

# DIAGRAMMES

RENÉ GUITART

**Théorie des bornes**

*Diagrammes*, tome 1 (1979), exp. n° 4, p. G1-G4

[http://www.numdam.org/item?id=DIA\\_1979\\_\\_1\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=DIA_1979__1__A4_0)

© Université Paris 7, UER math., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Diagrammes, Vol. 1, 1979.

THEORIE DES BORNES

par

René Guitart

Chapitre 1 : Où l'on rencontre une présentation catégorique des cardinaux classiques.

Habituellement les cardinaux sont utilisés pour borner a priori des constructions et garantir l'existence d'objets qui risqueraient d'être "trop grands". Cela est fait d'abord en donnant un sens aux locutions :

"card  $A \leq b$ " et "card  $A < b$ ".

Amplifiant cette remarque, voici une description de  $\mathcal{N}$  (et de card) basée sur l'étude des sous-foncteurs du foncteur partie, ce qui est très différent de l'introduction d'un objet des entiers naturels. Cette démarche éclaire la manière dont l'arithmétique (finie ou transfinie) s'élabore à partir de la logique interne de Ens; cela s'adapterait aisément aux cas d'un topos, des ensembles flous, d'un univers algébrique.

Soit  $U$  un modèle de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix (et donc aussi trichotomie sur les cardinaux). On désigne par Ens la catégorie de toutes les applications entre ensembles éléments de  $U$ , et par  $P$ : Ens  $\longrightarrow$  Ens le foncteur "parties" covariant associant à tout ensemble  $X$  l'ensemble  $PX = 2^X = \{A / A \subset X\}$  et à toute  $f: X \longrightarrow Y$  l'application  $Pf: PX \longrightarrow PY : A \longmapsto PfA = \{fa / a \in A\}$ .

DEFINITIONS. On appelle borne un sous-foncteur  $B$  de  $P$  tel que pour tout  $X$  on ait  $\emptyset \in BX$ .

Sur la classe BOR de toutes les bornes on définit un ordre  $\leq$  et deux lois binaires  $+$  et  $\cdot$  par:

- $B_1 \leq B_2$  si et seulement si  $\forall X (B_1 X \subset B_2 X)$ ,
- $(B_1 + B_2)(X) = \text{Image}(B_1 X \times B_2 X \longrightarrow PX \times PX \longrightarrow PX)$ ,
- $(B_1 \cdot B_2)(X) = \text{Image}((B_1 \circ B_2) X \longrightarrow (PoP) X \longrightarrow PX)$ , où  $P \times P \longrightarrow P$  et  $PoP \longrightarrow P$  désignent les transformations naturelles de "réunions".

On note BOR<sub>fin</sub> la classe des bornes finies, i.e. vérifiant  $B + B \neq B$ .

THEOREME.

1) Toute borne  $B \neq P$  est de la forme  $P^{(b)}$  ou  $P^{(b)}$ , où  $b$  est un cardinal, avec

$$P^{(b)} X = \{A / A \subset X \text{ et } \text{card } A \leq b\},$$

$$P^{(b)} X = \{A / A \subset X \text{ et } \text{card } A < b\}.$$

2)  $(\text{BOR}, \leq, +, \cdot) = \text{BOR}$  est un semi-anneau bien ordonné et l'application  $b \mapsto P^{(b)}$  (resp.  $b \mapsto P^{(b)}$ ) détermine le semi-anneau bien ordonné  $(\text{CAR}, \leq, +, \cdot) = \text{CAR}$  des cardinaux de Ens (avec  $\leq, +$  et  $\cdot$  usuels) comme un sous-semi-anneau de BOR.

3) On a  $(\text{BOR}_{\text{fin}}, \leq, +, \cdot) \simeq (\mathbb{N}, \leq, +, \cdot)$ .

4) Pour tout ensemble  $X$  on a  $\text{card } X = \inf \{B / A \in BX\}$ .

Ainsi dans des contextes plus généraux que celui de Ens (e.g. topos, ensembles flous, univers algébriques) le calcul des cardinaux (finis ou non) pourra être déduit de celui des bornes.

PREUVE. Une fois établi le point (1), le reste suit aisément des propriétés usuelles des cardinaux. Pour prouver (1), posons pour tout ensemble  $X$

$$b_X = \sup \{ \text{card } A / A \subset X \text{ et } A \in BX \}.$$

1- Si  $Z \subset X$  et  $\text{card } Z < b_X$ , alors  $Z \in BX$ : en effet, par hypothèse on a un  $A \subset X$  tel que  $A \in BX$ ,  $\text{card } Z \leq \text{card } A \leq b_X$ , et alors il existe une surjection  $s: A \longrightarrow Z$  et donc une application  $f: X \longrightarrow X$

telle que  $f(A) = Z$ ; par naturalité il vient  $Z \in BX$  (ceci du moins dans le cas où  $Z \neq \emptyset$ ).

2- Pour un  $X$  donné on a soit  $BX = P^{(b_X)}(X)$  soit  $BX = P^{(b_X)}(X)$ .

En effet, si pour un  $A \subset X$ , avec  $\text{card } A = b_X$ , on a  $A \in BX$ , alors tout  $A'$ , avec  $\text{card } A' = b_X$  est tel que l'on ait une bijection  $u: A \rightarrow A'$  et puis une application  $f: X \rightarrow X$  telle que  $f(A) = A'$ , de sorte que  $A' \in BX$ ; on conclut alors grâce à 1- .

3- On a évidemment  $b_X \leq \text{card } X$  et aussi  $b_X = b_{\text{card } X}$  .

4- Pour tout  $X$  et tout  $Y$ , la relation  $b_X \leq \text{card } Y$  entraîne  $b_X \leq b_Y$ : en effet, soit  $A \subset X$ , avec  $A \in BX$ , de sorte que  $\text{card } A \leq \text{card } Y$ ; il existe donc une injection  $j: A \rightarrow Y$  et puis une application  $f: X \rightarrow Y$  telle que  $f(A) = j(A)$ . Alors comme  $f(A) \in BY$  on a  $\text{card } A = \text{card } f(A) \leq b_Y$ .

5- Si  $\text{card } X \leq \text{card } Y$ , alors  $b_X \leq b_Y$ : cela résulte de 3- et 4- .

6- Pour tout  $X$  on a  $b_{b_X} = b_X$  . En effet, on a  $b_X \leq b_X$  et on conclut grâce à 3- et 4- .

7- Pour tout  $X$  et tout  $Y$ , la relation  $b_X > \text{card } Y$  entraîne l'égalité  $b_Y = \text{card } Y$ . En effet, on a un  $A \in BX$  tel que  $\text{card } A \geq \text{card } Y$ , et donc une surjection  $s: A \rightarrow Y$  et une application  $f: X \rightarrow Y$  avec  $f(A) = Y$ ; et puisque  $f(A) \in BY$ , on a  $b_Y \geq \text{card } Y$ .

8- Si la suite  $(b_X)_{X \in U}$  est non bornée, alors pour tout  $X$  on a l'égalité  $b_X = \text{card } X$  et  $B = P$ . En effet, pour tout  $X$  il existe un  $Y$  tel que  $\text{card } X < b_Y$  et d'après 4- on obtient  $b_X = \text{card } X$ ; pour conclure il suffit de montrer que  $X \in BX$ . A cet effet, avec  $Z = 2^X$  et  $A = \{ \{x\} / x \in X \} \subset Z$ , on a  $\text{card } A = \text{card } X < \text{card } Z$  (d'après Cantor) et puisque  $b_Z = \text{card } Z$  on a  $A \in BZ$ ; alors en prenant  $f: Z \rightarrow X$  une application telle que  $f(A) = X$ , il vient par naturalité  $X \in BX$ .

9- Supposons  $(b_X)_{X \in U}$  bornée et posons  $b = \sup_X b_X$ ; alors pour tout  $X$  on a  $b_X = \inf(b, \text{card } X)$ . En effet, puisque  $b_X \leq b$ , on a tout d'abord  $b_X \leq b_b \leq b$  et donc  $b_b = b$  (d'après 4-). Ensuite:

- si  $b > \text{card } X$ , avec 7- on trouve que  $b_X = \text{card } X$ , donc  $\inf(b, \text{card } X) = b_X$ ,

- si  $b = \text{card } X$ , alors  $b_b = b = \text{card } X$  et alors  $b_X = b_{\text{card } X} = b_b = b$ ,

- si  $b < \text{card } X$ , alors  $b = b_b \leq b_{\text{card } X} = b_X \leq b$ , et la formule est bien établie dans tous les cas.

10- Pour achever la preuve, on distingue deux cas:

1<sup>er</sup> cas:  $B(b) = P(b)$ . Alors pour tout  $X$ , si on a un  $A \subset X$  tel que  $\text{card } A = b$ , on a une bijection  $h: b \rightarrow A$  et une application  $f: b \rightarrow X$  telle que  $f(b) = A$ , et donc  $A \in BX$ , si bien que  $BX = P^{(b)}X$ .

2<sup>ème</sup> cas:  $B(b) \neq P(b)$ . Si l'on avait un  $X$  et un  $A \subset X$ , avec  $\text{card } A = b$  et  $A \in BX$ , on aurait un isomorphisme  $h: A \rightarrow b$  et une application  $f: X \rightarrow b$  telle que  $f(A) = b$ , ce qui contredirait l'hypothèse.

(à suivre ...)

---