DIAGRAMMES

IRÈNE TURGAT

D'où viennent les esquives ?

Diagrammes, tome 7 (1982), exp. nº 7, p. T1-T7
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1982__7__A7_0>

Diagrammes, Vol. 7 , 1982.

D'OU VIENNENT LES ESQUIVES ?

Irène Turgat

1. J'ai introduit la notion d'Esquive avec le papier:

(+) Introduction à la Synthèse Analytique.
CXXVII. Esquives de taille.

(à paraître dans les Procédés Flous des Journées S.G.D.G., Francbourg-Strasfort, 29-31 Février 82).

J'ai aussi utilisé ce papier dans différents Séminaires durant la même période à Pékyo, Tokin, Mostock, Vladivoscou, Newgo, Chicayork, Coperlin, Benhague, Padrid, Maris, Alnis, Tuger, Bruslo, Oxelles, Rio l'Aumone et Saint-Ouen de Janeiro. Après plusieurs intéressantes discussions avec espécialement G. Nial, A. Dulé, V. Néré, E. Mérite, E. Minent, G. Néral, A. Kadémie, K. Poral, C. Extra et Q. Béni, J'ai compris comment on pouvait progressivement utiliser ces Procédés. Aussi, pour prendre la pose avant de nouveaux développements, Je voudrais expliquer le sujet du point de Mon moins de vue.

2. De (+) Je rappelle qu'une esquive consiste en:

(1) Une catégorie $\underline{H}$ (des héritages et donations)

(2) Une catégorie $\underline{O}$ (des origines et descendances)

(3) Un graphe multiplicatif $\underline{P}$ (des positions et pas)

(4) Un foncteur $L: \underline{O} \longrightarrow \underline{P}$ (dit de louvoiement) injectif et bijectif sur les objets (les éléments de $\underline{P} \setminus L(\underline{O})$

sont appelés pas de lois)

(5) Un foncteur $A: \underline{O} \longrightarrow Ens^{\underline{H}}$ (dit d'apparence).

Si $(\underline{H}\ \underline{O}\ \underline{P}\ , L\ A) = E$ est une esquive, un E-cart est une donnée (H,T) où H est objet de $\underline{H}$, $T: \underline{P} \longrightarrow Ens$ et

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{O} \arrow[dl, "L"'] \arrow[dr, "A"] & \\
\underline{P} \arrow[dr, "T"'] & = & Ens^{\underline{H}} \arrow[dl, "\text{évaluation en } H"] \\
 & Ens &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, les E-carts (H,T) sont caractérisés par la donnée pour tout pas de loi $p: L(O) = P \longrightarrow L(O') = P'$ d'une action sur les étapes i. e. les éléments de $A(O)(H) = T\ L\ (O)$.

Dans le travail autour de Ma conception, Mon saut décisif fut de penser que les pas de lois, via le louvoiement, permettaient un passage d'une étape à une autre, pourvu qu'on ait initialement doté les origines d'une apparence.

Une ambiguïté dans une esquive E est une origine dont l'apparence n'est pas représentable i. e. n'est pas un héritage. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous sommes exactement dans le cas des structures algébriques sur $\underline{H}$ (i. e. des algèbres d'une presque-monade sur $\underline{H}$, concept essentiel dont Je causerai au §4). Mais si nous admettons l'existence d'ambiguïtés dans l'esquive, nous avons la possibilité d'esquiver pas à pas toutes les théories du premier ordre sur $\underline{H}$, et plus: en fait les esquives sur $\underline{H}$ décrivent les mêmes choses que les $\underline{H}$-esquisses possiblement (voir A. Joyal, Une Théorie Combinatoire des Séries Formelles, Adv. In Math., Vol. 42-1, 1981) grosses $\underline{H} \longrightarrow //\underline{H}'//$.
Grosso modo dans l'esquisse $//\underline{H}'//$ associée à l'esquive E

les cônes projectifs décrivent des conditions et les cônes inductifs aussi. Ainsi ESQUIVES et esquisses sont resp. l'apparence linguistique et l'approche géométrique précise de la même "théorie des modèles".

D'un plus philosophique point de vue une esquive est une réalisation (par étapes) du dialogue entre les origines espérées et les héritages réels (cf. l'énigme du Sphynx chez Lacan). Et à cause de ça Je sens qu'un lot de phénomènes dans la nature consistant en antagonismes peuvent être directement esquivés (ceci sera détaillé dans "Introduction à la Synthèse Analytique, I, II, ... , CXXVII, ... , CCLIII " avec l'aide d'une généralisation du calcul des sommes à la place du calcul des produits).

D'un côté, par la théorie des esquisses nous avons un outil précis et de l'autre côté il est difficile de trouver une situation qu'on ne peut esquiver par un procédé très général: au lecteur le soin est donné pour dresser des exemples une liste. Partant avec une esquive E et des foncteurs $\underline{\overline{O}} \longrightarrow \underline{O}$, $\underline{P} \longrightarrow \underline{\overline{P}}$, $\underline{H} \longrightarrow \underline{\overline{H}}$, nous tombons sur une nouvelle esquive $(\underline{\overline{H}}\ \underline{\overline{O}}\ \underline{\overline{P}}\ , \overline{L}\ \overline{A}) = \overline{E}$ dite raffinement de E (où $\overline{L}$ et $\overline{A}$ sont calculables algorithmiquement par un processus effectif). De cette manière nous avons comme exemples des algèbres variées.

D'autres exemples sont nombreux.

En fait les E-carts sont les pico-algèbres d'une presque-monade sur $Ens^{\underline{H}}$ et l'étude des esquives peut se couper en deux:

(1) La théorie des presque-monade

(2) La théorie des esquives de taille.

3. Peut-être les choses nouvelles dans Ma Théorie des Esquives sont leur coloration linguistique (origines, héritages, positions, étapes, pas, apparences, louvoiement) et l'insistance sur la dualité origines espérées/héritages réels et ainsi une "nonméthodologique approche" des théories comme dialectes. Mais en fait ceci est la somme de plusieurs influences que Je veux ex-

primer maintenant.

3.1. Tout d'abord les maintenant classiques travaux de Euclide, Pythagore, Descartes, Newton, Leibnitz, Riemann, Lebesgue, Cauchy, Hilbert, Fermat, Peano, Lagrange et Dirichlet. La qualité de leurs papiers m'a été extrèmement utile. Je Me dois aussi de citer Mon professeur P. Durand qui m'a révélé le calcul des sommes et produits dans la catégorie des entiers.

3.2. Une deuxième vague d'influences, essentielles pour Moi, démarre en lisant les "Comments on Part IV-1 , pp. 329-340 " de A. Ehresmann (in "Charles Ehresmann, Oeuvres Complètes et Commentées, Suppl. 1 au Vol. XXII (1981) des Cah. de Top. et Géom. Diff., Partie IV-1).
La description des structures par esquisses apparaît dans ces commentaires comme une technique très analytique, parmi beaucoup d'autres plus synthético-analytiques:
théories de Lawvere, de Linton, types de Bénabou, "esquisses avec cylindres" de Freyd et Kelly, pré-théories de Isbell, théories relatives à un corpus de Bénabou, ébauches et machines de Guitart, 2-théories de Gray et Kelly ...
Les constructions d'esquisses, l'étude systématique des propriétés des catégories de structures apparaissent bien dans ces commentaires comme étant aléatoires et seulement analytiques (au contraire d'ici avec la dualité que J'explicite au §2 héritages réels/origines espérées qui donne tout l'intérêt à l'apparence linguistique, i. e. à la méthode synthético-analytique, dans l'étude des structures).
A la lecture de ces "Comments ..." M'est donc révélé l'intéreêt fondamental des esquives pour causer des structures.
Je suis confirmé autour de Ma conception dans le travail par l'étude détaillée des papiers de R. Guitart (Introduction à l'Analyse Algébrique: II. Algèbres Figuratives et esquisses, à paraître dans les Proceedings des Journées ATALA AFCET - Arbres en Linguistique: un modèle informatique - 26-27 Novembre 1981, Paris) A. Burroni ("Algèbres Graphiques, sur un Concept de Di-

mension dans les Langages Formels" in Cah. de Top. et Géom. Diff. XXII-3, Amiens 1981) G. M. Kelly et E. Dubuc (A presentation of Topoï as algebraic relative to categories or graphs - preprint) et G. M. Kelly (A Note on the Generalized Reflexion of Guitart and Lair - preprint). Effectivement, en lieu et place d'un travail par trop analytique (i. e. systématique) formulé en termes d'esquisses, on peut bien mieux aborder les problèmes en termes d'Esquives.

4. Ici J'ai expliqué Mon expérience des esquives pour confirmer par un exemple l'opinion qu'elles sont le fruit de beaucoup d'influences. Mais c'est aussi un fait qu'il est facile de retourner l'Histoire par une transformation de Mon formalisme.

4.1. Ainsi, reprenant Mon point de vue conceptuel, L. Coppey utilise (in Théories Algébriques et Extension de Préfaisceaux, Cah. de Top. et Géom. Diff. XIII-1, Paris 1972) des sur-graphes multiplicatifs $\underline{K}$ de $\underline{H}$ pour <u>tenter</u> de décrire les structures de $\underline{K}$-algèbres sur un objet H de $\underline{H}$: c'est quand le foncteur $\mathrm{Hom}(-,H) : \underline{H}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ admet un prolongement de la forme $\overline{\mathrm{Hom}}(-,H) : \underline{K}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$.

Donc il utilise bien une de Mes esquives, décrite par la machinerie ci-après:

- $\underline{H} = \underline{H}$,
- $\underline{O} = \underline{H}$ et A est Yoneda,
- $\underline{P} = \underline{K}$ et $L : \underline{H} \longrightarrow \underline{K}$ est l'injection canonique,

mais dans ce cas extrèmement particulier, que J'ai dit au §2, quand il n'y a pas d'ambiguïté. Dans ce cas, il vérifie hélas, et de plus analytiquement, que si l'oubli $\underline{K}$-Alg = E-<u>cart</u> $\longrightarrow \underline{H}$ a un adjoint à gauche il est monadique (et $\underline{K}$, qui est un graphe multiplicatif, engendre la catégorie de Kleisli de la monade, par un argument à la Linton). Il omet la remarque essentielle que Je fais ici quand Je caractérise ce cas quand il n'y a pas d'adjoint à gauche en disant qu'on a un <u>contexte presque-monadique</u> .

4.2. Dans l'optique de Ma conception, C. Lair (in Foncteurs d'Omission de Structures Algébriques, Cah. de Top. et Géom. Diff. XII-2, Paris 1971) reprend, mais hélas analytiquement, Mon affirmation: si on a la donnée d'une esquisse $//\underline{S}//$ on a que:

- on a un foncteur d'évaluation ev: $\underline{S} \longrightarrow Ens^{(Ens^{//\underline{S}//})}$,

mais les ev(S) ne sont représentables, en général, que si l'esquisse est purement projective (malgré qu'ils soient toujours limites inductives de représentables).

Ensuite, si par exemple on a la donnée $//\underline{S}'//$ d'une sur-esquisse dotée de la machinerie ci-après:

- tous les cônes distingués de $//\underline{S}'//$ sont à bases dans $\underline{S}$,

- tous les objets de $\underline{S}'$ sont sommets de cônes distingués,

alors:

- si les esquisses $//\underline{S}//$ et $//\underline{S}'//$ sont purement projectives, le foncteur d'oubli entre les catégories de réalisations $Ens^{//\underline{S}'//} \longrightarrow Ens^{//\underline{S}//}$, qui admet un adjoint à gauche (par le théorème du faisceau associé), est monadique (pour la rédaction hélas seulement analytique de ceci voir "Condition Syntaxique de Triplabilité d'un Foncteur Algébrique Esquissé" dans Diagrammes 1, Paris, 1979, rédigé par C. Lair),

- si non, la remarque synthético-analytique <u>essentielle</u> que Je fais (omise par C. Lair) est qu'on est dans Mon contexte presque-monadique.

J'esquive donc bien mieux la situation par la machinerie suivante:

- $\underline{H} = Ens^{//\underline{S}//}$,

- $\underline{O} = \underline{S}$,

- A: $\underline{O} = \underline{S} \xrightarrow{\text{ev}} Ens^{//\underline{S}//}$,

- $\underline{P} = \underline{S}'$,

- $L : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$.

4.3 Les problèmes de taille que J'ai posés en (2) du §2 sont repris dans les papiers:

"Locally presentable and locally generated categories, Springer Lect. Notes in Math. 195 (1971)" de Ulmer (et Gabriel),

"Foncteurs d'Omission de Structures Algébriques" de Lair, cité avant,

"Catégories Modelables et Catégories Esquissables, Diagrammes 6, Paris 1981" du même rédacteur,

mais ils ne sont rédigés que sous une forme purement analytique. Dans Ma conception synthético-analytique, J'avais déjà solutionné tout ceci en termes d'esquives sous la meilleure forme des pico-algèbres décrites précisément au §2.

Ainsi, par delà les possibilités de retournement de la génèse des choses, est bien prouvée vraie a conception qu'il y a équivalence entre la construction d'esquives et l'utilisation des apparences (au sens du (5) du §2).

<u>pour copie conforme</u>:

C. Lair .

<u>Postface</u>.

Ce texte a une apparence évidemment surprenante. Nous pensons, cependant, qu'il serait dommage que le lecteur s'en tienne là et n'analyse pas sérieusement les <u>raisons</u> de sa surprise.

L. Coppey

C. Lair
