments m_1 et m_2 de M et tout élément m' de M' tels que

$m'.m_1 = m_2$, alors m' est nécessairement élément de M .

On note M-Ens (resp. M'-Ens) la catégorie des M-ensembles (resp. des M'-ensembles), i. e. la catégorie telle que:

- ses objets sont les ensembles munis d'une opération de M (resp. M') à gauche,

- ses morphismes sont les applications compatibles avec ces opérations.

Clairement, l'homomorphisme injection canonique $h: M \longrightarrow M'$ induit un foncteur d'oubli U_h: M'-Ens $\longrightarrow$ M-Ens .

Il est facile de constater qu'il existe une unique théorie de Lawvere $/\underline{T}_M/$ (resp. $/\underline{T}_{M'}/$) telle que M-Ens (resp. M'-Ens) et $\mathrm{Ens}^{/\underline{T}_M/}$ (resp. $\mathrm{Ens}^{/\underline{T}_{M'}/}$) sont équivalentes. Précisément, $\underline{T}_M{}^{op}$ (resp. $\underline{T}_{M'}{}^{op}$) est (isomorphe à) la sous-catégorie pleine de M-Ens (resp. M'-Ens) dont les objets sont les M-ensembles (resp. M'-ensembles) libres $L(n)$ (resp. $L'(n)$) à n générateurs, quand n varie dans $\mathbb{N}$. De même, il est évident que le foncteur U_h est équivalent au foncteur $\mathrm{Ens}^{/H_h/}$, où $/H_h/:/T_M/ \longrightarrow /T_{M'}/$ est l'homomorphisme de théories tel que $H_h{}^{op}$ soit la restriction de l'adjoint à gauche de U_h (voir Chap. I, §3).

Montrons que:

<u>Proposition</u> 4 . <u>L'homomorphisme de monoïdes injection canonique</u> $h: M \longrightarrow M'$ <u>est divisible si, et seulement si, l'homomorphisme</u> $/H_h/: /\underline{T}_M/ \longrightarrow /\underline{T}_{M'}/$ <u>de théories de Lawvere qu'il induit est divisible.</u>

<u>Preuve</u>. Le M-ensemble (resp. le M'-ensemble) libre à 1 générateur est évidemment $L(1) = (M,f: M \times M \longrightarrow M)$ (resp. $L'(1) = (M',f': M' \times M' \longrightarrow M')$) où $f(m,x) = mx$ (resp. $f'(m',x') = m'x'$) pour tous éléments m (resp. m') et x (resp. x') de M (resp. M') . Par conséquent $\mathrm{End}_{M\text{-Ens}}(M,f)$ (resp. $\mathrm{End}_{M'\text{-Ens}}(M',f')$) est le monoïde M^{op} (resp. M'^{op}) . On en déduit que $\mathrm{End}_{\underline{T}_M}(A = L(1))$ (resp. $\mathrm{End}_{\underline{T}_{M'}}(A' = L'(1))$) est le monoïde M (resp. M') ou encore que l'on dispose d'un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "y'"'] & \underline{T}_{M'} \\
M \arrow[u, "h"] \arrow[r, "y"'] & \underline{T}_M \arrow[u, "H_h"']
\end{tikzcd}$$

où y et y' sont pleins et fidèles.
Supposons, tout d'abord, que $/H_h/$ est divisible. Si m_1, m_2 sont deux éléments de M et m' est un élément de M' tels que $m'.h(m_1) = h(m_2)$, on en déduit $y'(m').H_h(y(m_1)) = H_h(y(m_2))$ et, comme $/H_h/$ est divisible, il existe une flèche $s: A \longrightarrow A$ de $\underline{T}_M$ telle que $H_h(s) = y'(m')$ et $s.y(m_1) = y(m_2)$. Comme y est plein, il existe donc un élément $\overline{s}$ de M tel que $y(\overline{s}) = s$. Comme h est une injection canonique, y et y' sont fidèles et H_h est A-fidèle, il vient $h(\overline{s}) = m'$, autrement dit m' est élément de M . Par conséquent M est bien un sous-monoïde divisible de M'.

Réciproquement, supposons que M est un sous-monoïde divisible de M' .
Si $s_1, s_2: A \longrightarrow A$ sont deux flèches de $\underline{T}_M$ telles que $H_h(s_1) = H_h(s_2)$, comme y est plein et fidèle, il existe un unique élément $\overline{s}_1$ et un unique élément $\overline{s}_2$ de M tels que $y(\overline{s}_1) = s_1$ et $y(\overline{s}_2) = s_2$. Il en résulte que $y'(h(\overline{s}_1) = y'(h(s_2)) = H_h(s_1) = H_h(s_2)$. Comme y' est fidèle, il vient $h(\overline{s}_1) = h(\overline{s}_2)$ et, puisque h est injectif, $\overline{s}_1 = \overline{s}_2$ et donc $s_1 = s_2$. Autrement dit, H_h est A-fidèle.
Notons, pour plus de commodité, $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$, $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$ et $(c_k)_{1 \leq k \leq r}$ les systèmes générateurs de $L(p)$ (resp. $L'(p)$) , $L(q)$ (resp. $L'(q)$) et $L(r)$ (resp. $L'(r)$) et supposons que

$$\begin{tikzcd} L(p) \arrow[dr, "t_1"'] & & L(q) \arrow[dl, "t_2"] \\ & L(r) & \end{tikzcd}$$

sont deux flèches de $\underline{T}_M{}^{op}$ (i. e. deux homomorphismes de M-ensembles) telles que

$$\begin{tikzcd} L'(p) \arrow[dr, "H_h^{op}(t_1)"'] & & L'(q) \arrow[ll, "t'"'] \arrow[dl, "H_h^{op}(t_2)"] \\ & L'(r) & \end{tikzcd}$$

commute dans $\underline{T}_{M'}{}^{op}$ (i. e. dans M'-Ens).
Ces homomorphismes de M-ensembles ou M'-ensembles libres sont entièrement définis par leurs valeurs sur les générateurs, posons:

- $t_1(a_i) = m_i c_{u(i)}$, pour tout $1 \leq i \leq p$ (où m_i est élément de M , pour tout $1 \leq i \leq p$, et $u: \{1,\dots,p\} \longrightarrow \{1,\dots,r\}$ est une application),
- $t_2(b_j) = \overline{m}_j c_{v(j)}$, pour tout $1 \leq j \leq q$ (où $\overline{m}_j$ est élément de M , pour

tout $1 \leq j \leq q$, et $v: \{1,\dots,q\} \longrightarrow \{1,\dots,r\}$ est une application),

- $t'(b_j) = m'_j a_{w(j)}$, pour tout $1 \leq j \leq q$ (où m'_j est élément de M' pour tout $1 \leq j \leq q$ et $w: \{1,\dots,q\} \longrightarrow \{1,\dots,p\}$ est une application).

Clairement, on a:

- $H_h^{op}(t_1)(a_i) = h(m_i)c_{u(i)}$, pour tout $1 \leq i \leq p$,
- $H_h^{op}(t_2)(b_j) = h(\overline{m}_j)c_{v(j)}$, pour tout $1 \leq j \leq q$.

Comme $H_h^{op}(t_1).t' = H_h^{op}(t_2)$, il vient:

- $H_h^{op}(t_1)(m'_j a_{w(j)}) = h(\overline{m}_j)c_{v(j)}$, pour tout $1 \leq j \leq q$,

c'est-à-dire que:

- $m'_j h(m_{w(j)})c_{uw(j)} = h(\overline{m}_j)c_{v(j)}$, pour tout $1 \leq j \leq q$.

On en déduit que:

- $m'_j h(m_{w(j)}) = h(\overline{m}_j)$, pour tout $1 \leq j \leq q$, et $u.w = v$.

Comme M est un sous-monoïde divisible de M', il en résulte que m'_j est élément de M , pour tout $1 \leq j \leq q$. En conséquence, l'unique homomorphisme de M-ensembles $t: L(q) \longrightarrow L(p)$ tel que:

- $t(b_j) = m'_j a_{w(j)}$, pour tout $1 \leq j \leq q$,

vérifie bien:

- $H_h^{op}(t) = t'$ et $t_1.t = t_2$.

En conséquence $/H_h/$ est bien divisible. Fin de la preuve.

De la proposition 3 on déduit donc immédiatement:

Corollaire. Si M est un sous-monoïde divisible d'un monoïde M' , tout M-ensemble se plonge dans un M'-ensemble (ou encore, le foncteur d'oubli canonique M'-Ens $\longrightarrow$ M-Ens est à plongements).

En particulier, comme tout sous-groupe quelconque d'un groupe quelconque en est nécessairement un sous-monoïde divisible, on peut énoncer:

Corollaire. Si G est un sous-groupe d'un groupe G', tout G-ensemble se plonge dans un G'-ensemble.

3. Application aux structures affines.

Supposons que $/\underline{T}/$ est une théorie de Lawvere.

On dit qu'une flèche $k: A^n \longrightarrow A$ (qui représente une loi de composition n-aire) de $\underline{T}$ est idempotente si, et seulement si:

- $k.\delta_n = Id_A$ (où $\delta_n: A \longrightarrow A^n$ est la diagonale - voir Chap. I,§2).

Plus généralement, une flèche quelconque $h: A^m \longrightarrow A^n$ de $\underline{T}$ sera dite idempotente si, et seulement si:

- pour tout $1 \leq j \leq n$, la loi $\pi(n,j).h$ est idempotente.

Dans ces conditions, il est clair que:

Lemme 1. Toute flèche identité de $\underline{T}$ est idempotente.

Lemme 2. Pour tous entiers $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq n$, la projection $\pi(n,j): A^n \longrightarrow A$ est idempotente.

Montrons, de plus, que:

Lemme 3. Si $k: A^n \longrightarrow A^p$ et $k': A^m \longrightarrow A^n$ sont deux flèches idempotentes de $\underline{T}$, alors $k.k': A^m \longrightarrow A^p$ est idempotente.

Preuve. Pour tout $1 \leq j \leq n$, on a $\pi(n,j).k'.\delta_m = Id_A$, puisque k' est idempotente, et donc $k'.\delta_m = \delta_n$. On en déduit que, pour tout $1 \leq i \leq p$, on a $\pi(p,i).k.k'.\delta_m = \pi(p,i).k.\delta_n = Id_A$, puisque k est idempotente. Le lemme en résulte. Fin de la preuve.

De même, on a:

Lemme 4. Si, pour tout $1 \leq i \leq n$, $f_i: A^m \longrightarrow A$ est une flèche idempotente de $\underline{T}$, alors l'unique flèche $[f_i]_{1 \leq i \leq n}: A^m \longrightarrow A^n$ de $\underline{T}$, telle que $\pi(n,i).[f_i]_{1 \leq i \leq n} = f_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, est une flèche idempotente.

Preuve. En effet, pour tout $1 \leq i \leq n$, nous avons $\pi(n,i).[f_i].\delta_m = f_i.\delta_m = Id_A$, puisque f_i est idempotente. Le lemme en résulte. Fin de la preuve.

Enfin, établissons que:

Lemme 5 (de divisibilité). Si $f: A^n \longrightarrow A^m$ et $g: A^n \longrightarrow A^p$ sont deux flèches idempotentes de $\underline{T}$ et si $h: A^p \longrightarrow A^m$ est une flèche de $\underline{T}$ telle que $f = h.g$, alors h est une flèche idempotente.

<u>Preuve</u>. Pour tout $1 \leq i \leq p$, nous avons $\pi(p,i).g.\delta_n = Id_A$, puisque g est idempotente. Nous en déduisons que $g.\delta_n = \delta_p$. Il en résulte que, pour tout $1 \leq j \leq m$, on a:

- $\pi(m,j).h.\delta_p = \pi(m,j).h.g.\delta_n = \pi(m,j).f.\delta_n = Id_A$, puisque f est idempotente.

Le lemme en résulte. <u>Fin de la preuve</u>.

Notons $aff/\underline{T}/$ l'ensemble des flèches idempotentes. Alors, nous avons:

<u>Proposition 5. La partie $aff/\underline{T}/$ de $\underline{T}$ définit une sous-théorie de Lawvere $Aff/\underline{T}/$ de $/\underline{T}/$ et l'homomorphisme injection canonique</u> $/J/: Aff/\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}/$ <u>est divisible</u>.

<u>Preuve</u>. Les lemmes 1 à 4 prouvent bien que $Aff/\underline{T}/$ est une sous-théorie de $/\underline{T}/$ et le lemme 5 signifie exactement, puisque J est évidemment A-fidèle, que $/J/$ est divisible. <u>Fin de la preuve</u>.

Appelons <u>structure affine de type</u> $/\underline{T}/$ toute algèbre de $Aff/\underline{T}/$ (ainsi, si K est un corps commutatif et si $/\underline{T}/$ est la théorie des K-espaces vectoriels, les structures affines de type $/\underline{T}/$ sont exactement les K-espaces affines, ou encore $Aff/\underline{T}/$ est précisément la théorie de Lawvere des K-espaces affines).

De la proposition 5 précédente et de la proposition 3, nous déduisons:

<u>Corollaire. Toute structure affine de type</u> $/\underline{T}/$ <u>se plonge dans une algèbre de</u> $/\underline{T}/$

Par exemple, tout espace affine sur un corps commutatif K se plonge dans un espace vectoriel sur K !

4. <u>Compléments et commentaires</u>.

4.1. Nous savons que, si $/H/: /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme entre deux théories de Lawvere, le foncteur $Ens^{/H/}$ est à plongements libres si et seulement si $/H/$ est fidèle (ou, ce qui est équivalent, injectif), mais ceci n'implique nullement, en général que $Ens^{/H/}$ soit à plongements.

Par exemple, si $h: M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme injectif de monoïdes, il induit, évidemment, un homomorphisme $/H_h/: /\underline{T}_M/ \longrightarrow /\underline{T}_{M'}/$ qui est fidèle, mais le foncteur d'oubli canonique M'-Ens $\longrightarrow$ M-Ens , nécessairement à plongements libres, n'est pas nécessairement à plongements. C'est très exactement ce qui se passe si, en particulier, $h: (\mathbb{N},+) \longrightarrow (\mathbb{Z},+)$ est l'injection canonique. Pour le voir, considérons le $(N,+)$-ensemble (E,f) tel que:

- $E = \{a'_0, a_0, a_1, \ldots\}$,
- $f(n,a_i) = a_{n+i}$, pour tout entier n et tout entier i ,
- $f(n,a'_0) = a_n$, pour tout entier $n \neq 0$ et $f(0,a'_0) = a'_0$.

On constate facilement que le $(\mathbb{Z},+)$-ensemble librement engendré par (E,f) est le $(\mathbb{Z},+)$-ensemble (E',f') tel que:

- $E' = \{a_z \ / \ z \in \mathbb{Z}\}$,
- $f'(z',a_z) = a_{z'+z}$, pour tous entiers relatifs z' et z .

Dans ces conditions, l'homomorphisme canonique de $(\mathbb{N},+)$-ensembles $e_{(E,f)}: (E,f) \longrightarrow (E',f')$ qui en résulte n'est pas injectif, puisque l'on a:

- $e_{(E,f)}(a_n) = a_n$, pour tout entier $n \neq 0$,
- $e_{(E,f)}(a_0) = e_{(E,f)}(a'_0) = a_0$.

4.2. Il n'est pas nécessaire qu'un sous-monoïde M d'un monoïde M' soit divisible pour que tout M-ensemble se plonge dans un M'-ensemble. Par exemple, on vérifie facilement (mais longuement) que tout $(\mathbb{N},\times)$ ensemble se plonge dans un $(\mathbb{Z},\times)$-ensemble et, cependant, $(\mathbb{N},\times)$ n'est pas divisible dans $(\mathbb{Z},\times)$ puisque, notamment, $-1 \times 0 = 0$ et $-1 \notin \mathbb{N}$.

4.3. Nous caractériserons complétement (voir Chap. IV, §§2et 3)les homomorphismes de monoïdes $h: M \longrightarrow M'$ pour lesquels le foncteur d'oubli canonique $U_h: M'\text{-Ens} \longrightarrow M\text{-Ens}$ est à plongements: ce sont les homomorphismes dits <u>purs</u>. En particulier, on établit que, si tout élément de M est régulier dans M' (en identifiant h à une injection canonique) alors h <u>est pur si, et seulement si,</u> h <u>est divisible</u>.

4.4. Supposons que $/\underline{T}/$ est une théorie de Lawvere. Nous dirons qu'une propriété (P) , susceptible d'être vérifiée par les flèches de $\underline{T}$, est <u>cohérente</u> si, et seulement si:

- les identités de $\underline{T}$ vérifient (P) ,

- pour tous entiers $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq n$, la projection $\pi(n,j): A^n \longrightarrow A$ vérifie (P) ,

- si $k: A^n \longrightarrow A^p$ et $k': A^m \longrightarrow A^n$ sont deux flèches de $\underline{T}$ vérifiant (P) , alors $k.k'$ vérifie (P) ,

- si, pour tout $1 \leq i \leq n$, $f_i: A^m \longrightarrow A$ est une flèche de $\underline{T}$ vérifiant (P) , alors la flèche $[f_i]_{1 \leq i \leq n}: A^m \longrightarrow A^n$ vérifie (P) ,

- si $f: A^n \longrightarrow A^m$ et $g: A^n \longrightarrow A^p$ sont deux flèches de $\underline{T}$ vérifiant (P) et si $h: A^p \longrightarrow A^m$ est une flèche de $\underline{T}$ telle que $f = h.g$, alors h vérifie (P) .

Dans ces conditions, l'ensemble des flèches de $\underline{T}$ qui vérifient (P) définit une sous-théorie $/\underline{T}_{(P)}/$ de $/\underline{T}/$ et l'homomorphisme injection canonique $/J_{(P)}/: /\underline{T}_{(P)}/ \longrightarrow /\underline{T}/$ est évidemment divisible; toute (P)-<u>structure de type</u> $/\underline{T}/$ (i. e. toute algèbre de $/\underline{T}_{(P)}/$) se plonge donc dans une algèbre de $/\underline{T}/$.

Supposons, par exemple, que $f: A \longrightarrow A$ est une flèche (arbitrairement) choisie dans $\underline{T}$. Nous disons qu'une flèche $h: A^n \longrightarrow A^p$ de $\underline{T}$ <u>vérifie</u> (P_f) (ou encore qu'elle est f-<u>potente</u>) si, et seulement si:

(P_f) pour tout $1 \leq i \leq p$, on a $\pi(p,i).h.\delta_n.f = f$.

Clairement, (P_f) est bien une propriété cohérente et donc $/\underline{T}_{(P_f)}/$ est une sous-théorie divisible de $/\underline{T}/$, dont on établit facilement qu'elle contient $Aff/\underline{T}/$.

Si l'on a choisi $f = Id_A$, il est clair que $(P_{Id_A}) = Id_A$-potence = idempotence.

Si V est un anneau unitaire commutatif, si $/\underline{T}/$ est la théorie de Lawvere des V-modules, on sait que le monoïde $(End_{\underline{T}}(A), \circ)$ s'identifie au monoïde multiplicatif de V : choisir une flèche $f: A \longrightarrow A$ de $\underline{T}$, c'est donc choisir un élément v de V (auquel on identifie f). Dans ces conditions, on établit sans peine que:

- si v est un élément de V multiplicativement régulier, les (P_v)-structures de type $/\underline{T}/$ sont exactement les structures affines de type $/\underline{T}/$, ou encore que $/\underline{T}_{(P_v)}/$ et $Aff/\underline{T}/$ sont isomorphes.

Par contre, si v n'est pas régulier, posons:

- $W_v = \{ w \in V \ / \ v(w-1) = 0 \}$,
- $\overline{W}_v = \{ \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \ / \ n \in N^* \ , \ w_i \in W_v$ pour tout $1 \leq i \leq n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i \in W_v \}$.

Dans ces conditions, une (P_v)-structure libre de type $/\underline{T}/$ peut s'intèrprèter comme étant la donnée de Card $\overline{W}_v$ espaces affines libres sur V , dotés d'opérations de transition des uns vers les autres, ou encore comme étant un système de points dans certains états (repérés par $\overline{W}_v$) pour lesquels on sait déterminer l'état d'équilibre de points d'équilibre.
En particulier, si l'on a choisi $v = 0$, on a $/\underline{T}_{(P_0)}/ = /\underline{T}/$.

4.5. Il est clair que l'intersection d'une famille (non vide) quelconque de sous-théories divisibles d'une théorie $/\underline{T}'/$ est encore une sous-théorie divisible. En conséquence:

Proposition 6 . Toute sous-théorie $/\underline{T}/$ d'une théorie $/\underline{T}'/$ engendre une plus petite sous-théorie divisible $\mathrm{Div}/\underline{T}/$ dans $/\underline{T}'/$. Plus généralement, si $/H/: /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme (quelconque) entre deux théories, il admet une décomposition minimum $/\underline{T}/ \xrightarrow[\mathrm{CoImDiv}\ /H/]{} \mathrm{Div}/H(\underline{T})/ \xrightarrow[\mathrm{ImDiv}\ /H/]{} /\underline{T}'/$

où $\mathrm{Div}/H(\underline{T})/$ est la plus petite sous-théorie divisible de $/\underline{T}'/$ engendrée par $H(\underline{T})$.

Par exemple, si $/\underline{T}'/$ est une théorie quelconque et si $/\underline{T}_{\mathrm{Ens}}/$ est la théorie de Lawvere des ensembles, il existe un unique homomorphisme (car $/\underline{T}_{\mathrm{Ens}}/$ est un objet initial de la catégorie des théories!) $/H_{\underline{T}'}/: /\underline{T}_{\mathrm{Ens}}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ et l'on a $\mathrm{Div}/H_{\underline{T}'}(\underline{T}_{\mathrm{Ens}})/ = \mathrm{Aff}/\underline{T}'/$.

De même, si $/\underline{T}'/$ est une théorie quelconque, si $f: A' \longrightarrow A'$ en est une flèche choisie et si $/\underline{T}_{\mathbb{N}}/$ est la théorie des $(\mathbb{N},+)$-ensembles, il existe un unique homomorphisme $/H_{\underline{T}',f}/: /\underline{T}_{\mathbb{N}}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ tel que sa restriction

$$(\mathbb{N},+) = \mathrm{End}_{\underline{T}_{\mathbb{N}}}(A,A) \longrightarrow \mathrm{End}_{\underline{T}'}(A',A')$$

associe à tout entier n la flèche f^n . Dans ces conditions, on vérifie sans difficulté que $\mathrm{Div}/H_{\underline{T}',f}(\underline{T}_{\mathbb{N}})/ = /\underline{T}'_{(P_f)}/$.

Supposons, enfin, que $/H/: /\underline{T}_{\mathrm{Mon}}/ \longrightarrow /\underline{T}_{\mathrm{Grp}}/$ soit l'homomorphisme canonique de la théorie de Lawvere des monoïdes vers celle des groupes. La catégorie $\underline{T}_{\mathrm{Mon}}$

contient le sous-graphe multiplicatif suivant:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "e"'] & A \arrow[l, bend right, "c"'] & A^2 \arrow[l, "k"] \arrow[l, bend right, "p_1"'] \arrow[l, bend left, "p_2"] \arrow[l, bend left=60, "t_2"] \arrow[loop right, "t_1"]
\end{tikzcd}
$$

$$p_1.t_1 = t_2 = e.c.p_1 = e.c.p_2 \quad \text{et} \quad p_2.t_1 = k$$

de sorte que, pour tout monoïde (M,x) ses flèches s'intérprètent comme suit:

- $p_1, p_2 : M \times M \longrightarrow M$ sont les projections canoniques,
- $k: M \times M \longrightarrow M$ est la loi de composition du monoïde,
- $e: 1 \longrightarrow M$ est la sélection de l'élément neutre u ,
- $t_1: M \times M \longrightarrow M \times M$ vérifie $t_1(x,y) = (u, x.y)$, pour tous éléments x et y de M ,
- $t_2: M \times M \longrightarrow M$ vérifie $t_2(x,y) = u$, pour tout élément (x,y) de $M \times M$.

De même, la catégorie $\underline{T}_{Grp}$ contient le sous-graphe multiplicatif suivant

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "e"'] & A \arrow[l, bend right] \arrow[loop below, "s"] \arrow[r, bend left=60, "t'"] \arrow[r, bend right=60, "t_2"'] & A^2 \arrow[l, "k"] \arrow[l, bend right, "p_1"'] \arrow[l, bend left, "p_2"] \arrow[loop right, "t_1"]
\end{tikzcd}
$$

$$p_1.t_1 = t_2 = e.c.p_1 = e.c.p_2 \quad , \; p_2.t_1 = k \quad \text{et} \quad s.p_1 = t'$$

de sorte que, pour tout groupe (G,x) , ses flèches qui appartiennent au-sous graphe précédent s'interprètent comme précédemment et les autres s'interprètent comme suit:

- $s: G \longrightarrow G$ est l'opération de symétrisation,
- $t': G \times G \longrightarrow G$ vérifie $t'(x,y) = x^{-1}$, pour tout élément (x,y) de $G \times G$.

Comme $t'.t_1 = t_2$, on en déduit que t' est nécessairement flèche de $Div/H(\underline{T}_{Mon})/ = Div/\underline{T}_{Mon}/$. Comme $s.t' = p_1$, on en déduit aussi que s est nécessairement flèche de $Div/\underline{T}_{Mon}/$. D'où il résulte que $/\underline{T}_{Grp}/ = Div/\underline{T}_{Mon}/$. Nous laissons au lecteur le soin de multiplier ce genre d'exemples "concrets".

4.6. Les résultats et considérations de tout ce chapitre reprennent ceux de (A.P.A.T.), cependant, ils les complètent, ne serait-ce qu'en fournissant une démonstration simple (i. e. fondée sur un critère systématique) de la proposition 5 . Aux chapitres suivants, nous verrons que, contrairement à ce qui est, au moins implicitement, suggéré en (A.P.A.T.), on peut effectivement caractériser un certain nombre de foncteurs d'oubli de la forme $Ens^{/H/}$ qui sont à plongements sans que $/H/$ soit divisible, et ce de manière simple et relativement systématique.

CHAPITRE III: CAS DES HOMOMORPHISMES RETRACTABLES.

1. Homomorphismes rétractables.

Si $/H/: /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme entre deux théories de Lawvere, on dit qu'il est rétractable si, et seulement si:

- il existe un homomorphisme de graphes orientés $K: Gr(\underline{T}') \longrightarrow Gr(\underline{T})$ (voir Chap. I, §1) tel que:

  (i) $K.H = Id_{Gr(\underline{T})}$,

  (ii) pour toutes flèches $t': A'^n \longrightarrow A'^m$ de $\underline{T}'$ et $t: A^p \longrightarrow A^n$ de $\underline{T}$, on a $K(t'.H(t)) = K(t').KH(t) = K(t').t$.

Dans ces conditions, nous avons:

Proposition 7 . Si $/H/: /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme rétractable, le foncteur $Ens^{/H/}: Ens^{/\underline{T}'/} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}/}$ est à plongements.

Preuve. Pour montrer que $Ens^{/H/}$ est à plongements, il suffit d'établir que l'homomorphisme $/H/$ vérifie la condition (CS) (voir Chap. I, §5). Pour ce faire, supposons que

$$A = A_1 \xleftarrow[x_1]{} A_2 \xrightarrow[x_2]{} A_3 \longleftarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow A_{2n-1} \xleftarrow[x_{2n-1}]{} A_{2n} \xrightarrow[x_{2n}]{} A_{2n+1} = A$$

est un zigzag de $\underline{T}$, fermé en A , et supposons que

$$\begin{tikzcd}
A' = H(A_1) = A'_1 \arrow[drr, "Id_{A'} = g'_1"'] & \arrow[l, "H(x_1)"'] & \cdots \arrow[d, "g'_2"] & \arrow[dl, "g'_{2n}"] \arrow[r, "H(x_{2n})"'] & A'_{2n+1} = H(A_{2n+1}) = A' \arrow[dll, "g'_{2n+1} = Id_{A'}"] \\
& & A' & &
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de $\underline{T}'$.

Comme $/H/$ est rétractable, nous avons:

$- K(g_1^{\circ}.H(x_1)) = K(g_1').x_1 = Id_A.x_1 = x_1$.

Supposons que, si $1 < p < n$, on dispose du diagramme commutatif de $\underline{T}$ suivant:

$$
\begin{tikzcd}
A = A_1 \arrow[drrr, "Id_A = g_1"'] & A_2 \arrow[l, dashed, "x_1"'] \arrow[r, "x_2"] \arrow[drr, dashed, "g_2"] & A_3 \arrow[dr, "g_3"] & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & A_{2p-1} \arrow[dl, "g_{2p-1}"'] & A_{2p} \arrow[l, "x_{2p-1}"'] \arrow[r, "x_{2p}"] \arrow[dll, "g_{2p}"'] & A_{2p+1} \arrow[dlll, "g_{2p+1}"] \\
 & & & A & & &
\end{tikzcd}
$$

où $g_i = K(g_i')$, pour tout $1 \leq i \leq 2p+1$.

Comme $/H/$ est rétractable, on a:

$- K(g_{2p+3}^{\circ}.H(x_{2p+2})) = K(g'_{2p+3}).x_{2p+2} = K(g'_{2p+1}).x_{2p+1} = K(g'_{2p+2})$.

Au total, on dispose donc d'un diagramme commutatif de $\underline{T}$ tel que ci-dessous:

$$
\begin{tikzcd}
A = A_1 \arrow[drrr, "Id_A = g_1"'] & A_2 \arrow[l, "x_1"'] \arrow[r, "x_2"] \arrow[drr, "g_2"] & A_3 \arrow[dr, dashed, "g_3"] & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & A_{2n-1} \arrow[dl, "g_{2n-1}"'] & A_{2n} \arrow[l, "x_{2n-1}"'] \arrow[r, "x_{2n}"] \arrow[dll, "g_{2n}"'] & A_{2n+1} = A \arrow[dlll, "g_{2n+1}"] \\
 & & & A & & &
\end{tikzcd}
$$

où $g_i = K(g_i^{\circ})$, pour tout $1 \leq i \leq 2n + 1$, et donc $g_{2n+1} = Id_A$.

D'où la conclusion. Fin de la preuve.

2. Application aux monoïdes d'opérateurs.

Si $h: M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme de monoïdes, nous dirons qu'il est rétractable si, et seulement si, il existe une application $k: M' \longrightarrow M$ telle que:

(j) $k.h = Id_M$,

(jj) pour tout élément m de M et tout élément m' de M', on a $k(m'.h(m)) = k(m').m$, (autrement dit, k est un homomorphisme de M-ensembles à droite).

Dans ces conditions, nous avons:

Proposition 8. Si $h: M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme de monoïdes, il est rétractable si, et seulement si, l'homomorphisme de théories de Lawvere $/H_h/ : /\underline{T}_M/ \longrightarrow /\underline{T}_{M'}/$ qu'il induit (voir Chap. II, §2) est rétractable.

Preuve. Nous reprenons les notations de la preuve de la proposition 4 du Chap. II, §2. En particulier, nous disposons d'un diagramme commutatif de foncteurs:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "y'"] & \underline{T}_{M'} \\ M \arrow[u, "h"] \arrow[r, "y"] & \underline{T}_M \arrow[u, "H_h"'] \end{tikzcd}$$

où y (resp. y') est plein et fidèle et identifie donc le monoïde M (resp. M') au sous-monoïde $\mathrm{End}_{\underline{T}}(A)$ (resp. $\mathrm{End}_{\underline{T}'}(A'))$.

Supposons que $/H_h/$ est un homomorphisme rétractable de théories. Il existe donc un homomorphisme $K: \mathrm{Gr}(\underline{T}') \longrightarrow \mathrm{Gr}(\underline{T})$ vérifiant les conditions (i) et (ii) du §1. Comme y et y' sont pleins et fidèles, il existe donc un unique homomorphisme de graphes orientés $k: \mathrm{Gr}(M') \longrightarrow \mathrm{Gr}(M)$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}(M') \arrow[r, "\mathrm{Gr}(y')"] \arrow[d, "k"'] & \mathrm{Gr}(\underline{T}') \arrow[d, "K"] \\ \mathrm{Gr}(M) \arrow[r, "\mathrm{Gr}(y)"] & \mathrm{Gr}(\underline{T}) \end{tikzcd} .$$

Clairement, ceci signifie que l'application $k: M' \longrightarrow M$ vérifie les conditions (j) et (jj).

Réciproquement, supposons que l'homomorphisme $h: M \longrightarrow M'$ est rétractable. Si $t': L'(q) \longrightarrow L'(p)$ est une flèche de $\underline{T}_{M'}{}^{op}$ (i. e. si t' est un homomorphisme du M'-ensemble libre $L'(q)$, à q générateurs $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$, vers le M'-ensemble libre $L'(p)$, à p générateurs $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$) définie par:

- $t'(b_j) = m'_j\, a_{v(j)}$, pour tout $1 \leq j \leq q$,

nous notons $K^{op}(t')\colon L(q) \longrightarrow L(p)$ l'unique homomorphisme de M-ensembles tel que:

- $K^{op}(t')(b_j) = k(m'_j)\, a_{v(j)}$, pour tout $1 \leq j \leq q$.

On définit ainsi un homomorphisme de graphes orientés $K\colon Gr(\underline{T}_{M'}) \longrightarrow Gr(\underline{T}_M)$.
Si $t : L(p) \longrightarrow L(r)$ est une flèche de $\underline{T}_M{}^{op}$ (i. e. si c'est un homomorphisme du M-ensemble libre $L(p)$ vers le M-ensemble libre à r générateurs $(c_n)_{1 \leq n \leq r}$) telle que:

- $t(a_i) = m_i\, c_{w(i)}$, pour tout $1 \leq i \leq p$,

nous avons:

- $K^{op}H_h^{op}(t)\,(a_i) = kh(m_i)\, c_{w(i)} = m_i\, c_{w(i)} = t(a_i)$, pour tout $1 \leq i \leq p$,

on en déduit que $K.H = Id_{Gr(\underline{T}_M)}$, et la condition (i) du §1 est vérifiée.
D'autre part, nous avons:

- $K^{op}(H_h{}^{op}(t).t')\,(b_j) = k(m'_j).m_{v(i)}\, c_{wv(j)}$, pour tout $1 \leq j \leq q$,
- $(t.K^{op}(t'))\,(b_j) = t(k(m'_j)\, a_{v(j)}) = k(m'_j).m_{v(i)}\, c_{wv(j)}$, pour tout $1 \leq j \leq q$,

on en déduit que $K^{op}(H_h{}^{op}(t).t') = t.K^{op}(t')$ et donc que la condition (ii) du §1 est vérifiée. D'où la conclusion. Fin de la preuve.

De la proposition 8 précédente et de la proposition 7 , on déduit immédiatement que:

Corollaire. *Si $h\colon M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme rétractable de monoïdes, tout M-ensemble se plonge dans un M'-ensemble (ou encore, le foncteur d'oubli M'-Ens $\longrightarrow$ M-Ens , induit par h , est à plongements).*

3. Construction d'homomorphismes (de théories) rétractables.

Si $/H/\colon /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme de théories de Lawvere, on note $A'.\underline{T}'$ (resp. $A.\underline{T}$) le sous-graphe orienté de $Gr(\underline{T}')$ (resp. $Gr(\underline{T})$) constitué des flèches $A'^m \longrightarrow A'$ (resp. $A^m \longrightarrow A$) , où $m \geq 0$.

Dans ces conditions, nous avons:

Proposition 9 . *Un homomorphisme $/H/\colon /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ entre deux théories de*

Lawvere est rétractable si, et seulement si, il existe un homomorphisme K_1: $A'.\underline{T}'$ - - > $A.\underline{T}$ de graphes orientés tel que:

(i') pour toute flèche $t: A^m \longrightarrow A$ de $A.\underline{T}$, on a $K_1(H(t)) = t$,

(ii') pour toute flèche $t: A^n \longrightarrow A^p$ de $\underline{T}$ et toute flèche t': $t': A'^p \longrightarrow A'$ de $\underline{T}'$, on a $K_1(t'.H(t)) = K_1(t').t$.

Preuve. Supposons que /H/ est rétractable. Alors, il existe un homomorphisme $K: Gr(\underline{T}') \longrightarrow Gr(\underline{T})$ vérifiant les conditions (i) et (ii) du §1. Clairement, la restriction $K_1: A'.\underline{T}' \longrightarrow A.\underline{T}$ vérifie alors les conditions (i') et (ii'). Inversement, supposons que $K_1: A'.\underline{T}' \longrightarrow A.\underline{T}$ est un homomorphisme de graphes orientés vérifiant les conditions (i') et (ii'). Pour toute flèche $t': A'^n \longrightarrow A'^m$ de $\underline{T}'$, posons:

- $K(t') = [K_1(\pi'(m,i).t')]_{1 \leq i \leq m}$.

Trivialement, on définit bien ainsi un homomorphisme $K: Gr(\underline{T}') \longrightarrow Gr(\underline{T})$ de graphes orientés.

Si $t: A^n \longrightarrow A^m$ est une flèche de $\underline{T}$, on a:

$$
\begin{aligned}
- \quad K(H(t)) &= [K_1(\pi'(m,i).H(t))]_{1 \leq i \leq m} \\
&= [K_1(\pi'(m,i)).t]_{1 \leq i \leq m} && \text{(puisque } K_1 \text{ vérifie (ii'))} \\
&= [K_1(H(\pi(m,i))).t]_{1 \leq i \leq m} && \text{(puisque } H \text{ est un homomorhisme)} \\
&= [\pi(m,i).t]_{1 \leq i \leq m} && \text{(puisque } K_1 \text{ vérifie (i'))} \\
&= t \quad ,
\end{aligned}
$$

et donc K vérifie la condition (i) du §1 .

Si $t: A^n \longrightarrow A^m$ est une flèche de $\underline{T}$ et si $t': A'^m \longrightarrow A'^p$ est une flèche de $\underline{T}'$, nous avons:

$$
\begin{aligned}
- \ \pi(p,j).K(t'.H(t)) &= \pi(p,j).[K_1(\pi'(p,i).t'.H(t))]_{1 \leq i \leq p} \\
&= K_1(\pi'(p,j).t'.H(t)) \\
&= K_1(\pi'(p,j).t').t \quad \text{(puisque } K_1 \text{ vérifie (ii'))} ,
\end{aligned}
$$

pour tout $1 \leq j \leq p$,

- $\pi(p,j).K(t').t = \pi(p,j).[K_1(\pi'(p,i).t')]_{1 \leq i \leq p}.t$

$$= K_1(\pi'(p,j).t').t \qquad , \text{ pour tout } \quad 1 \leq j \leq p \ ,$$

on en conclut que $K(t'.H(t)) = K(t').t$ et donc que K vérifie bien la condition (ii) du §1. Fin de la preuve.

Supposons que $/H/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ et $/J/ : /\underline{T}_0/ \longrightarrow /\underline{T}/$ sont deux homomorphismes entre théories de Lawvere. Alors, on note:

- $/H'/ = /H/./J/$,
- $G : Ens^{/\underline{T}/} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}'/}$ l'adjoint à gauche de $Ens^{/H/} : Ens^{/\underline{T}'/} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}/}$,
- $e : Id_{Ens^{/\underline{T}/}} \Longrightarrow Ens^{/H/}.G$ la transformation naturelle associée à cette adjonction,
- $\bar{e} = e.Y : Y \Longrightarrow Ens^{/H/}.G.Y = Ens^{/H/}.Y'.H^{op} : \underline{T}^{op} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}/}$,
- $\bar{e}_n = \bar{e}(A^n)$, pour tout $n \geq 0$.

Nous dirons que $/H/$ est $/J/$-co-scindé si, et seulement si:

- il existe une transformation naturelle (appelée $/J/$-co-scindage de $/H/$)

$$\theta : Ens^{/H'/}.Y'.H^{op} \Longrightarrow Ens^{/J/}.Y : \underline{T}^{op} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}_0/}$$

(nous poserons, alors, $\theta_n = \theta(A^n)$, pour tout $n \geq 0$) telle que:

(i") $\theta_1 . Ens^{/J/}(\bar{e}_1) = Id_{Y_0(A)}$,

(ii") pour toute flèche $t' : A'^n \longrightarrow A'$ de $\underline{T}'$, il existe une flèche (nécessairement unique, puisque Y et $Ens^{/J/}$ sont fidèles) $t : A^n \longrightarrow A$ de $\underline{T}$ telle que le diagramme ci-dessous commute dans $Ens^{/\underline{T}_0/}$:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "Ens^{/H'/}(Y'(t'))"] & {} \arrow[d, "\theta_n"] \\
{} \arrow[u, dashed, "Ens^{/J/}(\bar{e}_1)"] \arrow[r, "Ens^{/J/}(Y(t))"'] & {}
\end{tikzcd}$$

En particulier, un homomorphisme $/H/$ sera dit (plus simplement) co-scindé si, et seulement si, il est $Id_{/\underline{T}/}$-co-scindé.

Dans ces conditions, montrons maintenant que:

Proposition 10 . Si $/J/ : /\underline{T}_0/ \longrightarrow /\underline{T}/$ et $/H/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ sont deux

<u>homomorphismes de théories de Lawvere et si</u> $/H/$ <u>est</u> $/J/$-<u>co-scindé, alors</u> $/H/$ <u>est rétractable</u>.

<u>Preuve</u>. D'après la proposition 9 précédente, il suffit d'exhiber un homomorphisme $K_1 : A'.\underline{T}' \longrightarrow A.\underline{T}$ vérifiant les conditions (i') et (ii').

Si $t' : A'^m \longrightarrow A'$ est une flèche de $\underline{T}'$, la condition (ii") assure qu'il existe une unique flèche $K_1(t') : A^m \longrightarrow A$ telle que:

- $\mathrm{Ens}^{/J/}(Y(K_1(t'))) = \theta_m.\mathrm{Ens}^{/H'/}(Y'(t')).\mathrm{Ens}^{/J/}(\bar{e}_1)$.

On définit donc ainsi un homomorphisme $K_1 : A'.\underline{T}' \longrightarrow A.\underline{T}$ de graphes orientés.

Si $t : A^m \longrightarrow A$ est une flèche de $A.\underline{T}$, nous avons:

$$- \mathrm{Ens}^{/J/}(Y(K_1(H(t)))) = \theta_m.\mathrm{Ens}^{/H'/}(Y'(H(t))).\mathrm{Ens}^{/J/}(\bar{e}_1)$$

$$= \mathrm{Ens}^{/J/}(Y(t)).\theta_1.\mathrm{Ens}^{/J/}(\bar{e}_1) \quad \text{(car } \theta \text{ est naturelle)}$$

$$= \mathrm{Ens}^{/J/}(Y(t)) \quad \text{(car (i') est vérifiée),}$$

comme $\mathrm{Ens}^{/J/}$ et Y sont fidèles, il en résulte que $K_1(H(t)) = t$ et donc que K_1 vérifie (i').

Si $t' : A'^n \longrightarrow A'$ est une flèche de $\underline{T}'$ et si $t : A^p \longrightarrow A^n$ est une flèche de $\underline{T}$, nous avons aussi:

$$- \mathrm{Ens}^{/J/}(Y(K_1(t'\circ H(t)))) = \theta_p.\mathrm{Ens}^{/H'/}(Y'(t'.H(t))).\mathrm{Ens}^{/J/}(\bar{e}_1)$$

$$= \theta_p.\mathrm{Ens}^{/H'/}(Y'(H(t)).\mathrm{Ens}^{/H'/}(Y'(t')).\mathrm{Ens}^{/J/}(\bar{e}_1)$$

$$= \mathrm{Ens}^{/J/}(Y(t)).\theta_n.\mathrm{Ens}^{/H'/}(Y'(t')).\mathrm{Ens}^{/J/}(\bar{e}_1)$$

(puisque θ est naturelle)

$$= \mathrm{Ens}^{/J/}(Y(t)).\mathrm{Ens}^{/J/}(Y(K_1(t')))$$

(par définition de K_1)

$$= \mathrm{Ens}^{/J/}(Y(K_1(t').t)) \quad ,$$

comme $\mathrm{Ens}^{/J/}$ et Y sont fidèles, on en déduit que $K_1(t'.H(t)) = K_1(t').t$ et donc que K_1 vérifie la condition (ii'). D'où la conclusion. <u>Fin de la preuve</u>.

4. <u>Application aux modules</u>.

Supposons que V (resp. V') est un anneau commutatif unitaire et que

$h: V \longrightarrow V'$ est un homomorphisme injectif d'anneaux commutatifs unitaires (identifiant V à un sous-anneau unitaire de V'). Nous notons alors $/\underline{T}_V/$ (resp. $/\underline{T}_{V'}/$) la théorie de Lawvere des V-modules (resp. des V'-modules): l'homomorphisme h induit alors un homomorphisme de théories de Lawvere $/H_h/: /\underline{T}_V/ \longrightarrow /\underline{T}_{V'}/$ de celle sorte que le foncteur associé $\mathrm{Ens}^{/H_h/}: \mathrm{Ens}^{/\underline{T}_{V'}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{T}_V/}$ est le foncteur d'oubli usuel ("V-module sous-jacent").

Dans ces conditions, prouvons que:

<u>Proposition</u> 11. <u>Si le</u> V-<u>module</u> V <u>est facteur direct du</u> V-<u>module</u> V' , <u>alors</u> <u>l'homomorphisme de théories</u> $/H_h/: /\underline{T}_V/ \longrightarrow /\underline{T}_{V'}/$, <u>induit par l'homomorphisme</u> <u>injectif</u> $h: V \longrightarrow V'$ <u>d'anneaux commutatifs unitaires, est rétractable.</u>

<u>Preuve.</u> Il suffit de montrer, d'après la proposition 10 précédente, que $/H_h/$ est co-scindé.
On sait que $\underline{T}_V^{op}$ (resp. $\underline{T}_{V'}^{op}$) est (isomorphe à) la sous-catégorie pleine de V-Mod (resp. V'-Mod) dont les objets sont les V-modules (resp. les V'-modules) V^n (resp. V'^n) où $n \geq 0$.
On vérifie facilement que, pour tout $n \geq 0$, on a $\bar{e}_n = h^n : V^n \longrightarrow V'^n$.
Si V a un supplémentaire W dans le V-module V' , posons:

- $\theta_n = \theta_1{}^n : V'^n \longrightarrow V^n$, pour tout $n \geq 0$, lorsque $\theta_1: V' \longrightarrow V$ désigne la projection de V' sur V , parallèlement à W .

Clairement, la famille d'applications V-linéaires $(\theta_n)_{n \geq 0}$ définit bien une transformation naturelle $\theta: \mathrm{Ens}^{/H_h/}.Y'.H_h^{op} \longrightarrow Y: \underline{T}_V^{op} \longrightarrow \text{V-Mod}$.
On a bien entendu $\theta_1.\bar{e}_1 = \theta_1.h = Id_V$, si bien que la condition (i") du §3 est vérifiée.
Si $t': V' \longrightarrow V'^m$ est une application V'-linéaire, alors $\theta_m.t'.\bar{e}_1$ est V-linéaire et la condition (ii") du §3 est également vérifiée. D'où la conclusion. <u>Fin de la preuve.</u>

On en déduit (ce qui n'est pas fait pour surprendre) que:

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> V <u>est un anneau commutatif unitaire, facteur direct d'un suranneau commutatif unitaire</u> V' <u>(considéré comme</u> V-<u>module),tout</u> V-<u>module se plonge dans un</u> V'-<u>module</u> <u>(ou encore, le foncteur d'oubli</u> "V-<u>module sous-jacent</u>" <u>est à plongements</u>).

5. Application aux algèbres de Lie.

Dans tout ce §5, on suppose que V est un anneau commutatif, unitaire, contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau unitaire.

On désigne par:

- AlgAs la catégorie des V-algèbres associatives et par $/\underline{T}_{Ass}/$ la théorie de Lawvere de ces V-algèbres associatives,

- AlgLie la catégorie des V-algèbres de Lie et par $/\underline{T}_{Lie}/$ la théorie de ces V-algèbres de Lie,

- Mod la catégorie des V-modules et par $/\underline{T}_{Mod}/$ la théorie de Lawvere de ces V-modules.

Clairement, on dispose d'un homomorphisme $/H/ : /\underline{T}_{Lie}/ \longrightarrow /\underline{T}_{Ass}/$ (resp. $/J/ : /\underline{T}_{Mod}/ \longrightarrow /\underline{T}_{Lie}/$) de sorte que

$$\mathrm{Ens}^{/H/} : \mathrm{Ens}^{/\underline{T}_{Ass}/} = \mathrm{AlgAs} \longrightarrow \mathrm{AlgLie} = \mathrm{Ens}^{/\underline{T}_{Lie}/}$$

$$(\text{resp. } \mathrm{Ens}^{/J/} : \mathrm{Ens}^{/\underline{T}_{Lie}/} = \mathrm{AlgLie} \longrightarrow \mathrm{Mod} = \mathrm{Ens}^{/\underline{T}_{Mod}/})$$

est le foncteur d'oubli canonique "V-algèbre de Lie sous-jacente" (resp. "V-module sous-jacent").

On reprend les notations du §3. En particulier l'homomorphisme $/H'/ = /H/./J/ : /\underline{T}_{Mod}/ \longrightarrow /\underline{T}_{Ass}/$ induit le foncteur d'oubli canonique

$$\mathrm{Ens}^{/H'/} : \mathrm{Ens}^{/\underline{T}_{Ass}/} = \mathrm{AlgAs} \longrightarrow \mathrm{Mod} = \mathrm{Ens}^{/\underline{T}_{Mod}/}$$

à savoir le foncteur "V-module sous-jacent".

Dans ces conditions, le foncteur G adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Ens}^{/H/}$ est le foncteur "V-algèbre enveloppante" et le foncteur G' adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Ens}^{/H'/}$ est le foncteur "V-algèbre tensorielle (non unitaire)".

Montrons que:

Proposition 12. L'homomorphisme canonique $/H/ : /\underline{T}_{Lie}/ \longrightarrow /\underline{T}_{Ass}/$, de la théorie de Lawvere des V-algèbres de Lie vers celle des V-algèbres associatives, est un homomorphisme rétractable, lorsque V est un anneau commutatif unitaire contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau unitaire.

Preuve. En vertu de la proposition 10 du §3 (dont nous reprenons les notations), il suffit d'établir que /H/ est /J/-co-scindé.

Pour ce faire, pour tout entier $n \geq 0$, désignons par $L(n)$ la V-algèbre de Lie libre à n générateurs $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$: ses éléments peuvent donc s'écrire comme des polynômes (non constants!) , non associatifs et non commutatifs $P[X_1, \ldots, X_n]$ (mais ces écritures ne sont pas canoniques!). On désigne alors par $T(L(n))$ la V-algèbre tensorielle (non unitaire) du V-module (sous-jacent à) $L(n)$. Dans ces conditions, on sait que la V-algèbre enveloppante $G(L(n))$ de $L(n)$ est la V-algèbre $T(L(n))/I$, quotient de la V-algèbre $T(L(n))$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme:

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_m - x_1 \otimes \ldots \otimes x_{i+1} \otimes x_i \ldots \otimes x_m - x_1 \otimes \cdots \otimes [x_i, x_{i+1}] \otimes \ldots \otimes x_m$$

où $m \geq 2$ et $1 \leq i \leq m-1$ sont deux entiers et x_j est élément de $L(n)$, pour tout $1 \leq j \leq m$. Nous désignons alors par:

- $q_n : T(L(n)) \longrightarrow T(L(n))/I = G(L(n))$ l'homomorphisme de V-algèbres "passage au quotient",

- $e'_n : L(n) \longrightarrow T(L(n))$ l'application V-linéaire canonique du V-module $L(n)$ vers le V-module $T(L(n))$

Alors, il est clair que $\overline{e}_n = q_n . e'_n$ et l'on vérifie facilement (i. e. purement combinatoirement) que:

- e'_n est injective ,

- $\overline{e}_n$ est injectif (c'est le "Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt" pour les algèbres de Lie <u>libres</u> sur un anneau quelconque - voir les commentaires).

Pour tout entier $m \geq 1$ et toute permutation σ de $\{1, \ldots, m\}$, notons:

- C_σ l'ensemble des intervalles $\{r, r+1, \ldots, s\}$ de $\{1, \ldots, m\}$ tels que $\sigma(r) < \sigma(r+1) < \ldots < \sigma(s)$,

- D_σ l'ensemble des éléments maximaux de C_σ (l'intervalle $\{1, \ldots, m\}$ se décompose alors, de manière unique, en réunion d'éléments de D_σ deux à deux disjoints).

De même, pour tous entiers $m, k \geq 1$, nous notons $E_{m,k}$ l'ensemble des permutations σ de $\{1, \ldots, m\}$ telles que $\mathrm{Card}\, D_\sigma = k$.
Enfin, pour tous entiers $n, m \geq 1$ et tous éléments $x_1, \ldots, x_m$ de $L(n)$, on définit $[x_1, \ldots, x_m]$ par récurrence comme suit:

- $[x_1] = x_1$,

- $[x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m] = [[x_1, \ldots, x_{m-1}], x_m]$, et l'on pose:

$$-\ \theta'_m(x_1\otimes\ldots\otimes x_m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\,(mk)^{-1}\,\binom{m}{k}^{-1} \sum_{\sigma\in E_{m,k}} [x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}]$$

(ce qui a bien un sens, puisque V contient $\mathbb{Q}$).

On définit, ainsi, une application V-linéaire $\theta'_n\colon T(L(n)) \longrightarrow L(n)$. On vérifie, longuement mais de manière purement combinatoire, que $\theta'_n(I) = 0$ (voir (P.B.W.T.) et les commentaires qui suivent). Par conséquent, on dispose d'une unique application V-linéaire $\theta_n\colon G(L(n)) \longrightarrow L(n)$ telle que $\theta_n.q_n = \theta'_n$.

Pour achever la preuve, il nous suffit donc d'établir que la famille $(\theta_n)_{n\geq 0}$ (où $\theta_0 = 0$) définit un /J/-co-scindage de /H/ .

Si $t\colon L(n) \longrightarrow L(p)$ est un homomorphisme de V-algèbres de Lie (où $n,p > 0$), il nous faut montrer tout d'abord que $t.\theta_n = \theta_p.G(t)$ (i. e. la naturalité de θ). Mais $G(L(n))$ est aussi la V-algèbre libre à n générateurs $\{X_1,\ldots,X_n\}$: ses éléments sont donc les polynômes (non constants), non commutatifs, mais associatifs, en les variables $X_1, \ldots, X_n$. Une base du V-module $G(L(n))$ est donc constituée par les <u>monômes</u> (non constants) en ces variables. Pour montrer l'égalité souhaitée, il suffit donc d'établir que $t\theta_n(x_1\ldots x_m) = \theta_p G(t)(x_1\ldots x_m)$, pour tout $m\geq 1$ et tous éléments $x_1,\ldots,x_m$ de $\{X_1,\ldots,X_n\}$. Or nous avons (en abrégeant les notations):

$$-\ t\theta_n(x_1\ldots x_m) = t\Big(\sum (-1)^{k-1}(mk)^{-1}\binom{m}{k}^{-1} \sum [x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}]\Big)$$

$$= \sum (-1)^{k-1}(mk)^{-1}\binom{m}{k}^{-1} \sum [t(x_{\sigma(1)}),\ldots,t(x_{\sigma(m)})]$$

(puisque t est un homomorphisme)

$$= \theta'_p(t(x_1)\otimes\ldots\otimes t(x_m)) \quad ,$$

$$-\ \theta_p G(t)(x_1\ldots x_m) = \theta_p(G(t)(x_1)\ldots G(t)(x_m))$$ (puisque $G(t)$ est un homomorphisme)

$$= \theta_p(G(t)\bar{e}_n(x_1)\ldots G(t)\bar{e}_n(x_m))$$

$$= \theta_p(\bar{e}_p t(x_1)\ldots\bar{e}_p t(x_m))$$ (puisque $\bar{e}$ est naturelle)

$$= \theta_p q_p(e'_p t(x_1)\otimes\ldots\otimes e'_p t(x_m))$$ (puisque $\bar{e}_p = q_p.e'_p$ et q_p est un homomorphisme)

$$= \theta'_p(t(x_1)\otimes\ldots\otimes t(x_m)) \ .$$

Par ailleurs, nous avons:

- $\theta_1\bar{e}_1(X_1) = \epsilon_1^{\circ}e_1^{\circ}(X_1) = \theta_1^{\circ}(X_1) = X_1$,

et, comme X_1 est base du V-module L(1), on en déduit que $\theta_1.\bar{e}_1 = Id_{Y_0(A)}$, autrement dit que θ vérifie bien la condition (i") du §3.

Enfin, si t': $G(L(1)) \longrightarrow G(L(n))$ est un homomorphisme de V-algèbres associatives, $\theta_n.t'.\bar{e}_1 : L(1) \longrightarrow L(n)$ est bien un homomorphisme de V-algèbres de Lie, puisqu'elle est V-linéaire et puisque L(1) est évidemment une algèbre de Lie commutative. Autrement dit, θ vérifie aussi la condition (ii") du §3.

La proposition est donc démontrée. Fin de la preuve.

De la proposition 12 précédente et de la proposition 7 du §1, on déduit que:

Corollaire. Si V est un anneau unitaire, commutatif, contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau unitaire, toute V-algèbre de Lie se plonge dans sa V-algèbre associative enveloppante (ou encore, le foncteur d'oubli canonique de la catégorie des V-algèbres associatives vers celle des V-algèbres de Lie est à plongements).

6. Compléments et commentaires.

6.1. Un homomorphisme $h: M \longrightarrow M'$ entre deux monoïdes peut être divisible sans être rétractable. Ainsi, désignons par $\bar{M}$ le monoïde abélien libre à deux générateurs g_1 et g_2 ; en notation multiplicative, ses éléments sont les mots $g_1{}^n g_2{}^m$, où $(n,m)\neq(0,0)$, ainsi que le mot $\emptyset$; désignons par $\bar{M}'$ le monoïde commutatif librement engendré par les générateurs g_1, g_2, et g' et la relation $g'g_1 = g'g_2$: ses éléments sont les mots $g'^p g^q$ (où g est un symbole "annexe") tels que $p > 0$ et $q \geq 0$, les mots $g_1{}^m g_2{}^n$ tels que précédemment et le mot $\emptyset$ et la loi de composition vérifie:

- $(g'^p g^q)(g'^r g^s) = g'^{p+r} g^{q+s}$,

- $(g'^p g^q)(g_1{}^m g_2{}^n) = g'^p g^{q+m+n}$,

- $(g_1{}^m g_2{}^n)(g_1{}^r g_2{}^s) = g_1{}^{m+r} g_2{}^{n+s}$,

- $\emptyset$ est l'élément neutre.

Alors, l'homomorphisme injection canonique $\bar{M} \longrightarrow \bar{M}'$ est divisible et ne peut être rétractable.

De même, un homomorphisme $h: M \longrightarrow M'$ entre deux monoïdes peut être rétractable sans être divisible: il en est ainsi de l'injection canonique $(\{0,1\},x) \longrightarrow (N,x)$. Cependant, si M est <u>régulier à droite dans</u> M' (i. e. si tout élément de M est simplifiable à droite dans M'), on vérifie facilement que h est rétractable si, et seulement si, il est divisible.

6.2. Un homomorphisme $h: M \longrightarrow M'$ entre deux monoïdes peut n'être ni divisible, ni rétractable, et pourtant induire un foncteur d'oubli M'-Ens $\longrightarrow$ M-Ens à plongements: il en est ainsi, par exemple, de l'injection canonique $\overline{M} \times (\{0,1\},x) \longrightarrow \overline{M}' \times (N,x)$.
Nous caractériserons, complètement, au Chap. IV, §§2 et 3 , de tels homomorphismes: ce sont les homomorphismes <u>purs</u>.

6.3. Si $h: M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme de monoïdes, dire qu'il est rétractable signifie aussi que l'homomorphisme de M^{op}-<u>ensembles</u> h admet un homomorphisme de M^{op}-ensembles $k: M' \longrightarrow M$, inverse à gauche de h

6.4. On sait qu'un homomorphisme injectif $h: G \longrightarrow G'$ entre deux groupes est divisible. Il est aussi rétractable. En effet, si l'on choisit dans chaque classe à droite $\overline{g'}$ de G' (modulo G) un représentant $\S(\overline{g'})$, on définit un homomorphisme de G^{op}-ensembles $k: G' \longrightarrow G$, inverse à gauche de h , en posant:

- pour tout élément g' de G' , $k(g') = (\S(\overline{g'}))^{-1}.g'$,

pourvu que l'on ait pris soin de choisir comme représentant de G l'élément neutre de G' (ou G).

6.5. Un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires $h: V \longrightarrow V'$ peut évidemment induire un foncteur d'oubli V'-Mod $\longrightarrow$ V-Mod à plongements sans que le V-module V admette un supplémentaire dans le V-module V' : on sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'application V-linéaire h soit <u>pure</u>. Nous n'avons examiné l'exemple du §4 qu'à titre de préparation (simple) à l'étude du §5.

6.6. Dans la preuve de la proposition 12 du §5 , nous utilisons le fait que $e'_n : L(n) \longrightarrow T(L(n))$ est une application V-linéaire injective. Il est, en effet, facile (et classique) d'établir directement que le foncteur d'oubli canonique AlgAs $\longrightarrow$ Mod est à plongements. On peut l'établir tout aussi facilement en utilisant la condition (CS), appliquée à l'homomorphisme $/H'/: /\underline{T}_{Mod}/ \longrightarrow /\underline{T}_{Ass}/$. Nous avons préféré illustrer cette condition par des exemples plus significatifs.

Dans cette même preuve, nous utilisons le fait que $\bar{e}_n : L(n) \longrightarrow G(L(n))$ est un homomorphisme de V-algèbres de Lie injectif: il ne s'agit nullement d'une utilisation abusive, comme hypothèse, de la conclusion que l'on cherche à démontrer! En effet, ceci signifie que l'on utilise le fait que le foncteur d'oubli canonique AlgAs $\longrightarrow$ AlgLie est à plongements libres pour établir qu'il est à plongements (quelconques).
On peut établir directement que le foncteur d'oubli canonique AlgAs $\longrightarrow$ AlgLie est à plongements libres (c'est la procédure classique), nous l'avons donc admis dans la preuve considérée, pour faire court. Bien sûr, il nous aurait été facile d'en donner une traduction syntaxique (justement parceque cette propriété ne concerne que les algèbres de Lie libres, i. e. la sous-catégorie pleine de AlgLie dont les objets sont les $L(n)$, c'est-à-dire justement $/\underline{T}_{Lie}/^{op}$!).

6.7. Dans la preuve de la proposition 12 du §5, nous utilisons le fait que $\theta_n'(I) = 0$. On en trouvera une démonstration purement combinatoire en (P.B.W.T.) , dans le cas où V est un corps de caractéristique nulle (i. e. contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-corps). Il est facile de ré-écrire cette preuve lorsque V est un anneau commutatif unitaire contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau unitaire. Son caractére combinatoire signifie exactement qu'elle est facilement traduisible en termes des théories de Lawvere $/\underline{T}_{Lie}/$, $/\underline{T}_{Ass}/$ et $/\underline{T}_{Mod}/$, i. e. qu'elle est bien syntaxique.

6.8. Dans la preuve de la proposition 12 du §5, il est essentiel de remarquer que, pour $n > 0$, $\theta_n : G(L(n)) \longrightarrow L(n)$ n'est pas, en général, un homomorphisme de V-algèbres de Lie (d'où l'intérêt de la notion de /J/-co-scindage, quand $/J/ \neq Id_{/\underline{T}/}$, au contraire du cas particulier étudié au §4). En effet, on vérifie facilement que l'on a:

- $\theta_n([xy,yy]) = \theta_n(xyyy - yyxy) = -1/6\,[y,x,y,y]$,
- $[\theta_n(xy),\theta_n(yy)] = 0$,

si $n > 0$ et pour tous éléments x, y de $L(n)$.

6.9. La preuve de la proposition 12 du §5 précise l'affirmation (sommaire) de la fin de (C.S.D.P.).

CHAPITRE IV: CAS GENERAL.

1. Plongement des générateurs dans les algèbres qu'ils engendrent.

Nous notons $/\underline{T}_{Ens}/$ la théorie de Lawvere des ensembles, i. e. la théorie telle que Ens et $Ens^{/\underline{T}_{Ens}/}$ soient équivalentes: alors, $\underline{T}_{Ens}{}^{op}$ est (isomorphe à) la sous-catégorie pleine de Ens dont les objets sont les $\underline{n} = \{1,\ldots,n\}$ (où $n \geq 1$) et $\underline{0} = \emptyset$.

On sait que $/\underline{T}_{Ens}/$ est un objet initial de la catégorie des théories de Lawvere (dont les objets sont ces théories et dont les flèches sont les homomorphismes). Ainsi, à toute théorie de Lawvere $/\underline{T}'/$ est associée un unique homomorphisme $/H_{\underline{T}'}/ : /\underline{T}_{Ens}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$, qui induit le foncteur d'oubli canonique "ensemble sous-jacent" $Ens^{/\underline{T}'/} \longrightarrow Ens$.

Dans ces conditions, nous dirons qu'une théorie $/\underline{T}'/$ est <u>triviale</u> si, et seulement si:

- l'homomorphisme canonique $/H_{\underline{T}'}/$ n'est pas fidèle.

Montrons, alors, que:

<u>Proposition 13 . Il y a exactement deux théories de Lawvere triviales, à savoir: celle des ensembles de cardinal égal à</u> 1 <u>et celle des ensembles de cardinal inférieur ou égal à</u> 1.

<u>Preuve</u>. Si $/\underline{T}'/$ est triviale, il existe donc deux applications f,g: $\underline{n} \longrightarrow \underline{m}$ <u>distinctes</u> (ce qui implique $m \geq 2$) telles que $H_{\underline{T}'}(f) = H_{\underline{T}'}(g)\colon A'^m \longrightarrow A'^n$. Il existe donc aussi deux applications $f',g'\colon \underline{1} \longrightarrow \underline{m}$ distinctes telles que $H_{\underline{T}'}(f') = \pi'(m,f'(1)) = \pi'(m,g'(1))\colon A'^m \longrightarrow A'$.

Il en résulte que, pour tout $p \geq 0$,

$$(\mathrm{Hom}(A'^p,\pi'(m,i))\colon \mathrm{Hom}(A'^p,A'^m) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'^p,A'))_{1 \leq i \leq m}$$

est une présentation de $\mathrm{Hom}(A'^p,A'^m)$ comme produit, dans Ens, de m copies de $\mathrm{Hom}(A'^p,A')$ pour laquelle les deux projections, d'indices $f'(1) \neq g'(1)$,

sont égales. Ceci impose que $Hom(A'^{p},A')$ est de cardinal inférieur ou égal à 1 . On en déduit que, pour tout $q \geq 0$, l'ensemble $Hom(A'^{p},A'^{q})$ (équipotent à $Hom(A'^{p},A')^{q}$) est de cardinal inférieur ou égal à 1 .
Mais, si $p \geq 1$, il existe toujours (au moins) une application $h: \underline{q} \longrightarrow \underline{p}$, donc une flèche $H_{\underline{T}'}(h): A'^{p} \longrightarrow A'^{q}$. Donc $Hom(A'^{p},A'^{q})$ est toujours de cardinal supérieur ou égal à 1 .
En d'autres termes, si $/\underline{T}'/$ est triviale, la sous-catégorie pleine $\underline{T}'_1$ de $\underline{T}'$, dont les objets sont les A'^{p} , où $p \geq 1$, est isomorphe au groupoïde des couples des objets de $\underline{T}'_1$ et l'on a, de plus:

- soit $Hom(A'^{0},A')$ est de cardinal 1 ,
- soit $Hom(A'^{0},A')$ est vide.

Dans le premier cas, on vérifie bien que $/\underline{T}'/$ est la théorie des ensembles de cardinal 1 et, dans le second, que $/\underline{T}'/$ est la théorie des ensembles de cardinal inférieur ou égal à 1 . <u>Fin de la preuve</u>.

Montrons, maintenant, que si $/\underline{T}'/$ est non triviale, l'homomorphisme canonique $/H_{\underline{T}'}/: /\underline{T}_{Ens}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ vérifie la condition (CS). Plus précisément:

<u>Proposition</u> 14. <u>Le foncteur d'oubli canonique</u> $Ens^{/\underline{T}'/} \longrightarrow Ens$ <u>est à plongement si, et seulement si, la théorie de Lawvere</u> $/\underline{T}'/$ <u>est non triviale</u>.

<u>Preuve</u>. Compte tenu de la proposition 13 précédente, il est clair que si $/\underline{T}'/$ est triviale le foncteur d'oubli canonique $Ens^{/\underline{T}'/} \longrightarrow Ens$ n'est certainement pas à plongements.
Réciproquement, supposons que $/\underline{T}'/$ est non triviale et que $Z : z_n \longrightarrow \underline{T}_{Ens}$ est un zigzag pour lequel on dispose du diagramme commutatif de $\underline{T}'$ ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 & \cdots \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "Z"] & 2n-1 & 2n \arrow[l] \arrow[r] & 2n+1 \\
A=\underline{1} & A^{p_2}=\underline{p}_2 \arrow[l] \arrow[r] & A^{p_3}=\underline{p}_3 & \cdots \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "H_{\underline{T}'}"] & A^{p_{2n-1}}=\underline{p}_{2n-1} & A^{p_{2n}}=\underline{p}_{2n} \arrow[l] \arrow[r] & A^{p_{2n+1}}=A=1 \\
A' \arrow[drrr, "t'_1 = Id_{A'}"'] & A'^{p_2} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[drr, "t'_2"] & A'^{p_3} \arrow[dr, "t'_3"] & \cdot \arrow[l] \arrow[r] & A'^{p_{2n-1}} \arrow[dl, "t'_{2n-1}"] & A'^{p_{2n}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dll, "t'_{2n}"] & A' \arrow[dlll, "t'_{2n+1} = Id_{A'}"] \\
 & & & A' & & &
\end{tikzcd}$$

Alors, le foncteur F: $z_n{}^{op} \xrightarrow{Z^{op}} \underline{T}_{Ens}{}^{op} \hookrightarrow Ens$ admet une limite inductive, qui est évidemment objet de $\underline{T}_{Ens}{}^{op}$, que nous représentons par:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \underline{p} & & & \\
\underline{1}=\underline{p}_1 \arrow[urrr, "s_1"] \arrow[r] & \underline{p}_2 \arrow[urr, "s_2"'] & \underline{p}_3 \arrow[l] \arrow[ur, "s_3"'] \arrow[r] & \cdots\cdots & \underline{p}_{2n-1} \arrow[l] \arrow[ul, "s_{2n-1}"] \arrow[r] & \underline{p}_{2n} \arrow[ull, "s_{2n}"] & \underline{p}_{2n+1}=\underline{1} \arrow[l] \arrow[ulll, "s_{2n+1}"']
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que $H_{\underline{T}'}(s_1) = H_{\underline{T}'}(s_{2n+1})$ et, comme $H_{\underline{T}'}$ est fidèle, on en déduit que $s_1 = s_{2n+1}$.
Le calcul des limites inductives dans Ens indique alors qu'il existe un foncteur $N : z_m \longrightarrow z_n$ et une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq 2m+1}$ appartenant à $\prod\limits_{1 \leq i \leq 2m+1} \underline{p}_{N(i)}$ tels que:

- $N(1) = 1$ et $N(2m+1) = 2n+1$,

- $x_1 = 1 = x_{2m+1}$,

- $Z^{op}.N^{op}(2k-1 \longrightarrow 2k)(x_{2k-1}) = x_{2k} = Z^{op}.N^{op}(2k+1 \longrightarrow 2k)(x_{2k+1})$, pour tout $1 \leq k \leq m$.

Autrement dit, nous disposons du diagramme commutatif de $\underline{T}_{Ens}$ ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drrr, "\overline{x}_1 = Id_A"'] & A^{p_2} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[drr, "\overline{x}_2"] & A^{p_3} \arrow[dr, "\overline{x}_3"] & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & A^{p_{2n-1}} \arrow[dl, "\overline{x}_{2n-1}"'] & A^{p_{2n}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dll, "\overline{x}_{2n}"'] & A \arrow[dlll, "Id_A = \overline{x}_{2n+1}"] \\
 & & & A & & &
\end{tikzcd}$$

où, pour tout $1 \leq i \leq 2m+1$, $\overline{x}_i : \underline{1} \longrightarrow \underline{p}_{N(i)}$ est l'application qui à 1 associe x_i . Autrement dit, $/H_{\underline{T}'}/$ vérifie la condition (CS). D'où la proposition. <u>Fin de la preuve</u>.

2. Critères de pureté pour les monoïdes d'opérateurs.

Si $h: M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme de monoïdes, nous dirons qu'il est pur (à gauche) si, et seulement si, pour toute famille $(m_i)_{1 \leq i \leq 2p}$ d'éléments de M et toute famille $(m'_i)_{1 \leq i \leq 2p+1}$ d'éléments de M' telles que:

(i) $m'_1 = 1_{M'} = m'_{2p+1}$ (où $1_{M'}$ est l'élément neutre de M'),

(ii) $m'_i.h(m_i) = m'_{i+2}.h(m_{i+1}) = m'_{i+1}$, pour tout $1 \leq i$ impair $\leq 2p-1$

alors, il existe une application $N_0: \{1,\ldots,2q+1\} \longrightarrow \{1,\ldots,2p+1\}$ et une famille $(\bar{m}_j)_{1 \leq j \leq 2q+1}$ d'éléments de M telles que:

(j) $N_0(1) = 1$ et $N_0(2q+1) = 2p+1$,

(jj) $|N_0(j+1)-N_0(j)| = 1$, pour tout $1 \leq j \leq 2q$,

(jjj) $\bar{m}_1 = 1_M = \bar{m}_{2q+1}$ (où 1_M est l'élément neutre de M) ,

(jv) $\bar{m}_j.m_{N_0(j)} = \bar{m}_{j+1} = \bar{m}_{j+2}.m_{N_0(j+1)}$, pour tout $1 \leq j$ impair $\leq 2q-1$.

On vérifie facilement qu'un homomorphisme pur h est nécessairement injectif (auquel cas, on l'identifiera à une injection canonique).

Dans ces conditions, prouvons que:

Proposition 15 . Un homomorphisme de monoïdes $h: M \longrightarrow M'$ est pur (à gauche) si, et seulement si, l'homomorphisme de théories de Lawvere $/H_h/: /\underline{T}_M/ \longrightarrow /\underline{T}_{M'}/$, qu'il induit (voir Chap. II, § 2), vérifie la condition (CS) .

Preuve. Supposons, tout d'abord, que $/H_h/: /\underline{T}_M/ \longrightarrow /\underline{T}_{M'}/$ vérifie (CS). On sait (voir la preuve de la prop. 4 , §2, Chap. II) que l'on dispose du diagramme commutatif de foncteurs ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "y'"] & \underline{T}_{M'} \\ M \arrow[u, "h"] \arrow[r, "y"] & \underline{T}_M \arrow[u, "H_h"'] \end{tikzcd}$$

où y (resp. y') est plein et fidèle, i. e. identifie M (resp. M') au monoïde $\mathrm{End}_{\underline{T}}(A)$ (resp. $\mathrm{End}_{\underline{T}'}(A')$).

Par conséquent, si $(m_i)_{1 \leq i \leq 2p}$ est une famille d'éléments de M vérifiant les conditions (i) et (ii) précédentes, on dispose du zigzag $Z\colon z_p \longrightarrow \underline{T}$ et du diagramme commutatif de $\underline{T}'$ représentés ci-dessous:

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow \quad \cdots\cdots \quad \longrightarrow 2p-1 \longleftarrow 2p \longrightarrow 2p+1$$

$$\Big\downarrow Z$$

$$A \xleftarrow[m_1]{} A \xrightarrow[m_2]{} A \xleftarrow[m_3]{} \cdots\cdots \xrightarrow[m_{2p-1}]{} A \xleftarrow[m_{2p}]{} A \xrightarrow[m_{2p+1}]{} A$$

$$\Big\downarrow H_h$$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[drrr, "m'_1 = 1_{M'}"'] & A' \arrow[l, "m_1"'] \arrow[r, "m_2"] \arrow[drr, "m'_2"] & A' \arrow[dr, "m'_3"] & \cdots\cdots \arrow[l, "m_3"'] \arrow[r, "m_{2p-1}"] & A' \arrow[dl, "m'_{2p-1}"'] & A' \arrow[l, "m_{2p}"'] \arrow[r, "m_{2p+1}"] \arrow[dll, "m'_{2p}"] & A' \arrow[dlll, "m'_{2p+1} = 1_{M'}"] \\
 & & & A' & & &
\end{tikzcd}$$

Mais, comme $/H_h/$ vérifie (CS), il existe bien un foncteur $N\colon z_q \longrightarrow z_p$ et un diagramme commutatif de $\underline{T}$ comme représenté ci-dessous:

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \longrightarrow 2q-1 \longleftarrow 2q \longrightarrow 2q+1$$

$$\Big\downarrow Z.N$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drrr, "\bar{m}_1 = 1_M"'] & A \arrow[l, "m_{N(1)}"'] \arrow[r, "m_{N(2)}"] \arrow[drr, "\bar{m}_2"] & A \arrow[dr, "\bar{m}_3"] & \cdots\cdots\cdots \arrow[l, "m_{N(3)}"'] \arrow[r, "m_{N(2q-1)}"] & A \arrow[dl, "\bar{m}_{2q-1}"'] & A \arrow[l, "m_{N(2q)}"'] \arrow[r, "m_{N(2q+1)}"] \arrow[dll, "\bar{m}_{2q}"] & A \arrow[dlll, "\bar{m}_{2q+1} = 1_M"] \\
 & & & A & & &
\end{tikzcd}$$

(où $N(1) = 1$ et $N(2q+1) = 2p+1$).

Si N_0 désigne la restriction de N aux objets de z_q et z_p, il est clair que la famille $(\overline{m}_j)_{1 \leq j \leq 2q+1}$, d'éléments de M, ainsi obtenue vérifie bien les conditions (j) à (jv). Par conséquent h est pur.

Réciproquement, supposons que $h: M \longrightarrow M'$ est pur.
On sait que (voir la prop. 4 , §2 , Chap. II) $\underline{T}_M{}^{op}$ (resp. $\underline{T}_{M'}{}^{op}$) est (isomorphe à) la sous-catégorie pleine de M-Ens (resp. M'-Ens) dont les objets sont les M-ensembles (resp. M'-ensembles) libres $L(u)$ (resp. $L'(u)$) à u générateurs, où $u \geq 0$.
Constatons qu'alors on peut identifier tout homomorphisme $t: L(u) \longrightarrow L(v)$, de M-ensembles, au couple $((t^{(x)})_{1 \leq x \leq u}, t^{\wedge})$ tel que:

- $t^{(x)}: L(1) = M \longrightarrow M = L(1)$ est un homomorphisme de M-ensembles, pour tout $1 \leq x \leq u$,
- $t^{\wedge}: \underline{u} = \{1,\ldots,u\} \longrightarrow \underline{v} = \{1,\ldots,v\}$ est une application,
- $t(a_x) = t^{(x)}(1)\, b_{t^{\wedge}(x)}$ (si $\{a_1,\ldots,a_u\}$ et $\{b_1,\ldots,b_v\}$ sont, respectivement, les ensembles générateurs de $L(u)$ et $L(v)$), pour tout $1 \leq x \leq u$.

Alors, si $s: L(v) \longrightarrow L(w)$ est un autre homomorphisme de M-ensembles, nous avons:

- $(s.t)^{(x)}(1) = t^{(x)}(1).s^{(t^{\wedge}(x))}(1)$ (ce qui définit entièrement $(s.t)^{(x)}$), pour tout $1 \leq x \leq u$,
- $(s.t)^{\wedge} = s^{\wedge}.t^{\wedge}$.

Evidemment, nous procédons à des identifications analogues pour les homomorphismes de M'-ensembles $L'(u) \longrightarrow L'(v)$.
Dans ces conditions, si l'on dispose d'un zigzag $Z^{op}: z_p{}^{op} \longrightarrow \underline{T}_M{}^{op}$ et d'un diagramme commutatif de $\underline{T}_{M'}{}^{op}$ tels que ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 & 3 \arrow[l] \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] & 2p-1 \arrow[r] \arrow[d, "Z^{op}"] & 2p & 2p+1 \arrow[l] \\
L(1) \arrow[r, "t_1"'] & L(u_2) & L(u_3) \arrow[l, "t_2"] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & L(u_{2p-1}) \arrow[r, "t_{2p-1}"'] \arrow[d, "H_h"] & L(u_{2p}) & L(1) \arrow[l, "t_{2p}"] \\
L'(1) \arrow[r] & L'(u_2) & L'(u_3) \arrow[l] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & L'(u_{2p-1}) \arrow[r] & L'(u_{2p}) & L'(1) \arrow[l] \\
 & & L'(1) \arrow[ull, "t'_1 = Id_{L'(1)}"] \arrow[ul, "t'_2"] \arrow[u, "t'_3"] \arrow[ur, "t'_{2p-1}"] \arrow[urr, "t'_{2p}"] \arrow[urrr, "t'_{2p+1} = Id_{L'(1)}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

alors, on dispose du diagramme commutatif de Ens ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
\underline{1} \arrow[r, "t_1^{\wedge}"] & \underline{u}_2 & \underline{u}_3 \arrow[l, "t_2^{\wedge}"'] & \cdots & \underline{u}_{2p-1} \arrow[r, "t_{2p-1}^{\wedge}"] & \underline{u}_{2p} & \underline{1} \arrow[l, "t_{2p}^{\wedge}"'] \\
 & & & \underline{1} \arrow[ulll, "t_1'^{\wedge} = Id_{\underline{1}}"] \arrow[ull, "t_2'^{\wedge}"'] \arrow[ul, "t_3'^{\wedge}"'] \arrow[ur, "t_{2p-1}'^{\wedge}"] \arrow[urr, "t_{2p}'^{\wedge}"] \arrow[urrr, "t_{2p+1}'^{\wedge} = Id_{\underline{1}}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

et les familles $(m_i)_{1 \leq i \leq 2p}$, d'éléments de M, et $(m_i')_{1 \leq i \leq 2p+1}$, d'éléments de M', telles que:

- $m_i' = t_i'^{(1)}(1)$, pour tout $1 \leq i \leq 2p+1$,
- $m_i = t_i^{(t_i'^{\wedge}(1))}(1)$, pour tout $1 \leq i$ impair $\leq 2p-1$,
- $m_i = t_i^{(t_{i+1}'^{\wedge}(1))}(1)$, pour tout $1 \leq i$ pair $\leq 2p$,

vérifient les conditions (i) et (ii) précédentes.

Comme h est pur, il existe donc une application $N_0 : \underline{2q+1} \longrightarrow \underline{2p+1}$ et une famille $(\overline{m}_j)_{1 \leq j \leq 2q+1}$, d'éléments de M, vérifiant les conditions (j) à (jv).

Si $N : z_q \longrightarrow z_p$ est l'unique foncteur ayant N_0 pour restriction aux objets, ceci signifie exactement que l'on dispose d'un diagramme commutatif dans $\underline{T}_M^{op}$ tel que ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 & 3 \arrow[l] & \cdots \arrow[d, "N^{op}"] & 2q-1 \arrow[r] & 2q & 2q+1 \arrow[l] \\
1 \arrow[r] & 2 & 3 \arrow[l] & \cdots \arrow[d, "Z^{op}"] & 2p-1 \arrow[r] & 2p & 2p+1 \arrow[l] \\
L(1) \arrow[r, "m_{N(1)}"] & L(u_{N(2)}) & L(u_{N(3)}) \arrow[l, "m_{N(2)}"'] & \cdots & L(u_{N(2q-1)}) \arrow[r, "m_{N(2q-1)}"] & L(u_{N(2q)}) & L(1) \arrow[l, "m_{N(2q)}"'] \\
 & & & L(1) \arrow[ulll, "\overline{t}_1"] \arrow[ull, "\overline{t}_2"'] \arrow[ul, "\overline{t}_3"'] \arrow[ur, "\overline{t}_{2q-1}"] \arrow[urr, "\overline{t}_{2q}"] \arrow[urrr, "\overline{t}_{2q+1}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

où l'on a:

- $\bar{t}_j\,\hat{} = t'_{N_0(j)}\,\hat{}$, pour tout $1 \leq j \leq 2q+1$,

- $\bar{t}_j^{(1)}(1) = \bar{m}_j$, pour tout $1 \leq j \leq 2q+1$.

Comme, en particulier, ceci impose $\bar{t}_1 = \bar{t}_{2q+1} = Id_{L(1)}$, on en déduit que $/H_h/$ vérifie (CS). Fin de la preuve.

3. Compléments et commentaires.

3.1. La situation particulière du §1 se généralise comme suit.
Disons qu'une théorie de Lawvere $/\underline{T}/$ est amalgamante si, et seulement si, les sommes amalgamées se calculent, dans $Ens^{/\underline{T}/}$, point par point (i. e. comme dans $Ens^{\underline{T}}$). Ainsi, la théorie des ensembles $/\underline{T}_{Ens}/$ est amalgamante.
Dans ces conditions, la condition suffisante de plongement (CS) est aussi nécessaire. Précisément, on a:

Proposition 16. Si $/H/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme de théories de Lawvere tel que $/\underline{T}/$ soit amalgamante, alors le foncteur $Ens^{/H/}$ est à plongements si, et seulement si, $/H/$ vérifie la condition (CS).

Preuve. Il est clair que la condition (CS) est ... suffisante! Montrons qu'elle est nécessaire et, pour ce faire, supposons que $Ens^{/H/}$ est à plongements, i. e. que son adjoint à gauche G est fidèle.
On sait que $\underline{T}^{op}$ (resp. $\underline{T}'^{op}$) est la sous-catégorie pleine de $Ens^{/\underline{T}/}$ (resp. $Ens^{/\underline{T}'/}$) dont les objets sont les $Y(A^n)$ (resp. $Y'(A'^n)$) , où $n \geq 0$, et que H^{op} est restriction de G.
Si l'on dispose d'un zigzag $Z^{op} : z_n^{op} \longrightarrow \underline{T}^{op}$ et du diagramme commutatif de $\underline{T}'^{op}$ ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
1 \arrow[r] & 2 & 3 \arrow[l] & \cdots\cdots \arrow[d, "Z^{op}"] & 2n-1 \arrow[r] & 2n & 2n+1 \arrow[l] \\
Y'(A') \arrow[r] & Y'(A'^{p_2}) & Y'(A'^{p_3}) \arrow[l] & \cdots & Y'(A'^{p_{2n-1}}) \arrow[r] & Y'(A'^{p_{2n}}) & Y'(A') \arrow[l] \\
 & & & Y'(A') \arrow[ulll, "Id_{Y'(A')}"] \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[urr] \arrow[urrr, "Id_{Y'(A')}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

représentons par:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & L & & & \\
Y(A) \arrow[urrr, "s_1"] \arrow[r] & Y(A^{p_2}) \arrow[urr] & Y(A^{p_3}) \arrow[l] \arrow[ur] & \cdots & Y(A^{p_{2n-1}}) \arrow[ul] \arrow[r] & Y(A^{p_{2n}}) \arrow[ull] & Y(A) \arrow[l] \arrow[ulll, "s_{2n+1}"']
\end{tikzcd}$$

une limite inductive naturalisée de $\quad z_n^{op} \xrightarrow{Z^{op}} \underline{T}^{op} \hookrightarrow Ens^{/\underline{T}/}$.

Alors, nous avons $G(s_1) = G(s_{2n+1})$ et, puisque G est fidèle, $s_1 = s_{2p+1}$. Comme la limite inductive L se calcule par une succession de sommes amalgamées et puisque $/\underline{T}/$ est amalgamante, la limite inductive L se calcule point par point. De l'égalité $Hom(Y(A),s_1)(Id_{Y(A)}) = Hom(Y(A),s_{2n+1})(Id_{Y(A)})$, résulte, vu le calcul des limites inductives dans Ens , qu'il existe un foncteur $N: z_m \longrightarrow z_n$ et une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq 2m+1}$ appartenant à $\prod_{1 \leq i \leq 2m+1} Hom(Y(A),Z(i))$ tels que:

- $N(1) = 1$ et $N(2m+1) = 2n+1$,
- $x_1 = Id_{Y(A)} = x_{2m+1}$,
- $Z^{op}.N^{op}(2k-1 \longrightarrow 2k)(x_{2k-1}) = x_{2k} = Z^{op}.N^{op}(2k+1 \longrightarrow 2k)(x_{2k+1})$, pour tout $1 \leq k \leq m$.

On en conclut (comme dans la preuve de la proposition 14 du §1) que $/H/$ vérifie bien (CS). Fin de la preuve.

3.2. Disons que $(/\underline{T}'/,u)$ est une théorie pointée si, et seulement si:

- $/\underline{T}'/$ est une théorie de Lawvere,
- $u: 1 \longrightarrow A'$ est une flèche distinguée dans $\underline{T}'$.

Si $(/\underline{T}_{Ens^*}/,\bar{u})$ est la théorie pointée des ensembles pointés, i. e. si:

- $\underline{T}_{Ens^*}$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie Ens^*, des ensembles pointés, ayant pour objets les $(\underline{n},1)$, où $n \geq 1$,
- $\bar{u} : (\underline{1},1) \longrightarrow (\underline{2},1)$ est l'application pointée canonique,

alors, à toute théorie pointée $(/\underline{T}'/, u)$ est associé un unique homomorphisme $/H_u/ : /\underline{T}_{Ens*}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ vérifiant $H_u(\overline{u}) = u$. Nous dirons alors qu'une théorie pointée $(/\underline{T}'/, u)$ est <u>triviale</u> si, et seulement si, $/H_u/$ n'est pas fidèle.

Il est facile de vérifier que la <u>seule théorie pointée triviale est celle des ensembles pointés n'ayant qu'un élément</u> (leur point!).

Comme $/\underline{T}_{Ens*}/$ est évidemment une théorie amalgamante, de la proposition précédente et de manière analogue à ce qui est établi au §1, on déduit alors que:

<u>Proposition</u> 17. <u>Si</u> $(/\underline{T}'/, u)$ <u>est une théorie pointée</u>, <u>le foncteur d'oubli canonique</u> (<u>induit par</u> $/H_u/$) $Ens^{/\underline{T}'/} \longrightarrow Ens*$ <u>est à plongements si</u>, <u>et seulement si</u>, $(/\underline{T}'/, u)$ <u>est non triviale</u>.

3.3. Si M est un monoïde, on vérifie facilement que la théorie $/\underline{T}_M/$ des M-ensembles est amalgamante. On en conclut que:

<u>Proposition</u> 18. <u>Si</u> $h : M \longrightarrow M'$ <u>est un homomorphisme de monoïdes</u> <u>une condition nécessaire et suffisante pour que le foncteur d'oubli canonique</u> M'-Ens $\longrightarrow$ M-Ens <u>soit à plongements est que</u> h <u>soit pur</u> (au sens du §2).

<u>Preuve</u>. D'après la proposition 15 du §2, on sait que $/H_h/ : /\underline{T}_M/ \longrightarrow /\underline{T}_{M'}/$ vérifie (CS) si, et seulement si, h est pur. D'après la proposition 17 précédente, puisque $/\underline{T}_M/$ est amalgamante, on sait M'-Ens $\longrightarrow$ M-Ens est à plongements si, et seulement si, $/H_h/$ vérifie (CS). D'où la proposition. <u>Fin de la preuve</u>.

3.4. On peut établir la proposition 18 précédente d'une autre manière. Si $H : \underline{T} \longrightarrow \underline{T}'$ est un <u>foncteur</u> entre deux catégorie petites (<u>quelconques</u>), le foncteur $Ens^H : Ens^{\underline{T}'} \longrightarrow Ens^{\underline{T}}$ admet un adjoint à gauche. Alors, on sait (voir (C.S.D.P.)) qu'une <u>condition nécessaire et suffisante</u> pour que Ens^H soit à plongements est que la condition (CS) soit vérifiée <u>pour tout objet</u> A <u>de</u> $\underline{T}$

Il est facile de vérifier que $Ens^h : Ens^{M'} = M'\text{-Ens} \longrightarrow Ens^M = M\text{-Ens}$ est bien le foncteur d'oubli canonique (où les monoïdes M et M' sont identifiés à des catégories ayant <u>un seul</u> objet) et que le <u>foncteur</u> h vérifie (CS) si, et seulement si, l'homomorphisme de monoïdes h est pur !

3.5. Supposons que $h: M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme injectif de monoïdes. Alors, nous avons (en identifiant h à une injection canonique):

Proposition 19. Si tout élément de M est simplifiable à droite dans M', l'homomorphisme h est pur si, et seulement si, il est divisible.

Preuve. En vertu de la proposition 3 du §2 du Chap. II, de la proposition 18 précédente, il est clair que, si h est divisible, alors il est pur.
Inversement, supposons que h est pur.
Si n_1, n_2 sont deux éléments de M et n' est un élément de M' tels que $n'.n_2 = n_1$, alors $(n_1 = m_1, n_2 = m_2, n_2 = m_3, n_1 = m_4)$ et $(m'_1 = 1_{M'}, m'_2 = n_1, m'_3 = n', m'_4 = n_1, m'_5 = 1_{M'})$ sont deux familles d'éléments de M et M' vérifiant les conditions (i) et (ii) du §2. Il existe donc une application $N_0: \{1,\dots,2q+1\} \longrightarrow \{1,\dots,5\}$ et une famille $(\overline{m}_j)_{1 \leq j \leq 2q+1}$, d'éléments de M, vérifiant les conditions (j) à (jv) du §2.
Notons k le plus petit entier tel que $N_0(2k+1)=3$. Nous avons donc:

- $\overline{m}_j.n_1 = \overline{m}_1.n_1$, pour tout $1 \leq j$ impair $\leq 2k-1$,

ce qui impose $\overline{m}_j = \overline{m}_1 = 1_M$, pour tout $1 \leq j$ impair $\leq 2k-1$, puisque n_1 est simplifiable.
Nous avons alors:

- $\overline{m}_{2k-1}.n_1 = \overline{m}_{2k+1}.n_2 = n_1 = n'.n_2$,

ce qui impose $\overline{m}_{2k+1} = n'$, donc $n' \in M$, puisque n_2 est simplifiable. D'où l'affirmation. Fin de la preuve.

3.6. Supposons que $(h_i: M_i \longrightarrow M'_i)_{i\in I}$ est une famille d'homomorphismes entre monoïdes.
Alors, on vérifie facilement que:

- si $h_i: M_i \longrightarrow M'_i$ est divisible (resp. rétractable) pour tout $i\in I$, l'homomorphisme produit $\prod_{i\in I} h_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M'_i$ est divisible (resp. rétractable) et réciproquement,

- si $I = I' \cup I''$ et si h_i est divisible (resp. rétractable) pour tout $i \in I'$ (resp. $i \in I''$), l'homomorphisme produit $\prod_{i\in I} h_i$ est pur,

- si I est fini et si h_i est pur pour tout $i\in I$, l'homomorphisme produit $\prod_{i\in I} h_i$ est pur,

- si $\prod_{i\in I} h_i$ est pur, alors h_i est pur pour tout élément i de I.

Notons que c'est la deuxième assertion qui nous a été utile dans le commentaire 6.2 du § 6 du Chap. III et que la dernière affirmation ne serait pas exacte si l'on n'y avait pas supposé I fini.

3.7. On sait que, si $h: V \longrightarrow V'$ est un homomorphismes d'anneaux unitaires commutatifs, le foncteur d'oubli canonique $V'\text{-Mod} \longrightarrow V\text{-Mod}$ est à plongements si, et seulement si, h est pur (voir (A.L.C.O.)). On établit facilement la suffisance de cette condition en appliquant la condition (CS) à l'homomorphisme $/H_h/ : /\underline{T}_V/ \longrightarrow /\underline{T}_{V'}/$ de la théorie de Lawvere des V-modules vers celle des V'-modules (c'est dans un cas très particulier d'homomorphisme pur que nous avons raisonné au § 4 du Chap. III, à titre de préparation pour le § 5). Pour établir sa nécessité il faudrait "additiviser" les considérations de 3.4 (par exemple) : nous laissons ce soin au lecteur, car nous avons préféré traiter en détail le cas, original, des homomorphismes de monoïdes.

APPENDICE.

1. Une condition nécessaire et suffisante de plongement.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons énoncé et appliqué que le critère syntaxique de plongement (CS) dans le cas de foncteurs algébriques, i. e. de foncteurs induits par des homomorphismes entre théories de Lawvere. Bien entendu, les problèmes de plongement ne se posent pas que dans de tels cas particuliers: ils se posent encore (par exemple) dans le cas de foncteurs essentiellement algébriques, i. e. de foncteurs induits par des réalisations entre esquisses projectives petites (voir (E.T.S.A.)) ou, si l'on préfère, pour des foncteurs admettant des adjoints à gauche entre catégories localement présentables (voir (L.P.L.G.)). Dans ces cas plus généraux, on dispose encore d'une condition suffisante syntaxique de plongement (voir (C.S.D.P.)) dont la condition (CS) n'est qu'une traduction particulière. Cependant, dans certains cas intérmédiaires, on peut utiliser une condition sémantique "déduite" de cette condition syntaxique.

Ainsi, supposons que $/\underline{T}/$ est une théorie de Lawvere et que $\mathcal{C}$ est un ensemble de cônes inductifs $C = (p_I : P_I \longrightarrow P)_{I \in \underline{I}}$, indexés par des catégories petites $\underline{I}$, distingués dans $Ens^{/\underline{T}/}$. On dit alors qu'une algèbre F de $/\underline{T}/$ valide $\mathcal{C}$ si, et seulement si:

- $(Hom(p_I,F): Hom(P,F) \longrightarrow Hom(P_I,F))_{I \in \underline{I}^{op}}$ est une limite projective dans Ens , pour tout cône inductif C appartenant à $\mathcal{C}$.

Alors, on note $Val(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $Ens^{/\underline{T}/}$ dont les objets sont ceux qui valident $\mathcal{C}$ et il n'est pas difficile d'établir que $Val(\mathcal{C})$ est localement présentable (ou projectivement esquissable).

Si, de plus, $/H/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme de théories induisant un foncteur $Ens^{/H/} : Ens^{/\underline{T}'/} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}/}$ admettant une restriction

$U : Ens^{/\underline{T}'/} \longrightarrow Val(\mathcal{C})$, on en déduit que U admet un adjoint à gauche. Dans ces conditions, <u>une condition nécessaire et suffisante pour que</u> U <u>soit à plongements est que</u>:

(CNS) si $Z: z_n \longrightarrow \underline{T}$ est un zigzag de $\underline{T}$ tel que $Z(1) = A = Z(2n+1)$ et s'il existe un diagramme commutatif de $\underline{T}'$ tel que représenté ci-dessous:

$$
(*) \qquad
\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 & \dots \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "Z"] & 2n-1 & 2n \arrow[l] \arrow[r] & 2n+1 \\
A & A^{p_2} \arrow[l] \arrow[r] & A^{p_3} & \dots \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "H"] & A^{p_{2n-1}} & A^{p_{2n}} \arrow[l] \arrow[r] & A \\
A' \arrow[drrr, "Id_{A'} = t'_1"'] & A'^{p_2} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[drr, "t'_2"] & A'^{p_3} \arrow[dr, "t'_3"] & \dots \arrow[l] \arrow[r] & A'^{p_{2n-1}} \arrow[dl, "t'_{2n-1}"'] & A'^{p_{2n}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dll, "t'_{2n}"'] & A' \arrow[dlll, "t'_{2n+1} = Id_{A'}"] \\
 & & & A' & & &
\end{tikzcd}
$$

alors, pour tout algèbre F de $/\underline{T}/$, validant $\mathcal{C}$, on a

$$Hom(s_1, F) = Hom(s_{2n+1}, F) : Hom(L,F) \longrightarrow Hom(Y(A),F),$$

lorsque l'on représente par

$$
\begin{tikzcd}
 & & & L = L_Z & & & \\
Y(A) \arrow[urrr, "s_1"] \arrow[r] & Y(A^{p_2}) \arrow[urr] & Y(A^{p_3}) \arrow[l] \arrow[ur] & \dots & Y(A^{p_{2n-1}}) \arrow[ul] \arrow[r] & Y(A^{p_{2n}}) \arrow[ull] & Y(A) \arrow[l] \arrow[ulll, "s_{2n+1}"']
\end{tikzcd}
$$

une limite inductive de $Y.Z^{op}: z_n^{\ op} \longrightarrow Ens^{/\underline{T}/}$.

2. <u>Exemples d'applications</u>.

Supposons, tout d'abord, que $/H/ : /\underline{T}_{Monab}/ \longrightarrow /\underline{T}_{Ab}/$ est l'homomorphisme de théories de Lawvere induisant le foncteur d'oubli canonique $Ab \longrightarrow Monab$ de la catégorie des groupes abéliens (pour simplifier) vers celle des monoïdes abéliens (pour simplifier). Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble possédant pour unique élément le cône inductif (indexé par la catégorie $\underline{1}$) $C = (k: M_3 \longrightarrow M_2)$ de Monab tel que:

- M_2 est le monoïde abélien libre à deux générateurs x et y ,

- M_3 est le monoïde abélien librement engendré par les générateurs x , y et z et la relation $x+y = x+z$,

- $k: M_3 \longrightarrow M_2$ est l'unique homomorphisme de monoïdes tel que $k(x) = x$ et $k(y) = y = k(z)$.

Alors, il est clair que $Val(\mathcal{C})$ est la sous-catégorie pleine de Monab ayant pour objets les monoïdes réguliers abéliens.
Identifions, maintenant, $\underline{T}_{Monab}{}^{op}$ (resp. $\underline{T}_{Ab}{}^{op}$) à la sous-catégorie pleine de Monab (resp. Ab) ayant les monoïdes (resp. groupes) abéliens libres $\mathbb{N}^p$ (resp. $\mathbb{Z}^p$) à p générateurs (quand $p \geq 0$) $g_i = (0,\dots,1,\dots,0)$ (où 1 est mis à la $i^{ème}$ place , si $1 \leq i \leq p$ et si $p > 0$) .
Si $Z: z_n \longrightarrow \underline{T}_{Monab}$ est un zigzag et (*) est un diagramme commutatif de $\underline{T}_{Ab}$ tels que dans l'énoncé de la (CNS) précédente (dont on reprend les notations), si M est un monoïde abélien régulier et si

$$\begin{tikzcd}
 & & & M & & & \\
\mathbb{N} \arrow[r] \arrow[urrr, "h_1"] & \mathbb{N}^{p_2} \arrow[urr, "h_2"] & \mathbb{N}^{p_3} \arrow[l, dashed] \arrow[ur, "h_3"] & \cdots\cdots \arrow[u, phantom, "h_{2n-1}"] & \mathbb{N}^{p_{2n-1}} \arrow[r] \arrow[ul] & \mathbb{N}^{p_{2n}} \arrow[ull, "h_{2n}"'] & \mathbb{N} \arrow[l] \arrow[ulll, "h_{2n+1}"'] \\
1 \arrow[r] & 2 & 3 \arrow[l] & \cdots\cdots \arrow[u, "Z^{op}"'] & 2n-1 \arrow[r] & 2n & 2n+1 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de Monab, posons, pour tout $1 \leq j \leq 2p+1$ et tout homomorphisme $t': \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^{p_j}$ de groupes abéliens:

- $t'^{+}(1) = \sum_1^{p_j} a_i^{+} g_i$,

- $t'^{-}(1) = \sum_1^{p_j} a_i^{-} g_i$, (lorsque, pour tout entier relatif a, on note $a^{+} = \mathrm{Sup}(a,0)$ et $a^{-} = \mathrm{Sup}(-a,0)$),

alors, ceci définit deux homomorphismes de monoïdes abéliens $t^{+},t^{-} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^{p_j}$.
Dans ces conditions, nous avons:

- $h_1(1) + h_3(t_3'^{-}(1)) = h_3(t_3'^{+}(1))$,
- $h_3(t_3'^{+}(1)) + h_5(t_5'^{-}(1)) = h_3(t_3'^{-}(1)) + h_5(t_5^{+}(1))$,

...

- $h_{2n-1}(t_{2n-1}'^{+}(1)) = h_{2n-1}(t_{2n-1}'^{-}(1)) + h_{2n+1}(1)$,

ce qui permet de conclure (en sommant toutes ces égalités et en utilisant la régularité de M) que $h_1(1) = h_{2n+1}(1)$, donc $h_1 = h_{2n+1}$.
Ceci prouve que la (CNS) est vérifiée et donc que tout monoïde abélien régulier se plonge dans le groupe abélien qu'il engendre ... sans utiliser la construction explicite de ce dernier à partir du premier!

Bien entendu, on pourrait multiplier de tels exemples "concrets" d'application du critère (CNS) du §1 : nous laissons ce soin au lecteur, en souhaitant que cet exemple particulier l'ait convaincu de l'<u>effectivité</u> du critère. Plus systématiquement, la (CNS) du §1 permet de définir des classes d'homomorphismes entre théories induisant des foncteurs à plongements.
Par exemple, disons qu'une théorie de Lawvere $/\underline{T}/$ est <u>simple</u> si, et seulement si:

- la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\underline{T}/}$ ayant les $Y(A^n)$, où $n \geq 0$, pour objets est fermée par sommes fibrées (finies).

Désignons, alors, par $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces sommes fibrées particulières de $\mathrm{Ens}^{/\underline{T}/}$: on vérifie facilement que $\mathrm{Val}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ens}^{/\underline{T}/}$.
Dans ces conditions, si $/H/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme de théories, la (CNS) du §1 indique immédiatement que $\mathrm{Ens}^{/H/}$ <u>est à plongements si, et seulement si, il est à plongements libres, ou encore si, et seulement si,</u> H <u>est fidèle</u>.
Ainsi, on retrouve les résultats du §1 et du §3,3.2 du Chap. IV , puisque $/\underline{T}_{Ens}/$ et $/\underline{T}_{Ens*}/$ sont évidemment simples. De même, si K est un corps commutatif, la théorie $/\underline{T}_{K\text{-}Vect}/$ des K-espaces vectoriels est simple, par conséquent on peut affirmer que toute théorie $/\underline{T}'/$ qui contient $/\underline{T}_{K\text{-}Vect}/$ donne lieu à un foncteur d'oubli vers K-Vect qui est à plongements.

3. Algèbres régulières.

Supposons que $/H/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme de théories de Lawvere. Nous dirons qu'une algèbre de $/\underline{T}/$ est $/H/$-régulière si, et seulement si, elle se plonge dans l'algèbre de $/\underline{T}'/$ qu'elle engendre. Nous notons alors $Reg/H/$ la sous-catégorie pleine de $Ens^{/\underline{T}/}$ dont les objets sont ces algèbres régulières. Dans ces conditions, nous avons:

Proposition. La catégorie $Reg/H/$ est localement finiment présentable (ou encore, finiment projectivement esquissable).

Preuve. Si $Z : \underline{z}_n \longrightarrow \underline{T}$ est un zigzag et (*) est un diagramme commutatif de $\underline{T}'$ tels que dans l'énoncé de la condition (CNS) du §1 (dont nous reprenons les notations) nous notons $C_Z = (c_Z : L_Z \longrightarrow \bar{L}_Z)$ le cône inductif (indexé par la catégorie $\underline{1}$) tel que:

- $Y(A) \overset{s_1}{\underset{s_{2n+1}}{\rightrightarrows}} L_Z \xrightarrow{c_Z} \bar{L}_Z$ est un conoyau dans $Ens^{/\underline{T}/}$.

Si $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble de ces cônes C_Z , on vérifie facilement que $Reg/H/ = Val(\mathcal{C})$. D'où la proposition. Fin de la preuve.

On remarquera que la proposition précédente n'affirme pas que $Reg/H/$ est une catégorie d'algèbres d'une théorie de Lawvere (ce qui est faux en général).

Par exemple, si $/H/ : /\underline{T}_{Monab}/ \longrightarrow /\underline{T}_{Ab}/$ est l'homomorphisme de la théorie des monoïdes abéliens vers celle des groupes abéliens, il est immédiat de constater que $Reg/H/$ est la catégorie des monoïdes abéliens ... réguliers.

De même, si $/H/ : /\underline{T}_{Semgrp}/ \longrightarrow /\underline{T}_{Grp}/$ est l'homomorphisme canonique de la théorie des semi-groupes vers celle des groupes, il est facile de vérifier que $Reg/H/$ est la catégorie des semi-groupes vérifiant les conditions de Lambek (ou, de manière équivalente, de Malcev), qui ne sont d'ailleurs que des traductions concrètes (i. e. non catégoriques) des conditions de validation des cônes C_Z (voir (A.T.S.G.)).

Bien entendu, si $/H/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme de théories, établir que $Ens^{/H/}$ est à plongements signifie exactement qu'on établit que $Reg/H/ = Ens^{/\underline{T}/}$!

4. Homomorphismes engendrés.

Notons $\mathcal{T}$ la catégorie dont les objets sont les théories de Lawvere et dont les flèches sont les homomorphismes de théories. Notons $C(\mathcal{T})$ la catégorie dont les objets sont les homomorphismes de théories et dont les flèches sont les carrés commutatifs de tels homomorphismes. Notons, enfin, $C(\mathcal{T})_{Div}$ (resp. $C(\mathcal{T})_{Rét}$; $C(\mathcal{T})_{CS}$) la sous-catégorie pleine de $C(\mathcal{T})$ dont les objets sont les homomorphismes divisibles (voir Chap. II) (resp. les homomorphismes rétractables (voir Chap. II); les homomorphismes vérifiant la condition (CS)). On peut alors montrer que:

- $C(\mathcal{T})$ est projectivement esquissable,
- $C(\mathcal{T})_{Div}$ est projectivement esquissable,
- $C(\mathcal{T})_{Rét}$ est esquissable (à l'aide d'une esquisse projective <u>et</u> inductive),
- $C(\mathcal{T})_{CS}$ est esquissable .

On en déduit (à l'aide des théorèmes généraux d'existence de structures libres entre catégories de réalisations d'esquisses projectives, et d'existence de diagrammes localement libres, entre catégories de réalisations d'esquisses projectives <u>et</u> inductives - voir (C.M.C.E.)) que:

- tout homomorphisme de théories engendre un homomorphisme divisible (voir le Chap. II, §4, 4.5),
- tout homomorphisme de théories engendre un diagramme localement libre d'homomorphismes rétractables,
- tout homomorphisme de théories engendre un diagramme localement libre d'homomorphismes vérifiant la condition (CS).

BIBLIOGRAPHIE.

(A.L.C.O.) N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Chap. 1 et 2, Livre XXVII, Actual. Sci. et Ind. 1290, Hermann (1961).

(A.P.A.T) J. R. Isbell, M. I. Klun, S. H. Schanuel, Affine Parts of an Algebraïc Theory I, Journ. of Alg., 44 (1977).

(A.T.S.G.) A. H. Clifford, J. M. Preston, The Algebraïc Theory of Semigroups II, Math. Survey 7 , Pub. A. M. S. (1967).

(C.M.C.E.) C. Lair, Catégories Modelables et Catégories Esquissables, Diagrammes 6 , (1981).

(C.S.D.P.) C. Lair, Conditions Syntaxiques de Plongement I et II, Diagrammes 2 et 3 , (1979 et 1980).

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et Types de Structures Algébriques, Bul. Instit. Polit. Iaşi , 14 (18) ,(1968).

(L.P.L.G.) F. Ulmer, Locally α-Presentable and Locally α-Generated Categories, Lect. Notes in Math. 195, Springer, (1971).

(P.B.W.T.) L. Solomon, On the Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem, Journ. of Comb. Th. , 4, (1968).

(S.A.A.T.) F. W. Lawvere, Some Algebraïc Problems in the Context of Functorial Semantics of Algebraïc Theories, Lect. Notes in Math. 61, Springer, (1968).

SOMMAIRE.