

DIAGRAMMES

FRANÇOIS FOLTZ

Sur la commutation des limites

Diagrammes, tome 5 (1981), exp. n° 1, p. F1-F33

[<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1981__5__A1_0>](http://www.numdam.org/item?id=DIA_1981__5__A1_0)

© Université Paris 7, UER math., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA COMMUTATION DES LIMITES

François Foltz

Introduction.

Certaines catégories de modèles de théories du 1^{er} ordre sont équivalentes à des catégories $\text{Mod}(\underline{S})$ de foncteurs $\underline{S} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ qui commutent aux limites projectives indexées par certaines catégories petites $\underline{P}$ et aux limites inductives indexées par certaines catégories petites $\underline{I}$: il en est ainsi, notamment, des catégories d'algèbres d'une théorie de Lawvere, ou des catégories $\mathcal{A}$ -présentables au sens de Gabriel-Ulmer, ou encore des catégories $\mathcal{C}$ -localisables au sens de Diers.

En général, les catégories telles que $\text{Mod}(\underline{S})$ ne possèdent pas nécessairement toutes les limites projectives et inductives petites : par exemple, la catégorie - localisable - des corps ne possède pas tous les produits. De plus, même si $\text{Mod}(\underline{S})$ possède certaines de ces limites, elles ne s'y calculent pas obligatoirement point par point (i.e. $\text{Mod}(\underline{S}) \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^{\underline{S}}$ n'y commute pas forcément) : par exemple, les limites inductives petites ne se calculent pas toutes point par point dans une catégorie $\mathcal{A}$ -présentable. Cependant, il est suffisant que les $\underline{J}$ - limites inductives commutent dans $\underline{\text{Ens}}$ avec les $\underline{P}$ - limites projectives pour que $\text{Mod}(\underline{S})$ possède les $\underline{J}$ - limites inductives et pour qu'elles

s'y calculent point par point : ainsi, les catégories $\mathcal{O}$ -présentables ont des limites inductives $\mathcal{O}$ -filtrantes qui se calculent point par point. De même, il est suffisant que les $\mathcal{Q}$ -limites projectives commutent dans Ens avec les $\mathcal{I}$ -limites inductives pour qu'elles existent dans $\text{Mod}(\underline{S})$ et s'y calculent point par point : ainsi, les catégories $\mathcal{O}$ -localisables sont à limites projectives connexes et celles-ci s'y calculent point par point. D'ailleurs ce sont justement ces classes de catégories $\mathcal{Q}$ et de catégories $\mathcal{I}$ qui classifient, en un sens certain, les théories du premier ordre considérées : c'est ce sens qu'il faut donner aux travaux de Gabriel-Ulmer et de Diers.

Le but du présent travail, qu'il faut donc comprendre comme une première étape dans la classification des théories du 1^{er} ordre, consiste à caractériser, lorsqu'une catégorie petite $\underline{P}$ est donnée, la classe $\text{COMM}(\underline{P})$ de toutes les petites catégories $\underline{I}$ telles que les $\mathcal{I}$ -limites inductives commutent aux $\underline{P}$ -limites projectives dans Ens. Une telle caractérisation systématique une fois menée permet, a contrario, lorsque la petite catégorie $\underline{I}$ est donnée, de déterminer la classe $\text{COMM}(\underline{I})$ des petites catégories $\underline{P}$ telles que les $\underline{P}$ -limites projectives commutent aux $\mathcal{I}$ -limites inductives dans Ens.

Le § 0 est destiné à fixer quelques notations et quelques définitions techniques qui permettent une lecture plus synthétique de la suite. Au § 1 nous établissons que, pour calculer en toute généralité $\text{COMM}(\underline{P})$, il suffit de savoir le faire d'une part lorsque $\underline{P}$ est connexe et d'autre part lorsque $\underline{P}$ est discrète. Au § 2 nous calculons donc $\text{COMM}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est connexe, et au § 3 nous calculons $\text{COMM}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est discrète. Au § 4 nous fournissons quelques compléments et quelques exemples de calculs explicites de $\text{COMM}(\underline{P})$.

0. Notations et définitions préliminaires.

0.0. Si $\underline{P}$ et $\underline{I}$ sont deux petites catégories et si $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ est un foncteur, nous notons :

$$c_F : \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I \in \underline{I}}} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ P \in \underline{P}}} F(P, I) \longrightarrow \lim_{\substack{\longleftarrow \\ P \in \underline{P}}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I \in \underline{I}}} F(P, I)$$

l'application canonique de comparaison.

Lorsque $\underline{P}$ est donnée, on note :

- $\text{Inj } \underline{P}$ la classe des petites catégories $\underline{I}$ telles que pour tout foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$, l'application de comparaison c_F est injective,

- $\text{Surj } \underline{P}$ la classe des petites catégories $\underline{I}$ telles que, pour tout foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$, l'application de comparaison c_F est surjective.

Alors, $\text{COMM}(\underline{P}) = \text{Inj } \underline{P} \cap \text{Surj } \underline{P}$. On utilise des notations analogues $\text{Inj } \underline{I}$, $\text{Surj } \underline{I}$ et $\text{COMM}(\underline{I})$ pour le cas dual (où c'est $\underline{I}$ qui est donnée et c'est la classe des $\underline{P}$ que l'on veut déterminer) .

0.1. Soit $\underline{P}$ une catégorie petite. On désigne par $\underline{P} / -$ le foncteur de $\underline{P}$ dans $\underline{\text{Ens}}$ défini par :

$$(\underline{P} / -)(P) = \underline{P} / P = \coprod_{P' \in \text{ob } \underline{P}} \text{Hom}_{\underline{P}}(P', P).$$

0.2. Soit $\underline{P}$ une petite catégorie. On dit que $\underline{P}$ est dégénérée si, et seulement si, il existe un cône projectif $(P_o \xrightarrow{p_P} P)_{P \in \underline{P}}$ de base $\text{Id}_{\underline{P}}: \underline{P} \longrightarrow \underline{P}$ dans $\underline{P}$, i.e. $\lim_{\substack{\longleftarrow \\ P \in \text{ob } \underline{P}}} \underline{P} / P \neq \emptyset$.

0.3. Soit $\underline{P}$ une catégorie (petite) . On note $\S \underline{P}$ sa catégorie subdivision :

- ses objets sont, d'une part les objets P de $\underline{P}$ et d'autre part les flèches $p: P \longrightarrow P'$ de $\underline{P}$,

- ses flèches sont, d'une part les $(d,p): P \longrightarrow p$ et d'autre part les $(c,p): P' \longrightarrow p$, lorsque $p: P \longrightarrow P'$ est une flèche de $\underline{P}$.

Si $G: \underline{P}_1 \longrightarrow \underline{P}_2$ est un foncteur, on en déduit évidemment un foncteur $\S G: \S \underline{P}_1 \longrightarrow \S \underline{P}_2$.

0.4. Soit $\underline{P}$ une catégorie(petite). On note $\underline{P}^\wedge$ la catégorie telle que:

- ses objets sont d'une part les objets P de $\underline{P}$ et d'autre part deux autres objets 1 et 2 ,

- ses flèches sont d'une part les $(P,1): 1 \longrightarrow P$ et d'autre part les $(P,2): 2 \longrightarrow P$, lorsque P est objet de $\underline{P}$.

Evidemment, $\underline{P}^\wedge = (\text{ob}\underline{P})^\wedge$ et c'est une catégorie subdivision d'une catégorie convenable.

0.5. On note $\underline{V}$ la catégorie représentée par :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ (1,0) & \nwarrow & \nearrow (2,0) \\ & 0 & \end{array}$$

0.6. Pour tout entier naturel n (nul ou non), on note $\underline{Z}_n$ la catégorie représentée par :

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & & 2n & \\ (2,1) & \nearrow & \nwarrow (2,3) & \dots\dots & (2n,2n-1) \nearrow & \nwarrow (2n,2n+1) \\ 1 & & 3 & & 2n-1 & 2n+1 \end{array}$$

0.7. Soit $\underline{C}$ une catégorie (petite) et n un entier naturel (nul ou non). On appelle zigzag (d'ordre n) de $\underline{C}$ tout foncteur $D: \underline{Z}_n \longrightarrow \underline{C}$. On dit alors que $D(1)$ en est l'origine et $D(2n+1)$ l'extrémité.

0.8. Soit $\underline{C}$ une catégorie(petite), C un objet de $\underline{C}$ et $\Delta: \underline{Z}_n \longrightarrow \underline{C} / C$ un zigzag de $\underline{C} / C$. On en déduit un zigzag

$$D: \underline{Z}_n \xrightarrow{\Delta} \underline{C} / C \xrightarrow{\text{canonique}} \underline{C}$$

appelé base de Δ .

Alors, on dira que Δ est un zigzag clos dans $\underline{C}$ de base D et de sommet C (il s'identifie aussi à un cône inductif de $\underline{C}$, de base D et de sommet C).

0.9. Soit $\underline{C}$ une catégorie (petite) et soient $D: \underline{Z}_n \longrightarrow \underline{C}$ et $D': \underline{Z}_{n'} \longrightarrow \underline{C}$ deux zigzags de $\underline{C}$. Si $D(2n+1) = D'(1)$, on en déduit un zigzag juxtaposé :

$$D' \cup D: \underline{Z}_{n+n'} \longrightarrow \underline{C}$$

d'origine l'origine de D et d'extrémité l'extrémité de D' .

0.10. Soit $\underline{C}$ une catégorie (petite) et $\Delta: \underline{Z}_n \longrightarrow \underline{C} / C$ un zigzag clos dans $\underline{C}$ de sommet C et $c: C \longrightarrow C'$ une flèche de $\underline{C}$. On en déduit un zigzag composé de c par Δ :

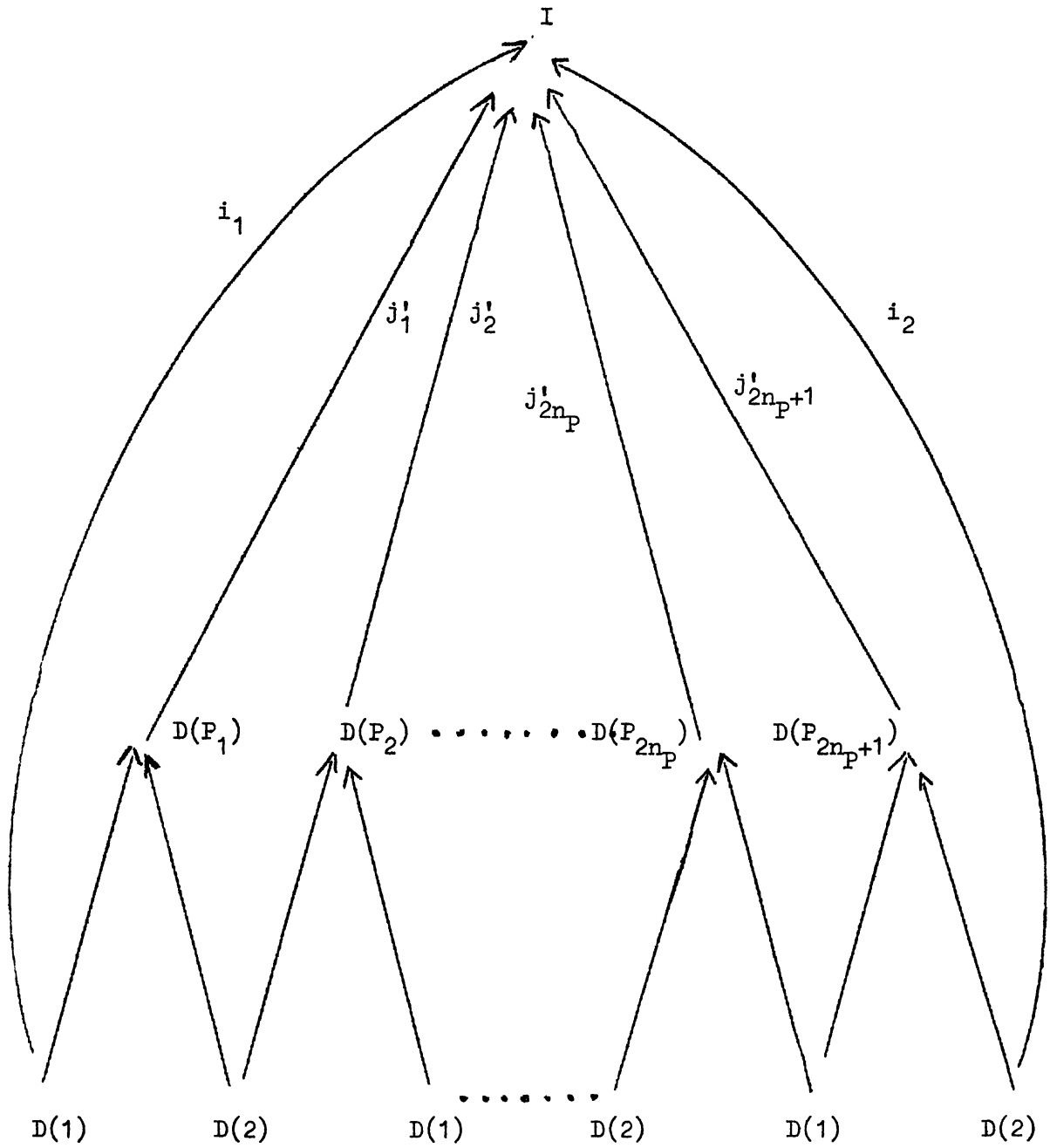
$$c.\Delta: \underline{Z}_n \xrightarrow{\Delta} \underline{C} / C \xrightarrow{\text{composition par } c} \underline{C} / C'$$

0.11. Soit $\underline{P}$ et $\underline{I}$ deux catégories petites. Nous dirons que $\underline{I}$ est $\underline{P}$ -bornée si, et seulement si :

- pour tout foncteur $D: \underline{P}^\wedge \longrightarrow \underline{I}$, il existe un diagramme de $\underline{I}$:

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ i_1 \nearrow & & \nwarrow i_2 \\ D(1) & & D(2) \end{array}$$

tel que , pour tout objet P de $\underline{P}$, il existe un diagramme commutatif de $\underline{I}$, dans lequel les objets $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2n_P+1}$ sont tels qu'il existe toujours au moins une flèche de chacun d'entre eux vers P :

Diagramme 1

0.12. Soient $\underline{P}$ et $\underline{I}$ deux catégories petites. Nous dirons que $\underline{I}$ est $\underline{ZP}$ - bornée si, et seulement si :

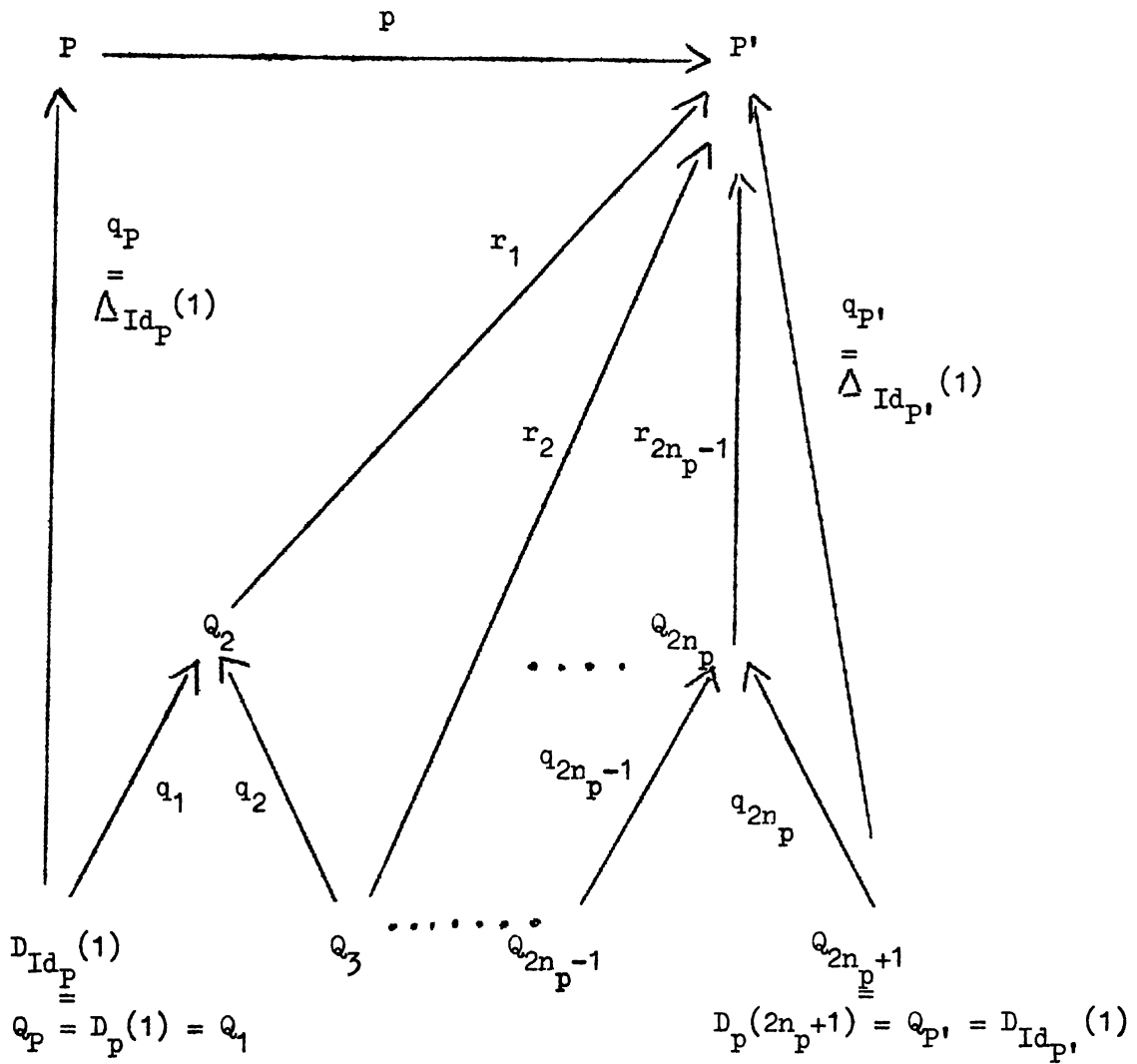
- pour tout foncteur $D: \S \underline{P} \longrightarrow \underline{I}$, il existe une famille $(\Delta_p)_{p \in \text{Fl}\underline{P}}$ de zigzags (d'ordres n_p) clos dans $\underline{P}$ (dont la famille des bases est notée $(D_p)_{p \in \text{Fl}\underline{P}}$) et une famille $(\Delta'_p)_{p \in \text{Fl}\underline{P}}$ de zigzags clos dans $\underline{I}$ (dont la famille des bases est notée $(D'_p)_{p \in \text{Fl}\underline{P}}$) telles que :

- + pour tout objet P de $\underline{P}$, le zigzag Δ_{Id_P} est trivial
- + pour toute flèche $p: P \longrightarrow P'$ de $\underline{P}$, l'origine (resp. l'extrémité) de Δ_p est celle de $p \cdot \Delta_{\text{Id}_P}$ (resp. $\Delta_{\text{Id}_{P'}}$)
- + $\Delta_{p' \cdot p} = \Delta_{p'} \perp \Delta_p$, dès que $p' \cdot p$ est défini dans $\underline{P}$,
- + pour toute flèche p de $\underline{P}$ on a :

$$D'_p: \underline{Z}_{2n_p} \xrightarrow{\sim} \S \underline{Z}_{n_p} \xrightarrow{\S D_p} \S \underline{P} \xrightarrow{D} \underline{I}$$

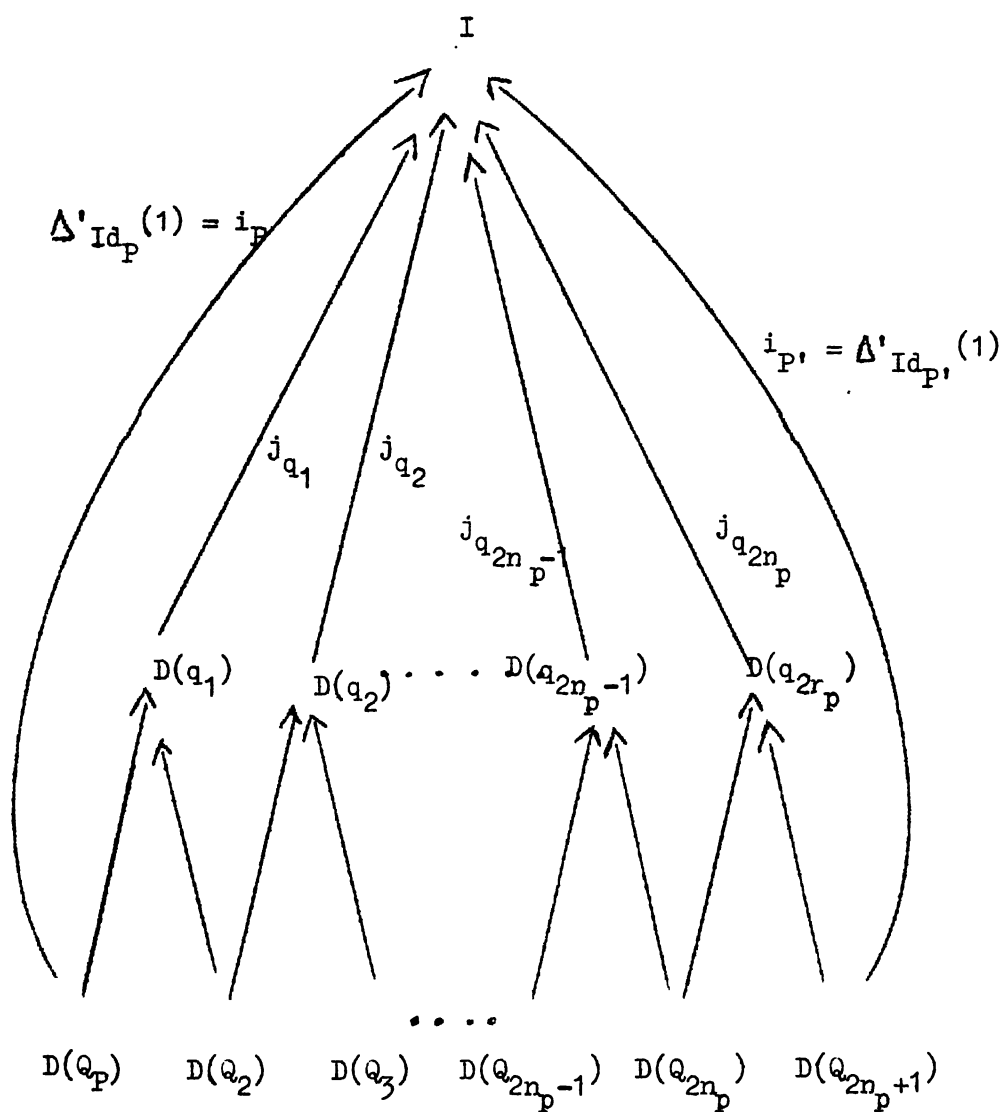
- + pour tout objet P de $\underline{P}$, le zigzag Δ'_{Id_P} est d'ordre 1,
- + Δ'_p et Δ'_p sont juxtaposables (i.e. $\Delta'_p \perp \Delta'_p$ est défini) dès que $p \cdot p$ est défini dans $\underline{P}$.

Evidemment, les diverses conditions précédentes signifient que l'on dispose, pour toute flèche $p: P \longrightarrow P'$ dans $\underline{P}$, du diagramme 2, commutant dans $\underline{P}$, et du diagramme 3, commutant dans $\underline{I}$, ci-après, (voir page suivante).



(où $Q_k = D_P(k)$, $r_k = \Delta_P(k+1)$, pour tout $1 \leq k \leq 2n_p$,
 et $q_{2k'} = D_P(2k'+1 \longrightarrow 2k')$, $q_{2k'-1} = D_P(2k'-1 \longrightarrow 2k')$,
 pour tout $1 \leq k' \leq n_p$).

Diagramme 2



(où l'on a posé $j_{q_k} = \Delta'(q_k)$, pour tout $1 \leq k \leq 2n_p$,
et où l'on a identifié $\S \underline{Z}_{n_p}$ et $\underline{Z}_{2n_p}$ qui sont isomorphes) .

Diagramme 3

0.13. Si $\underline{C}$ et $\underline{I}$ sont deux catégories (petites), on dit que $\underline{I}$ est $\underline{C}$ -filtrante si, et seulement si, à tout foncteur $D: \underline{C} \longrightarrow \underline{I}$ on peut associer un cône inductif $(i_C: D(C) \longrightarrow I)_{C \in \underline{C}}$ de base D dans $\underline{I}$. Dans la suite, on se bornera aux cas où $\underline{C}$ est ou bien discrète ou bien égale à $\underline{V}$.

0.14. Soit $\underline{P}$ et $\underline{I}$ deux catégories petites. On dit que $\underline{I}$ est $\underline{ZP}$ -filtrante si, et seulement si :

- pour tout couple d'objets I et I' de $\underline{I}$ et pour toute famille $(D_P: \underline{Z}_{n_P} \longrightarrow \underline{I})_{P \in \text{ob } \underline{P}}$ de zigzags de $\underline{I}$ d'origine I et d'extrémité I' , il existe un zigzag $D: \underline{Z}_n \longrightarrow \underline{I}$ d'origine I et d'extrémité I' tel que, pour tout objet P de $\underline{P}$, les images respectives de Id_I et $\text{Id}_{I'}$, par les coprojections dans $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ (\bar{X}, \bar{Y}) \in \underline{Z}_{n_P}^{\text{op}} \times \underline{Z}_n}} \text{Hom}_{\underline{I}}(D_P^{\text{op}}(X), D(Y))$ sont égales.

Ceci signifie encore que l'on dispose d'un zigzag $D'_P: \underline{Z}_{m_P} \longrightarrow \underline{Z}_{n_P}^{\text{op}} \times \underline{Z}_n$ et d'un diagramme commutatif de $\underline{I}$:

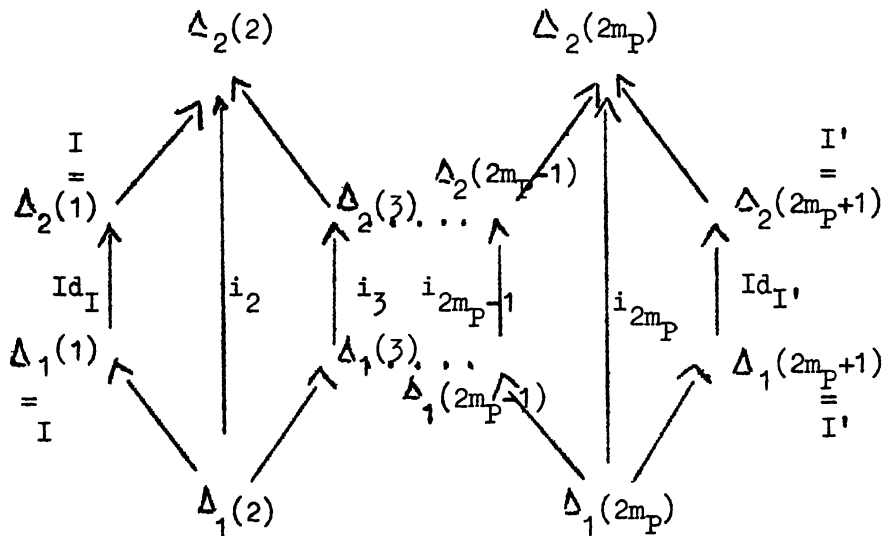


Diagramme 4

$$\text{où } \Delta_1: \underline{Z}_{m_P} \xrightarrow[D'_P]{\quad} \underline{Z}_{n_P}^{\text{op}} \times \underline{Z}_n \xrightarrow[\text{proj}]{\quad} \underline{Z}_{n_P}^{\text{op}} \xrightarrow[D_P]{\quad} \underline{I}^{\text{op}}$$

$$\text{et } \Delta_2: \underline{Z}_{m_P} \xrightarrow[D'_P]{\quad} \underline{Z}_{n_P}^{\text{op}} \times \underline{Z}_n \xrightarrow[\text{proj}]{\quad} \underline{Z}_n \xrightarrow[D]{\quad} \underline{I}$$

1. Résultats préliminaires.

On vérifie facilement que :

Proposition 1. Si $\underline{P}' \longrightarrow \underline{P}$ est un foncteur initial entre catégories petites, alors $\text{COMM}(\underline{P}') \subset \text{COMM}(\underline{P})$.

Signalons qu'en général cette inclusion est stricte, mais qu'une condition suffisante pour que $\text{COMM}(\underline{P}') = \text{COMM}(\underline{P})$ est que $\underline{P}' \longrightarrow \underline{P}$ soit le foncteur injection canonique dans $\underline{P}$ d'une sous-catégorie pleine $\underline{P}'$ de $\underline{P}$, car alors tout foncteur de $\underline{P}' \times \underline{I}$ vers Ens admet au moins un prolongement à $\underline{P} \times \underline{I}$.

Montrons maintenant la

Proposition 2. Soit $\underline{P}$ une catégorie petite. Pour qu'une catégorie petite $\underline{I}$ appartienne à $\text{Surj } \underline{P}$, il est nécessaire qu'elle soit $\underline{P}^{\text{op}}$ - filtrante.

Preuve. Supposons que $D: \underline{P}^{\text{op}} \longrightarrow \underline{I}$ soit un foncteur et considérons le foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \text{Ens}$ égal à $\text{Hom}_{\underline{I}}(D(-), -)$. Pour tout objet P de $\underline{P}$, l'ensemble $\varinjlim_{I \in \underline{I}} \text{Hom}_{\underline{I}}(D(P), I)$ n'a qu'un élément dont un représentant est 1_{DP} . Il en résulte que

$\varinjlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{I \in \underline{I}} \text{Hom}_{\underline{I}}(DP, I)$ n'a aussi qu'un élément, de même que

$\varinjlim_{I \in \underline{I}} \varinjlim_{P \in \underline{P}} \text{Hom}_{\underline{I}}(DP, I)$ puisque c_F est surjective. En consé-

quence, il existe au moins un objet I_0 de $\underline{I}$ et un élément de

$\varprojlim_{P \in \underline{P}} \text{Hom}_{\underline{I}}(\underline{DP}, \underline{I}_0)$ qui représente cet unique élément. C'est exactement un cône inductif $(\underline{DP} \longrightarrow \underline{I}_0)_{P \in \underline{P}^{\text{op}}}$ de base $\underline{G}$ dans $\underline{I}$. //

Prouvons enfin que :

Proposition 3. Si $\underline{P} = \coprod_{C \in \underline{C}} \underline{P}_C$ est une petite catégorie présentée comme somme dans Cat de ses composantes connexes $\underline{P}_C$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{I}$ est une petite catégorie appartenant à $\text{COMM}(\underline{C})$ (en identifiant l'ensemble $\underline{C}$ des composantes connexes de $\underline{P}$ à une catégorie discrète) et à $\text{COMM}(\underline{P}_C)$ pour tout objet C de $\underline{C}$.

(ii) $\underline{I}$ est une petite catégorie appartenant à $\text{COMM}(\underline{P})$.

Preuve. a) Montrons que (i) implique (ii).

Si $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ est un foncteur et si, pour tout objet C de $\underline{C}$, on désigne par $F_C: \underline{P}_C \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ sa restriction, on a :

$$\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varprojlim_{I \in \underline{I}} F(P, I) \simeq \prod_{C \in \underline{C}} \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} \varprojlim_{I \in \underline{I}} F_C(P, I)$$

$$\simeq \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} \prod_{C \in \underline{C}} \varprojlim_{I \in \underline{I}} F_C(P, I)$$

(les $\varprojlim$ commutant dans $\underline{\text{Ens}}$),

$$\simeq \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} \varprojlim_{I \in \underline{I}} \prod_{C \in \underline{C}} F_C(P, I)$$

($\underline{I}$ appartenant à $\text{COMM}(\underline{C})$),

$$\simeq \varprojlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} \prod_{C \in \underline{C}} F_C(P, I)$$

($\underline{I}$ appartenant à $\text{COMM}(\underline{P}_C)$ pour tout objet C de $\underline{C}$),

$$\simeq \varprojlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P, I) .$$

b) Montrons maintenant que (ii) implique (i).

Pour ce faire, notons $Q: \underline{P} \longrightarrow \underline{C}$ le foncteur composante connexe, i.e. tel que $Q(\underline{P}_C) = \{C\}$.

- Si $F': \underline{C} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ est un foncteur, on lui associe le foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \xrightarrow[Q \times 1_I]{} \underline{C} \times \underline{I} \xrightarrow{F'} \underline{\text{Ens}}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\underline{P} \in \underline{P}} F(P, I) &\simeq \prod_{C \in \underline{C}} \lim_{\underline{P} \in \underline{P}_C} F(P, I) \\ &\simeq \prod_{C \in \underline{C}} \lim_{\underline{P} \in \underline{P}_C} F'(QP, I) \\ &\simeq \prod_{C \in \underline{C}} F'(C, I) \end{aligned}$$

(car Q est constant sur $\underline{P}_C$, et $\underline{P}_C$ est connexe pour tout objet C de $\underline{C}$),

$$\begin{aligned} &\simeq \lim_{C \in \underline{C}} F'(C, I), \\ \lim_{\underline{P} \in \underline{P}} \lim_{I \in \underline{I}} F(P, I) &\simeq \prod_{C \in \underline{C}} \lim_{\underline{P} \in \underline{P}_C} \lim_{I \in \underline{I}} F_C(P, I) \\ &\simeq \prod_{C \in \underline{C}} \lim_{\underline{P} \in \underline{P}} \lim_{I \in \underline{I}} F'(QP, I) \\ &\simeq \prod_{C \in \underline{C}} \lim_{I \in \underline{I}} F'(C, I) \end{aligned}$$

(car Q est constant sur $\underline{P}_C$, et $\underline{P}_C$ est connexe pour tout objet C de $\underline{C}$).

$$\simeq \lim_{C \in \underline{C}} \lim_{I \in \underline{I}} F'(C, I).$$

On en déduit que le diagramme ci-après est commutatif dans $\underline{\text{Ens}}$:

$$\begin{array}{ccc}
\varprojlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P, I) & \simeq & \varprojlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{C \in \underline{C}} F'(C, I) \\
\downarrow c_F & & \downarrow c_{F'} \\
\varprojlim_{P \in \underline{P}} \varprojlim_{I \in \underline{I}} F(P, I) & \simeq & \varprojlim_{C \in \underline{C}} \varprojlim_{I \in \underline{I}} F'(C, I)
\end{array}$$

Par conséquent, si $\underline{I} \in \text{COMM}(\underline{P})$, on peut affirmer que c_F est un iso et donc $c_{F'}$, aussi. D'où l'on peut conclure que $\underline{I}$ appartient aussi à $\text{COMM}(\underline{C})$.

- Si $\underline{C}$ n'a qu'un objet C , il est clair que $\underline{I}$ est un élément de $\text{COMM}(\underline{P}_C)$ si c'est un élément de $\text{COMM}(\underline{P})$ (car $\underline{P} = \underline{P}_C$).

- Supposons donc que $\underline{C}$ ait au moins deux objets distincts C_1 et C_2 . Si I_1 et I_2 sont deux objets distincts de $\underline{I}$, soit $D: \underline{P}^{\text{op}} \longrightarrow \underline{I}$ le foncteur tel que $D(\underline{P}_{C_1}) = \{I_1\}$ et $D(\underline{P}_C) = \{I_2\}$

pour tout objet $C \neq C_1$. D'après la proposition 2, puisque $\underline{I}$ est élément de $\text{COMM}(\underline{P})$, donc de $\text{Surj } \underline{P}$, il existe un cône inductif de base D dans $\underline{I}$. Par conséquent, I_1 et I_2 sont connectés et $\underline{I}$ est donc connexe.

- Si $\underline{C}$ a au moins deux objets, si C est l'un d'entre eux, si $\underline{I}$ est élément de $\text{COMM}(\underline{P})$ et si $F_C: \underline{P}_C \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ est un foncteur, notons $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ le foncteur tel que:

- la restriction de F à $\underline{P}_C \times \underline{I}$ est F_C
- la restriction de F à $\underline{P}_{C'} \times \underline{I}$ est, pour tout objet $C' \neq C$, le foncteur constant sur 1.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P, I) & \simeq \prod_{C' \in \underline{C}} \varprojlim_{P \in \underline{P}_{C'}} F_{C'}(P, I) \\
& \simeq \varprojlim_{P \in \underline{P}_C} F_C(P, I) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \lim_{I \in \underline{I}} F(P, I) &\stackrel{\sim}{=} \lim_{I \in \underline{I}} F_C(P, I) \quad , \text{ si } P \in \underline{P}_C \quad , \\
- \lim_{I \in \underline{I}} F(P, I) &\stackrel{\sim}{=} 1 \quad , \text{ si } P \in \underline{P}_C, \text{ et } C' \neq C \quad ,
\end{aligned}$$

car $\underline{I}$ est connexe et F_C est constant sur 1.

On en déduit que le diagramme ci-dessous commute dans Ens :

$$\begin{array}{ccc}
\lim_{I \in \underline{I}} \lim_{P \in \underline{P}} F(P, I) & \stackrel{\sim}{=} & \lim_{I \in \underline{I}} \lim_{P \in \underline{P}_C} F_C(P, I) \\
\downarrow c_F & & \downarrow c_F \\
& & \lim_{P \in \underline{P}_C} \lim_{I \in \underline{I}} F_C(P, I) \\
& & \downarrow \lambda \\
\lim_{P \in \underline{P}} \lim_{I \in \underline{I}} F(P, I) & \stackrel{\sim}{=} & \prod_{C' \in \underline{C}} \lim_{P \in \underline{P}_{C'}} \lim_{I \in \underline{I}} F_{C'}(P, I)
\end{array}$$

et donc que c_F est un iso car c_F en est un (puisque $\underline{I}$ est élément de $\text{COMM}(\underline{P})$). D'où l'on déduit que $\underline{I} \in \text{COMM}(\underline{P}_C)$. //

2. Calcul de $\text{COMM}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est connexe.

2.1. Calcul de $\text{Inj } \underline{P}$, $\text{Surj } \underline{P}$ et $\text{COMM}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est dégénérée (et donc, en particulier connexe). Nous avons la

Proposition 4. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite et dégénérée,
alors $\text{Inj } \underline{P} = \text{Surj } \underline{P} = \text{COMM } \underline{P} = \text{ob}(\underline{\text{Cat}})$.

Preuve. Par hypothèse, il existe un cône projectif $(p_P: P_0 \longrightarrow P)_{P \in \underline{P}}$

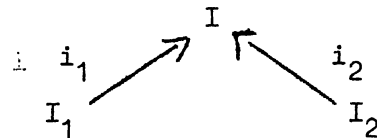
de base $\text{Id}_{\underline{P}}$ dans $\underline{P}$. On a donc, en particulier, $p_{P_0} \cdot p_{P_0} = p_{P_0}$, d'où l'on déduit que $P_0 \xrightarrow{p_{P_0}} P_0$ définit une sous-catégorie

$\underline{P}'$ de $\underline{P}$, initiale dans $\underline{P}$. Comme on prouve facilement que $\text{COMM}(\underline{P}') = \text{ob}(\underline{\text{Cat}})$, on conclut facilement grâce à la proposition 1. //

2.2. Calcul de $\text{Inj } \underline{P}$ lorsque $\underline{P}$ est non dégénérée et connexe. Montrons la

Proposition 5. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite, non dégénérée et connexe, pour que la catégorie petite $\underline{I}$ appartienne à $\text{Inj } \underline{P}$ il faut et il suffit que $\underline{I}$ soit $\underline{V}$ -filtrante et $\underline{P}$ -bornée.

Preuve de la nécessité. Prouvons tout d'abord qu'il est nécessaire que $\underline{I}$ soit $\underline{V}$ -filtrante. Pour ce faire, supposons que le diagramme



n'admette pas de clôture dans $\underline{I}$. Alors, pour tout objet J de $\underline{I}$ on dispose de la réunion disjointe

$$\text{Hom}_{\underline{I}}(\underline{I}, J) = H_1^J \coprod H^J \coprod H_2^J,$$

où l'on a posé, pour $s = 1$ ou 2 :

$$H_s^J = \left\{ j: \underline{I} \longrightarrow J \mid \begin{array}{l} \text{il existe } j_s: \underline{I}_s \longrightarrow J \text{ tel que} \\ j_s \cdot i_s = j \end{array} \right\}$$

Ceci permet de définir un foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ en posant:

$$F(\underline{P}, J) = H_1^J \coprod (H^J \times \underline{P}/\underline{P}) \coprod H_2^J,$$

avec $F(\underline{P}, j)(\underline{P}', j') = \begin{cases} j \cdot j' & \text{si } j \cdot j' \text{ se décompose par } i_1 \text{ ou } i_2, \\ (\underline{P} \cdot \underline{P}', j \cdot j') & \text{autrement.} \end{cases}$

Comme $\underline{P}$ est non dégénérée, on établit facilement que, pour tout objet J de $\underline{I}$, on a :

$$\varinjlim_{P \in \underline{P}} F(P, J) \simeq H_1^J \amalg H_2^J,$$

Par suite, $\varinjlim_{J \in \underline{I}} \varinjlim_{P \in \underline{P}} F(P, J)$ a exactement deux éléments distincts, images de i_1 et i_2 par coprojection. D'autre part, pour tout objet P de $\underline{P}$, l'ensemble $\varinjlim_{J \in \underline{I}} F(P, J)$ n'a qu'un

seul élément, coprojection de $\text{Id}_{\underline{I}}$. Par suite, l'ensemble

$\varinjlim_{P \in \underline{P}} \varinjlim_{J \in \underline{I}} F(P, J)$ n'a lui aussi qu'un élément, puisque $\underline{P}$

est connexe. Il en résulte que c_P ne peut pas être injective.

Montrons maintenant qu'il est nécessaire que $\underline{I}$ soit $\underline{P}$ -bornée. Pour ce faire, si $D: \underline{P} \longrightarrow \underline{I}$ est un foncteur, nous lui associons le foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ défini par :

$$F(P, I) = (\text{Hom}_{\underline{I}}(D(1), I) \amalg \text{Hom}_{\underline{I}}(D(2), I)) / r_P$$

en désignant par r_P la relation d'équivalence engendrée par la relation identifiant $j_1: D(1) \longrightarrow I$ et $j_2: D(2) \longrightarrow I$, dès lors qu'il existe un diagramme commutatif dans $\underline{I}$ tel que :

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & \nearrow j_1 & \uparrow j' & \nwarrow j_2 & \\ D(1) & \xrightarrow{D(1, P')} & D(P') & \xleftarrow{D(2, P')} & D(2) \end{array}$$

où $\text{Hom}_{\underline{P}}(P', P) \neq \emptyset$ dans $\underline{P}$. On note alors $\overline{j}^P$ la classe de j modulo r_P et $\overline{\overline{j}}^P$ l'image de $\overline{j}^P$ par la coprojection suivante :

$$F(P, I) \longrightarrow \varinjlim_{I \in \underline{I}} F(P, I)$$

Pour chaque objet P de $\underline{P}$, on a :

$$\overline{\text{Id}}_{D(1)}^P = \overline{D(1,P)}^P = \overline{D(2,P)}^P = \overline{\text{Id}}_{D(2)}^P$$

dans $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ I \in \underline{I}}} F(P, I)$, puisque $\overline{D(1,P)}^P = \overline{D(2,P)}^P$ dans $F(DP, P)$.

On en déduit que :

$$(\overline{\text{Id}}_{D(1)}^P)_P \in \text{ob}_{\underline{P}} = (\overline{\text{Id}}_{D(2)}^P)_P \in \text{ob}_{\underline{P}}$$

dans $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ P \in \underline{P}}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I \in \underline{I}}} F(P, I)$. D'où, puisque c_F est injective, résulte

que l'élément $(\overline{\text{Id}}_{D(1)}^P)_P \in \text{ob}_{\underline{P}}$ de $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ P \in \underline{P}}} F(P, D(1))$ et

l'élément $(\overline{\text{Id}}_{D(2)}^P)_P \in \text{ob}_{\underline{P}}$ de $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ P \in \underline{P}}} F(P, D(2))$ ont des images

égales par les deux coprojections :

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ P \in \underline{P}}} F(P, D(1)) & & \lim_{\substack{\longrightarrow \\ P \in \underline{P}}} F(P, D(2)) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I \in \underline{I}}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ P \in \underline{P}}} F(P, I) & \end{array}$$

Comme $\underline{I}$ est nécessairement $\underline{V}$ -filtrante (d'après ce qui précède), il existe un diagramme de $\underline{I}$:

$$\begin{array}{ccc} D(1) & & D(2) \\ & \searrow i_1 & \swarrow i_2 \\ & I & \end{array}$$

tel qu'on ait l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \lim_{P \in \underline{P}} F(P, i_1) ((\overline{\text{Id}}_{D(1)}^P)_P \in \text{ob} \underline{P}) \\ &= \lim_{P \in \underline{P}} F(P, i_2) ((\overline{\text{Id}}_{D(2)}^P)_P \in \text{ob} \underline{P}) \end{aligned}$$

Par conséquent, i_1 et i_2 sont équivalents modulo r_P , pour tout objet P de $\underline{P}$, ce qui exprime exactement que $\underline{I}$ est $\underline{P}$ -bornée.

Preuve de la suffisance. Supposons que $\underline{I}$ soit $\underline{V}$ -filtrante et $\underline{P}$ -bornée, et soit $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ un foncteur tel que:

- $(x_P^1)_P \in \text{ob} \underline{P}$ est élément de $\lim_{P \in \underline{P}} F(P, I_1)$, d'image x_1

par la coprojection $\lim_{P \in \underline{P}} F(P, I_1) \longrightarrow \lim_{I \in \underline{I}} \lim_{P \in \underline{P}} F(P, I)$

- $(x_P^2)_P \in \text{ob} \underline{P}$ est élément de $\lim_{P \in \underline{P}} F(P, I_2)$, d'image x_2

par la coprojection $\lim_{P \in \underline{P}} F(P, I_2) \longrightarrow \lim_{I \in \underline{I}} \lim_{P \in \underline{P}} F(P, I)$

Supposons $c_F(x_1) = c_F(x_2)$. Comme $\underline{I}$ est $\underline{V}$ -filtrante, pour tout objet P de $\underline{P}$, il existe un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} I_1 & & I_2 \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ i_P^1 & & i_P^2 \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & I_P & \end{array}$$

dans $\underline{I}$ tel que $F(P, i_P^1)(x_P^1) = F(P, i_P^2)(x_P^2)$.

On peut donc définir un foncteur $D: \underline{P}^\wedge \longrightarrow \underline{I}$ en posant :
 $D(P, s) = i_P^s$, si $s = 1, 2$. Comme $\underline{I}$ est $\underline{P}$ -bornée, on en déduit l'existence d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 D(1) = I_1 & & I_2 = D(2) \\
 & \searrow i_1 & \swarrow i_2 \\
 & I &
 \end{array}$$

dans $\underline{I}$ ainsi que, pour tout objet P de $\underline{P}$, l'existence d'un diagramme commutatif, dans $\underline{I}$, analogue au diagramme 1 de 0.11., dont nous reprenons les notations. Pour tout objet P de $\underline{P}$, comme $\text{Hom}_{\underline{P}}(P_k, P) \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq k \leq 2n_P+1$, on dispose de flèches $p_1: P_1 \longrightarrow P$, où $1 = 1, 2, \dots, 2n_P+1$, dans $\underline{P}$.

Si l'on pose, pour $s = 1, 2$, $y_P^s = F(P, i_s)(x_P^s)$, nous avons donc:

$$\begin{aligned}
 y_P^1 &= F(p_1, i_1)(x_{P_1}^1) \\
 &= F(p_1, j_1' \cdot i_{P_1}^1)(x_{P_1}^1) \\
 &= F(p_1, j_1' \cdot i_{P_1}^2)(x_{P_1}^2) \\
 &= F(p_2, j_2' \cdot i_{P_2}^2)(x_{P_2}^2) \\
 &= \dots \\
 &= F(p_{2n_P+1}, i_{2n_P+1})(x_{P_{2n_P+1}}^2) \\
 &= y_P^2.
 \end{aligned}$$

En conséquence, $x^1 = x^2$ et c_F est injective. //

2.3. Calcul de $\text{Surj } \underline{P}$ lorsque $\underline{P}$ est non dégénérée et connexe.

Montrons la

Proposition 6. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite, non dégénérée et connexe, pour que la catégorie petite $\underline{I}$ appartienne à $\text{Surj } \underline{P}$ il faut et il suffit qu'elle soit $\underline{V}$ -filtrante et $\underline{ZP}$ -bornée.

Preuve de la nécessité. Montrons d'abord que $\underline{I}$ est nécessairement $\underline{V}$ -filtrante. Pour ce faire, supposons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & I & \\
 i_1 \swarrow & & \searrow i_2 \\
 I_1 & & I_2
 \end{array}$$

n'admette pas de clôture dans $\underline{I}$. On désigne donc (comme dans la première partie de la preuve de la nécessité de la condition de la proposition 4) de la somme disjointe :

$$\text{Hom}_{\underline{I}}(\underline{I}, \underline{J}) = H_1^J \amalg H^J \amalg H_2^J$$

Ceci permet de définir un foncteur $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ en posant:

$$\begin{aligned} - F(P, J) &= (H_1^J \times \{1\} \times \underline{P}/\underline{P}) \amalg (H^J \times \underline{P}/\underline{P} \times \underline{P}/\underline{P}) \amalg (H_2^J \times \{2\} \times \underline{P}/\underline{P}) \\ - F(P, j)(i, p_1, p_2) &= \begin{cases} (j.i, 1, p.p_2) & \text{s'il existe } j' \text{ tel que } j.i = j'.i_1 \\ (j.i, p.p_2) & \text{si } j.i \in H^J \\ (j.i, 2, p.p_1) & \text{s'il existe } j' \text{ tel que } j.i = j'.i_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, il est clair que, pour tout objet P de $\underline{P}$, tout couple d'éléments (p_1, p_2) de $\underline{P}/\underline{P}$, tout objet J de $\underline{I}$ et toute flèche $j: \underline{I} \longrightarrow J$, les triplets (j, p_1, p_2) , $(i_1, 1, p_2)$ et $(\text{Id}_{\underline{I}}, \text{Id}_{\underline{P}}, p_2)$ ont même image (par les coprojections) dans $\lim_{J \in \underline{I}} F(P, J)$; de même que les triplets (j, p_1, p_2) , $(\text{Id}_{\underline{I}}, p_1, p_2)$, $(i_2, 2, p_1)$ et $(\text{Id}_{\underline{I}}, p_1, \text{Id}_{\underline{P}})$. On en déduit que $\lim_{J \in \underline{I}} F(P, J)$ n'a qu'un seul élément, image par coprojection de $(\text{Id}_{\underline{I}}, \text{Id}_{\underline{P}}, \text{Id}_{\underline{P}})$. Comme $\underline{P}$ est connexe, l'ensemble $\lim_{P \in \underline{P}} \lim_{J \in \underline{I}} F(P, J)$ n'a donc aussi qu'un seul élément.

Par contre, l'ensemble $\lim_{P \in \underline{P}} F(P, J)$ est vide, en particulier

parce que $\underline{P}$ est non dégénérée. D'où il résulte que l'ensemble

$$\lim_{I \in \underline{I}} \lim_{P \in \underline{P}} F(P, J) = \emptyset \text{ et } c_{\underline{P}} \text{ ne pourrait être surjective.}$$

Montrons maintenant que $\underline{I}$ est nécessairement $\mathbb{ZP}$ -bornée.

Considérons le foncteur $E: \underline{P} \times \S \underline{P} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ tel que, pour

toute flèche $p : P \longrightarrow P'$ et tout objet Q de $\underline{P}$:

- $E(Q, P) = E(Q, p) = \text{Hom}_{\underline{P}}(P, Q)$,
- $E(Q, (d, p)) = \text{Hom}_{\underline{P}}(\text{Id}_P, Q)$
- $E(Q, (c, p)) = \text{Hom}_{\underline{P}}(p, Q)$.

On vérifie facilement que l'ensemble $\lim_{X \in \S \underline{P}} E(Q, X)$ n'a qu'un élément, représenté par Id_Q . Si $D : \S \underline{P} \longrightarrow \underline{I}$ est un foncteur, nous lui associons le foncteur $F : \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ en posant :

- pour tout objet Q de $\underline{P}$, $F(Q, -) : \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ est l'extension de Kan inductive de $E(Q, -) : \S \underline{P} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ le long de D . Il en résulte que l'ensemble $\lim_{I \in \underline{I}} F(Q, I) \simeq \lim_{X \in \S \underline{P}} E(Q, X)$

n'a qu'un élément et, par suite, l'ensemble $\lim_{Q \in \underline{P}} \lim_{I \in \underline{I}} F(Q, I)$

aussi puisque $\underline{P}$ est connexe. Comme c_F est surjective, il existe donc au moins un objet I de $\underline{I}$ tel que l'ensemble $\lim_{P \in \underline{P}} F(P, I)$

soit non vide. C'est dire que l'on dispose, pour tout objet P de $\underline{P}$, d'éléments $(\overline{q_P}, \overline{i_P})$ de $F(P, I)$ représentés par $q_P : Q_P \longrightarrow P$ et $i_P : D(Q_P) \longrightarrow I$ tels que, pour toute flèche $p : P \longrightarrow P'$ de $\underline{P}$, on ait : $F(p, I)(\overline{q_P}, \overline{i_P}) = (\overline{p \cdot q_P}, \overline{i_P}) = (\overline{q_{P'}}, \overline{i_{P'}})$, ce qui signifie précisément que $\underline{I}$ est $\underline{ZP}$ - bornée .

Preuve de la suffisance. Soit $F : \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ un foncteur et $(\overline{x_P})_{P \in \text{ob} \underline{P}}$ un élément de $\lim_{P \in \underline{P}} \lim_{I \in \underline{I}} F(P, I)$. Pour chaque objet P de $\underline{P}$, l'élément $\overline{x_P}$ de $\lim_{I \in \underline{I}} F(P, I)$ est image par la coprojection d'un certain élément x_P de $F(P, I_P)$; de plus, si $p : P \longrightarrow P'$ est une flèche de $\underline{P}$, on a :

$$\overline{x_{P'}} = F(\overline{p}, \overline{I_P})(\overline{x_P}) \quad \text{dans} \quad \lim_{I \in \underline{I}} F(P', I) .$$

Ceci signifie donc, puisque $\underline{I}$ est $\underline{V}$ -filtrante, qu'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 D(P) = I_P & & I_{P'} = D(P') \\
 \searrow D(d,p) & \swarrow D(c,p) & \\
 & I_p = D(p) &
 \end{array}$$

de $\underline{I}$ tel que $F(p, D(d,p))(x_p) = F(P', D(c,p))(x_{P'})$. On définit ainsi un foncteur $D: \S \underline{P} \longrightarrow \underline{I}$ et, puisque $\underline{I}$ est $\underline{ZP}$ -bornée, on dispose donc de deux diagrammes analogues aux diagrammes 2 et 3 de 0.12. dont nous reprnons les notations.

Posons, pour tout objet P de $\underline{P}$: $y_P = F(q_P, i_P)(x_{Q_P})$.

C'est un élément de $F(P, I_0)$. Bien entendu, x_P et y_P ont même image dans $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ I \in \underline{I}}} F(P, I)$ par la coprojection $F(P, I_0) \longrightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I \in \underline{I}}} F(P, I)$.

De plus, pour toute flèche $p: P \longrightarrow P'$ de $\underline{P}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 F(p, I)(y_P) &= F(p \cdot q_P, i_P)(x_{Q_P}) \\
 &= F(r_1 \cdot q_1, j_{q_1} \cdot D(d, q_1))(x_{Q_P}) \\
 &= F(r_1, j_{q_1} \cdot D(c, q_1))(x_{Q_2}) \\
 &= F(r_1 \cdot q_2, j_{q_2} \cdot D(c, q_2))(x_{Q_3}) \\
 &= F(r_3 \cdot q_3, j_{q_3} \cdot D(c, q_3))(x_{Q_3}) \\
 &\vdots \\
 &= F(q_{P'}, i_{P'})(x_{Q_{P'}}) = y_{P'} .
 \end{aligned}$$

En conséquence, la famille $(y_P)_P \in \text{ob} \underline{P}$ appartient à l'ensemble

$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ P \in \underline{P}}} F(P, I_0)$ et son image y par la coprojection dans l'ensemble

$\lim_{I \in \underline{I}} \lim_{P \in \underline{P}} F(P, I)$ est telle que $c_F(y) = (\bar{x}_P)_P \in \text{ob} \underline{P}$. Donc c_F est surjective. //

2.4. Calcul de $\text{COMM}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est non dégénérée et connexe.

Comme $\text{Inj } \underline{P} \cap \text{Surj } \underline{P} = \text{COMM}(\underline{P})$, nous avons donc, en vertu des propositions 5 et 6, la

Proposition 7. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite, non dégénérée et connexe, une petite catégorie est élément de $\text{COMM}(\underline{P})$ si et seulement si elle est $\underline{V}$ -filtrante, $\underline{P}$ -bornée et $\underline{ZP}$ -bornée.

3. Calcul de $\text{COMM}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est discrète.

3.1. Calcul de $\text{Inj } \underline{P}$, $\text{Surj } \underline{P}$, et $\text{COMM}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P} = \emptyset$.
On vérifie immédiatement la

Proposition 8. Les éléments de $\text{Inj } \emptyset$ sont les catégories petites connexes (éventuellement vides). Les éléments de $\text{Surj } \emptyset$ sont les catégories petites et non vides. Les éléments de $\text{COMM}(\emptyset)$ sont les catégories petites connexes et non vides.

3.2. Calcul de $\text{Inj } \underline{P}$ lorsque $\underline{P}$ est discrète non vide.
Prouvons la

Proposition 9. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite, discrète non vide, pour que la petite catégorie $\underline{I}$ appartienne à $\text{Inj } \underline{P}$ il faut et il suffit qu'elle soit $\underline{ZP}$ -filtrante.

Preuve de la nécessité. Soient I et I' deux objets de $\underline{I}$ et, pour tout objet P de $\underline{P}$, soit $D_P: \underline{Z}_{n_P} \longrightarrow \underline{I}$ un zigzag de $\underline{I}$

tel que $D_P(1) = I$ et $D_P(2n_P+1) = I'$. On définit alors un

foncteur $F : \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ en posant :

$$F(P, J) = \lim_{X \in \underline{Z}_{n_P}} \text{Hom}_{\underline{I}}(D_P(X), J)$$

Si X est objet de $\underline{Z}_{n_P}$ et si $j : D_P(X) \longrightarrow J$ dans $\underline{I}$,

nous noterons $\overline{j}^P$ son image dans $F(P, J)$ par la coprojection $\text{Hom}_{\underline{I}}(D_P(X), J) \longrightarrow F(P, J)$. De même, nous noterons $\overline{j}^P$ l'image de $\overline{j}^P$ dans l'ensemble $\lim_{I \in \underline{I}} F(P, J)$ par la coprojection

$F(P, J) \longrightarrow \lim_{I \in \underline{I}} F(P, J)$. Alors on vérifie facilement que,

pour tout objet P de $\underline{P}$, et pour tout entier $1 \leq k \leq n_P$, on a :

$$D_P(\overline{(2k-1 \longrightarrow 2k)}^P) = \overline{\text{Id}_{D_P}}^P \text{ dans } F(P, D_P(2k)) .$$

On en déduit que, pour tout objet P de $\underline{P}$ et tout entier k' tel que $1 \leq k' \leq 2n_P+1$, on a : $\overline{\text{Id}_I}^P = \overline{\text{Id}_{D_P}}^P(k') = \overline{\text{Id}_I}^P$,

dans l'ensemble $\lim_{J \in \underline{I}} F(P, J)$. Comme c_F est injective, cela impose que l'élément $(\overline{\text{Id}_I}^P)_P \in \underline{P}$ de $\lim_{P \in \underline{P}} F(P, I) = \prod_{P \in \underline{P}} F(P, I)$

et l'élément $(\overline{\text{Id}_I}^P)_P \in \underline{P}$ de $\prod_{P \in \underline{P}} F(P, I)$ ont des coprojections égales dans l'ensemble $\lim_{I \in \underline{I}} \lim_{P \in \underline{P}} F(P, I)$. C'est précisément dire que $\underline{I}$ est $\underline{ZP}$ -filtrante . //

Preuve de la suffisance. Soit $F : \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ un foncteur, $(x_P)_{P \in \underline{P}}$ un élément de $\lim_{P \in \underline{P}} F(P, I) = \prod_{P \in \underline{P}} F(P, I)$ et $(x'_P)_{P \in \underline{P}}$ un élément de $\prod_{P \in \underline{P}} F(P, I')$, dont nous notons x et x' les images respectives par les coprojections dans $\lim_{J \in \underline{I}} \lim_{P \in \underline{P}} F(P, J)$.

Si $c_P(x) = c_P(x')$, alors, pour tout objet P de $\underline{P}$, les coprojections de x_P et x'_P dans $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ J \in \underline{I}}} F(P, J)$ sont égales, et donc, il existe un zigzag $D_P: \underline{Z}_{n_P} \longrightarrow \underline{I}$ et une famille $(y_P^k)_{1 \leq k \leq 2n_P+1}$ tels que :

- $D_P(1) = I$, $D_P(2n_P+1) = I'$,
- $y_P^1 = x_P$, $y_P^{2n_P+1} = x'_P$,
- $F(P, D_P(2h-1 \longrightarrow 2h))(y_P^{2h-1}) = y_P^{2h}$
 $= F(P, D_P(2h+1 \longrightarrow 2h))(y_P^{2h+1})$, pour tout $1 \leq h \leq n_P$.

Comme $\underline{I}$ est $\underline{ZP}$ -filtrante, il existe un zigzag $D: \underline{Z}_n \longrightarrow \underline{I}$

vérifiant les conditions de 0.14 (où l'on pourra utiliser le diagramme 4). Par conséquent, pour tout entier $1 \leq k' \leq 2n+1$, il existe un élément $(t_P^{k'})_{P \in \underline{P}}$ de l'ensemble $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ P \in \underline{P}}} F(P, D(k'))$

de telle sorte que, pour tout objet P de $\underline{P}$ et tout entier $1 \leq l' \leq n$,

- on ait :
- $t_P^1 = x_P$, $t_P^{2n+1} = x'_P$,
 - $F(P, D(2l'-1 \longrightarrow 2l'))(t_P^{2l'-1})$
 $= t_P^{2l'} = F(P, D(2l'+1 \longrightarrow 2l'))(t_P^{2l'+1})$.

Il suffit de prendre pour $t_P^{k'}$ l'image d'un y_P^k par une applica-

tion $F(P, i)$ telle que $i: D_P(k) \longrightarrow D(k')$, $\text{Id}_{\underline{I}}$ et $\text{Id}_{\underline{I}}$, aient même coprojections dans $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ (X,Y) \in \underline{Z}_{n_P}^{\text{op}} \times \underline{Z}_n}} \text{Hom}_{\underline{I}}(D_P^{\text{op}}(X), D(Y))$,

ce qui est possible puisque $\underline{I}$ est $\underline{ZP}$ -filtrante et puisque deux flèches $i: D_P(k) \longrightarrow D(k')$ et $j: D_P(h) \longrightarrow D(k')$ sont nécessairement telles que $i(y_P^k) = j(y_P^h)$.

On en déduit que tous les $t_P^{k'}$, où $P \in \underline{P}$ et $1 \leq k' \leq 2n+1$,

ont une image commune par coprojections dans $\varinjlim_{J \in \underline{I}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P, I)$.
 D'où il résulte que $x = x'$ et donc que c_F est injective. //

3.3. Calcul de $\text{Surj } \underline{P}$ lorsque $\underline{P}$ est discrète non vide.
 Démontrons la

Proposition 10. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite, discrète et non vide, pour que la petite catégorie $\underline{I}$ appartienne à $\text{Surj } \underline{P}$, il faut et il suffit qu'elle soit $\underline{P}$ -filtrante.

Preuve de la nécessité. Si $(I_P)_{P \in \underline{P}}$ est une famille d'objets de $\underline{I}$, elle définit un foncteur $D: \underline{P}^{\text{op}} \longrightarrow \underline{I}$ si l'on pose $D(P) = I_P$! Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.

Preuve de la suffisance. Si $F: \underline{P} \times \underline{I} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ est un foncteur, un élément x de $\varinjlim_{P \in \underline{P}} \varprojlim_{I \in \underline{I}} F(P, I)$ est déterminé par une famille $(x_{P, I_P})_{P \in \underline{P}}$ d'éléments de $F(P, I_P)$. Soit $(I_P \xrightarrow{i_P} I)_{P \in \underline{P}}$ un cône inductif dans $\underline{I}$ de base la famille $(I_P)_{P \in \underline{P}}$ et dont l'existence est assurée puisque $\underline{I}$ est $\underline{P}$ -filtrante. Posons $y_P = F(P, i_P)(x_{P, I_P})$ pour tout objet P de $\underline{P}$. Notons y l'image dans $\varinjlim_{J \in \underline{J}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P, J)$ de la famille $(y_P)_{P \in \underline{P}}$ par la coprojection $\varinjlim_{P \in \underline{P}} F(P, I) \longrightarrow \varinjlim_{J \in \underline{J}} \varprojlim_{P \in \underline{P}} F(P, J)$. On a alors $c_F(y) = x$ car x_{P, I_P} et y_P ont même image, pour tout P , dans l'ensemble $\varinjlim_{J \in \underline{J}} F(P, J)$. //

3.4. Calcul de $\text{COMM}(\underline{P})$ lorsque $\underline{P}$ est discrète non vide.
 Comme $\text{Inj } \underline{P} \cap \text{Surj } \underline{P} = \text{COMM}(\underline{P})$, nous avons, en vertu des propositions 9 et 10, la

Proposition 11. Si $\underline{P}$ est une catégorie petite, discrète non vide,
pour qu'une catégorie petite $\underline{I}$ soit élément de $\text{COMM}(\underline{P})$, il
faut et il suffit qu'elle soit $\underline{P}$ -filtrante et $\underline{ZP}$ -filtrante.

4. Remarques , compléments et exemples.

4.1. On vérifie immédiatement que, si $\underline{I}' \longrightarrow \underline{I}$ est un foncteur final entre catégories petites , alors $\text{COMM}(\underline{I}')$ est inclus dans $\text{COMM}(\underline{I})$; ce qui "dualise" la proposition 1.

De même, il est facile d'établir que les éléments de $\text{COMM}(\emptyset)$ sont les petites catégories non vides ; ce qui "dualise" la proposition 8.

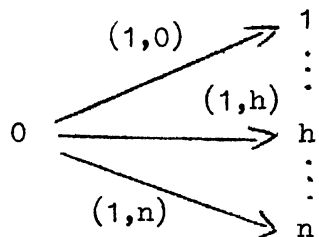
En utilisant un calcul direct ou encore les propositions 7 et 11 , on voit enfin que, si $\underline{I}$ est une catégorie petite possédant un cône inductif $(i_I: I \longrightarrow I_o)_{I \in \underline{I}}$ de base $\text{Id}_{\underline{I}}: \underline{I} \longrightarrow \underline{I}$,

on a $\text{Inj } \underline{I} = \text{Surj } \underline{I} = \text{COMM}(\underline{I})$ et ses éléments sont toutes les catégories petites ; ce qui "dualise" la proposition 4 .

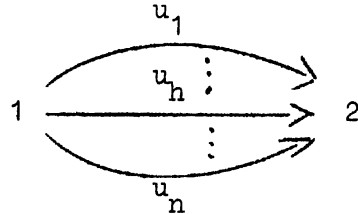
De même, la proposition 3 se dualise. Si $\underline{I} = \coprod_{C \in \underline{C}} \underline{I}_C$ est la décomposition de $\underline{I}$ en somme de ses composantes connexes, on a encore $\text{COMM}(\underline{I}) = (\text{COMM}(\underline{C})) \cap (\bigcap_{C \in \underline{C}} \text{COMM}(\underline{I}_C))$.

4.2. De la caractérisation des éléments de $\text{COMM}(\underline{P})$, lorsque $\underline{P}$ est une petite catégorie donnée, on peut déduire , a contrario, une caractérisation des éléments (ou d'une classe remarquable d'éléments) de $\text{COMM}(\underline{I})$ lorsque $\underline{I}$ est donnée. Ainsi, notons :

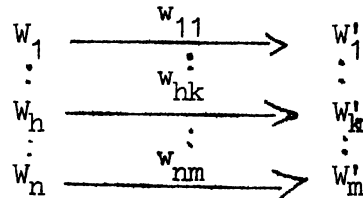
- pour tout entier $n \geq 2$, $\underline{V}_n$ la catégorie représentée par



- pour tout entier $n \geq 2$, $\underline{U}_n$ la catégorie représentée par :



- pour tout couple d'entiers (n,m) , avec $n \geq 2$ et $m \geq 2$, $\underline{W}_{n,m}$ la catégorie représentée par :

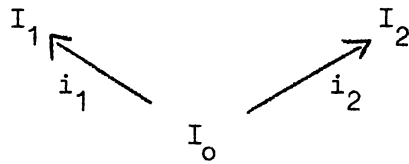


Comme ni $\underline{V}_n$, ni $\underline{U}_n$, ni $\underline{W}_{n,m}$ ne sont $\underline{V}$ -filtrantes, de la proposition 5 résulte que les seules catégories connexes appartenant soit à $\text{COMM}(\underline{V}_n)$ soit à $\text{COMM}(\underline{U}_n)$ soit à $\text{COMM}(\underline{W}_{n,m})$ sont nécessairement dégénérées. De la proposition 4 on déduit alors que ces catégories (connexes) dégénérées sont bien éléments de $\text{COMM}(\underline{V}_n)$, $\text{COMM}(\underline{U}_n)$ et $\text{COMM}(\underline{W}_{n,m})$.

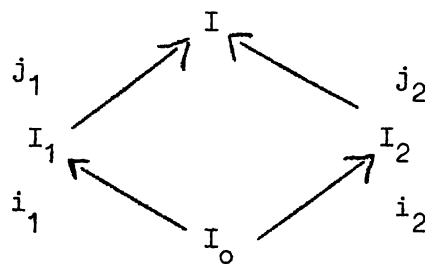
Comme de plus, ni $\underline{V}_n$ ni $\underline{W}_{n,m}$ ne sont $\underline{P}$ -filtrantes, lorsque $\underline{P}$ est une catégorie discrète ayant au moins deux objets distincts, on en conclut que les seuls éléments de $\text{COMM}(\underline{V}_n)$ = $\text{COMM}(\underline{W}_{n,m})$ sont les catégories petites dégénérées.

4.3. Il suffit de "réécrire" la proposition 7 pour déterminer les limites inductives commutant dans $\underline{\text{Ens}}$ avec les noyaux de 2 (ou même $n \geq 2$) flèches de même source et de même but. En effet, il est clair que les éléments de $\text{COMM} \underline{U}_n$ sont les petites catégories vérifiant :

(1) tout diagramme de $\underline{I}$ de la forme :

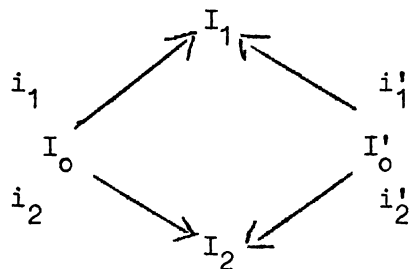


se clôt dans $\underline{I}$ en un diagramme commutatif de la forme :

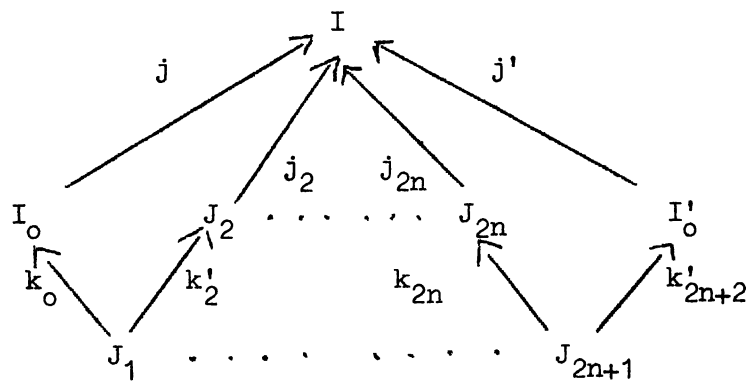


c'est-à-dire que $\underline{I}$ est $\underline{V}$ - filtrante.

(2) Tout diagramme de $\underline{I}$ de la forme suivante:



se clôt dans $\underline{I}$ en un diagramme commutatif :



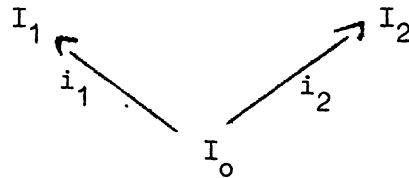
où les J_i sont égaux à l'un des éléments de $\{I_0, I_1, I_2, I'_0\}$

et les k_i, k'_i sont égaux à l'un des éléments de $\{i_1, i_2, i'_1, i'_2\}$.

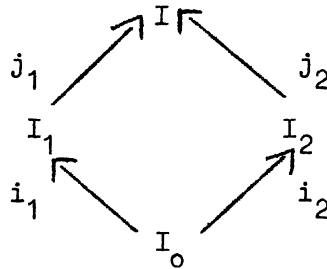
De la même manière, on peut caractériser les limites inductives qui commutent dans Ens avec les produits fibrés de 2 (ou même $n \geq 2$) flèches de même but. Ainsi, les éléments de $\text{COMM}(\underline{V}_n^{\text{op}})$

sont les petites catégories $\underline{I}$ vérifiant :

- (1) tout diagramme de $\underline{I}$ de la forme suivante

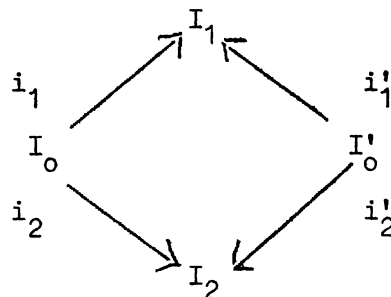


se clôt dans $\underline{I}$ en un diagramme commutatif de la forme



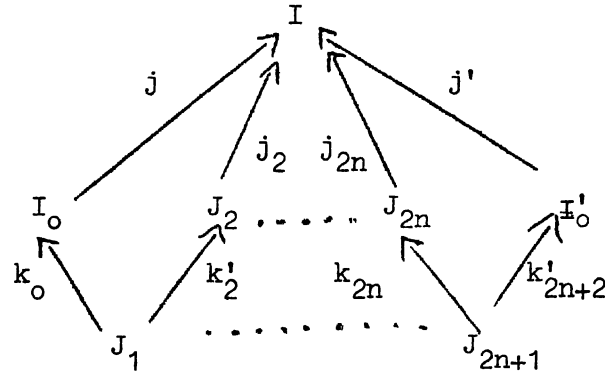
c'est-à-dire que $\underline{I}$ est $\underline{V}$ -filtrante.

- (2)' Tout diagramme de $\underline{I}$ de la forme suivante :



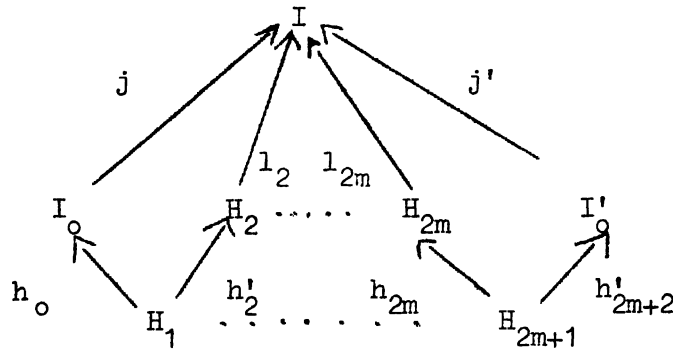
détermine deux diagrammes commutatifs dans $\underline{I}$, ci-après désignés (*) et (**).

(*)



où les J_i sont pris dans $\{I_0, I'_0, I_1\}$ et les k_i, k'_i sont pris dans $\{i_1, i'_1\}$.

(**)



où les H_i sont pris dans $\{I_0, I'_0, I_2\}$ et les h_i, h'_i sont pris dans $\{i_2, i'_2\}$.

4.4. De la proposition 7, on peut aussi déduire une description de $\text{COMM}(\mathcal{P}) = \bigcap_{\underline{P} \in \mathcal{P}} \text{COMM}(\underline{P})$, lorsque $\mathcal{P}$ est une

classe donnée de petites catégories. Ainsi, si α est un ordinal régulier, et si $\mathcal{P}_\alpha$ désigne la classe des catégories α -petites, on retrouve que $\text{COMM} \mathcal{P}_\alpha$ contient la classe $\mathcal{J}_{\alpha-f}$ des catégories petites α -filtrantes. De plus, on vérifie que $\text{COMM}(\mathcal{P}_\alpha) = \mathcal{J}_{\alpha-f}$.

De même, si $\mathcal{P}_c$ désigne la classe des catégories petites

et connexes, on retrouve que $\text{COMM}(\mathcal{P}_c)$ contient la classe $\mathcal{T}_d$ des catégories petites et discrètes. De plus, on établit que $\text{COMM}(\mathcal{P}_c) = \mathcal{T}_{1d}$ où $\mathcal{T}_{1d}$ est la classe des petites catégories $\underline{I}$ dont chaque composante connexe $\underline{I}_C$ possède un cône inductif de base $\text{Id}_{\underline{I}_C} : \underline{I}_C \longrightarrow \underline{I}_C$.

4.5. Soit $\text{ob} : \underline{\text{Cat}} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ (resp. $\text{Fl} : \underline{\text{Cat}} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$) le foncteur "objet" (resp. "flèches"). Ces deux foncteurs commutent aux $\underline{I}$ -limites inductives dès que $\underline{I}$ est une catégorie petite vérifiant les conditions (1) et (2)' de 4.3. En effet, $\underline{\text{Cat}}$ est équivalente à une catégorie de foncteurs continus de $\underline{S}$ vers $\underline{\text{Ens}}$, où $\underline{S}$ est une petite catégorie où sont distingués des produits fibrés ; les $\underline{I}$ -limites inductives dans $\underline{\text{Cat}}$ se calculent donc comme dans $\underline{\text{Ens}}^{\underline{S}}$, c'est-à-dire point par point, dès que les $\underline{I}$ -limites inductives dans $\underline{\text{Ens}}$ commutent aux produits fibrés.

De même, une catégorie localisable au sens de Diers est à limites projectives connexes (par exemple la catégorie des corps) car elle est toujours équivalente à une catégorie de foncteurs continus et co-continus $\underline{S} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ où l'on a distingué dans $\underline{S}$ des limites projectives petites et des sommes petites.
