ALBERT BURRONI

Algèbres graphiques (suites : Les bidules)

Diagrammes, tome 7 (1982), exp. nº 1, p. B1-B8
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1982__7__A1_0>

Diagrammes, Vol. 7 , 1982.

ALGEBRES GRAPHIQUES

(suite: les bidules.)

par

Albert Burroni

à Yves Cantelaube

Cet article est la première partie d'un travail qui étudie une définition interne des algèbres graphiques et - au delà - des algèbres en général.

1. Algèbres graphiques internes.

La catégorie $\underline{\mathrm{Grph}} = \mathrm{Ens}^{(\,\cdot \rightrightarrows \cdot\,)}$ est cartésienne fermée; on peut donc y définir des objets algébriques de façon interne.

On appellera <u>algèbre graphique interne</u> la donnée d'un graphe G muni d'un système (Ω,E) de lois et d'équations dans le sens suivant: une <u>loi interne</u> sur G est un homomorphisme de graphes de la forme $\alpha : G^D \longrightarrow G^{D'}$, où D, D' sont deux graphes et G^D , $G^{D'}$ des exponentielles internes i. e. telles que

$$\frac{H \longrightarrow G^{D}}{H \times D \longrightarrow G}$$

pour tous graphes H et G . A partir d'une famille Ω de lois internes sur G , on peut en définir de nouvelles: les lois dérivées. On appellera ainsi toutes les lois de Ω et toutes celles qu'on peut définir inductivement à partir des deux règles suivantes:

(i) Pour tout homomorphisme de graphes $f: D' \longrightarrow D$, la projection $G^{f}: G^{D} \longrightarrow G^{D'}$ est une loi dérivée;

(ii) La composée $\mu\lambda : G^{D} \longrightarrow G^{D''}$ de deux lois dérivées $\lambda: G^{D} \longrightarrow G^{D'}$ et $\mu: G^{D'} \longrightarrow G^{D''}$ est une loi dérivée.

Une équation interne sur Ω est une égalité de la forme $\lambda = \lambda'$, où $\lambda, \lambda': G^{D} \longrightarrow G^{D'}$ sont deux lois dérivées. E est alors une famille d'équations internes sur Ω .

Cette définition est une imitation formelle de ma définition des algèbres graphiques dans (1) et (2). Par opposition, on les appellera ici algèbres graphiques externes. La seule différence dans les deux définitions est que dans le dernier cas les lois et les équations sont externes, i. e. ce sont des applications de la forme $\alpha: G(D) \longrightarrow G(D')$, où G(D) est l'ensemble des homomorphismes de graphes $D \longrightarrow G$ (donc $G(D) = G^{D}($  $)$, où  = 1 est le graphe final). Comme je le montrerai dans la suite de cet article, bien que les règles (i) et (ii) soient en apparence insuffisantes pour décrire toutes les lois qui mériteraient d'être appelées "lois dérivées" et bien que dans le cas interne on pourrait imaginer une définition encore plus "interne" (par exemple Ω et E pourraient être des données graphiques et pas seulement ensemblistes), la définition ci-dessus suffit pour décrire tout ce qui mérite d'être appelé "algèbres graphiques".

<u>Proposition</u>. <u>Les algèbres graphiques internes peuvent toujours être définies comme algèbres graphiques externes</u>.

<u>Preuve</u>. Tout simplement parce qu'une loi graphique interne $\alpha : G^D \longrightarrow G^{D'}$, qui est un homomorphisme de graphes, est définie par deux lois externes:

$$\begin{tikzcd} G(D \times (. \longrightarrow .)) \arrow[r, "Fl(\alpha)"'] \arrow[d, shift right, "a"'] \arrow[d, shift left, "b"] & G(D' \times (. \longrightarrow .)) \arrow[d, shift right, "a"'] \arrow[d, shift left, "b"] \\ G(D \times (\,.\,)) \arrow[r, "Ob(\alpha)"'] & G(D' \times (.)) \end{tikzcd}$$

et les équations externes:

$$Ob(\alpha)\ a = a\ Fl(\alpha)$$

$$Ob(\alpha)\ b = b\ Fl(\alpha)$$

puisque $G(D \times (\,.\,)) = G^D(\,.\,) = Ob(G^D)$, et $G(D \times (\,. \longrightarrow .\,)) = G^D(\,. \longrightarrow .\,) = Fl(G^D)$ et où les a , b sont des projections externes.
Les équations internes se ramènent alors évidemment à des équations externes. //

La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie en général. Par exemple, le lecteur peut essayer de définir de façon interne une loi de la forme

$$\alpha : G(. \longrightarrow .) \longrightarrow G(\,.\,) \ .$$

Par la suite, je donnerai une caractérisation du cas interne.

2. <u>Bigraphes</u>.

Soit $\mathcal{E} = \underline{Ens}^{C^{op}}$ une catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie C . On appelle <u>bidule</u> de $\mathcal{E}$ un couple $\theta = (\theta_g, \theta_d)$ de foncteurs adjoints: $\theta_g \dashv \theta_d : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

On adoptera les notations suivantes:

$$A \times \theta = \theta_g(A) \quad , \quad B^{\theta} = \theta_d(B)$$

de sorte qu'on écrit l'équivalence d'adjonction sous la forme:

$$\frac{A \times \theta \longrightarrow B}{A \longrightarrow B^{\theta}}$$

et on appelle B^{θ} une puissance généralisée. Ces notations seront prolongées aux morphismes. Les bidules forment les objets d'une catégorie $\underline{\mathrm{Bid}}(\mathcal{E})$, les morphismes entre bidules étant définis par des transformations naturelles.

Proposition. On a $\underline{\mathrm{Bid}}(\mathcal{E}) \simeq \underline{\mathrm{Ens}}^{C^{op} \times C}$. Autrement dit, les bidules de $\mathcal{E}$ seront identifiés à des "profoncteurs" $\theta : C \longrightarrow C$.

Preuve. θ est déterminé à isomorphisme près par θ_g, lequel est un foncteur qui commute aux $\varinjlim$ et donc déterminé par sa restriction $\theta_g|_C : C \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}^{C^{op}}$, où C est identifié à son image dans $\mathrm{Ens}^{C^{op}}$ par le plongement de Yoneda. //

En particulier, on a:

$$\underline{\mathrm{Bid}}(\underline{\mathrm{Ens}}) \simeq \underline{\mathrm{Ens}}^{(\cdot \rightrightarrows \cdot)}$$
$$\underline{\mathrm{Bid}}(\underline{\mathrm{Grph}}) \simeq \underline{\mathrm{Grph}}^{(\cdot \rightrightarrows \cdot)} .$$

Donc les puissances généralisées dans $\underline{\mathrm{Ens}}$ coïncident avec les puissances ordinaires. Par contre les bidules de $\underline{\mathrm{Grph}}$ sont, en fait, des bigraphes (i. e. des cographes dans les graphes ou encore des graphes doubles puisque $(\cdot \rightrightarrows \cdot)^{op} \simeq (\cdot \rightrightarrows \cdot)$).

Les bigraphes décrivent une quantité de constructions remarquables sur les graphes. En voici quelques unes:

1) Pour tout graphe D on définit le bigraphe

$$\tilde{D} : D \times (\,\cdot\,) \rightrightarrows D \times (\,\cdot \longrightarrow \cdot\,)$$

induit par le bigraphe "unité" $(\,\cdot\,) \rightrightarrows (\,\cdot \longrightarrow \cdot\,)$.
Alors, on retrouve les puissances internes: $G^{\tilde{D}} \simeq G^{D}$;

2) De même, pour $\overline{D}$: $D \overset{Id_D}{\underset{Id_D}{\rightrightarrows}} D$, on retrouve les puissances externes : $G^{\overline{D}} \simeq G(D)$, en identifiant tout ensemble E au graphe

$$E \overset{Id_E}{\underset{Id_E}{\rightrightarrows}} E$$

appelé <u>graphe discret</u> ;

3) Soit $(\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \;\; \ldots \;\; \cdot \longrightarrow \cdot)$ le graphe formé de n flèches consécutives pour n entier (et réduit à $(\cdot)$ si $n = 0$), alors on a le bigraphe :

$$1_n : (\cdot) \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} (\cdot \to \cdot \to \cdot \;\; \ldots \;\; \cdot \to \cdot)$$

où l'unique objet de $(\cdot)$ est envoyé sur le premier objet (resp. le dernier objet) de $(\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \;\; \ldots \;\; \cdot \longrightarrow \cdot)$ par a (resp. b) ;

alors, on a : $G^{1_n} \simeq \overset{n}{\boxtimes} G$ est le graphe des chemins de longueur n dans G , puisque

$$Ob(\overset{n}{\boxtimes} G) = Ob(G)$$
$$Fl(\overset{n}{\boxtimes} G) = G (\cdot \to \cdot \to \cdot \;\; \ldots \;\; \cdot \to \cdot) ;$$

4) On peut prolonger la définition précédente pour tout $n \in \underline{Z}$ en inversant a et b dans le cas $n < 0$:

$$1_{-n} : (\cdot) \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} (\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \;\; \ldots \;\; \cdot \longrightarrow \cdot)$$

(si $n > 0$) ;

en particulier : $G^{1_{-1}} \simeq G^{op}$;

5) Pour S : $(\cdot) \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} (\cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot)$, où a et b envoient respectivement l'unique objet de $(\cdot)$ sur le premier et le troisième objet de $(\cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot)$, on a

$$G^S = \underline{Span}\,(G)$$

6) Pour $\varepsilon : (\ ) \rightrightarrows (\cdot \longrightarrow \cdot)$, on a

$$G^{\varepsilon} = G/Ob(G)$$

obtenu en identifiant tous les objets de G;

7) Pour $f: (\ ) \rightrightarrows (\cdot)$, G^f est le graphe tel que $Ob(G^f) = 1$, $Fl(G^f) = Ob(G)$;

...

Pour chacune de ces constructions, on a évidemment une construction duale: $G \longmapsto G \times \theta$ (par exemple, le dual de l'exemple 5) donne la "subdivision barycentrique" d'un graphe). Ces constructions sont d'ailleurs faciles à "visualiser":

- pour tout bigraphe $\theta : \theta_0 \rightrightarrows \theta_1$, on a:
  + G^{θ} est le graphe tel que $Ob(G^{\theta}) = G(\theta_0)$ et $Fl(G^{\theta}) = G(\theta_1)$,
  + $G \times \theta$ est une somme amalgamée de copies de θ_0 et θ_1 , indexée par un diagramme dont le type est donné par la subdivision barycentrique de G .

3. <u>Algèbres graphiques internes généralisées.</u>

En utilisant les puissances généralisées, on peut étendre maintenant la définition du §1. Une <u>algèbre graphique interne généralisée</u> est définie comme pour les algèbres graphiques internes mais les lois y sont de la forme $\alpha : G^{\theta} \longrightarrow G^{\theta'}$, où θ , θ' sont des bigraphes et les projections sont induites par des morphismes $\theta' \longrightarrow \theta$ de bigraphes.

<u>Théorème</u>. <u>Les algèbres graphiques externes peuvent être définies comme algèbres graphiques internes généralisées et réciproquement.</u>

<u>Preuve</u>. La première affirmation résulte de ce qui a été observé dans l'exemple 2) du §2.

La réciproque s'obtient en ramenant toute loi interne généralisée $\alpha : G^{\theta} \longrightarrow G^{\theta'}$ a deux lois externes, comme pour les algèbres internes:

$$\begin{tikzcd} G(\theta_1) \arrow[r, "Fl(\alpha)"'] \arrow[d, shift right, "a"'] \arrow[d, shift left, "b"] & G(\theta'_1) \arrow[d, shift right, "a"'] \arrow[d, shift left, "b"] \\ G(\theta_0) \arrow[r, "Ob(\alpha)"'] & G(\theta'_0) \end{tikzcd}$$

et deux équations externes, où $\theta : \theta_0 \rightrightarrows \theta_1$ et $\theta' : \theta'_0 \rightrightarrows \theta'_1$ sont deux bigraphes. //

Terminons par quelques remarques:

1) J'utilise les expressions "interne" et "externe" d'une manière informelle en leur laissant le caractère ouvert qu'elles ont dans la littérature. Ici, cela dépend des constructions qu'on considère comme internes à la catégorie <u>Grph</u> , en admettant que cette catégorie est seulement un topos ou bien qu'elle est munie de données plus riches, comme par exemple l'opérateur $G \longmapsto \overset{2}{\boxtimes} G$. Ainsi, la donnée d'une structure de catégorie sur un objet G de <u>Grph</u> peut être considérée comme interne en la définissant comme une "monade" avec les "lois":

$$\overset{0}{\boxtimes} G \xrightarrow[\mathrm{Id}]{} G \xleftarrow{\ o\ } \overset{2}{\boxtimes} G$$

Si on considère <u>Grph</u> seulement comme un topos, il y a peut-être une manière interne de définir les catégories, mais a priori les cas externes et internes généralisés doivent être considérés comme "externes" car il nous faut sortir de l'univers de référence <u>Grph</u> : l'une en utilisant <u>Ens</u> et l'autre en utilisant <u>Bigraph</u> , la catégorie des bigraphes.

2) Evidemment, tout ceci se généralise en remplaçant la catégorie <u>Grph</u> par une catégorie $\mathcal{G}$ qui peut être quelconque. On obtient aussi facilement une notion d'<u>algèbre</u> $\mathcal{G}$<u>-ique</u> . En particulier, on devrait pouvoir appliquer tout cela à $\mathcal{G}$ = <u>Simpl</u> , la catégorie des ensembles simpliciaux.

3) La notion de bidule se généralise évidemment très bien en celle de profoncteur $C \longrightarrow C'$ et conduit à unifier de nombreuses constructions.

(à suivre ...)

<u>Bibliographie</u>.

(1) A. Burroni, Algèbres Graphiques, Cah. de Top. et Géom. Diff., XXII-3 (1981).

(2) A. Burroni, Conférence de Cambridge, Juillet 1981, manuscript.