CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JACQUES PENON

# Construction d'infinitésimaux

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 35, n° 4 (1994), p. 339-349

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1994__35_4_339_0>

*CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES*

***Volume XXXV-4 (1994)***

# CONSTRUCTION D'INFINITESIMAUX

*par Jacques PENON*

**ABSTRACT.** This paper develops a 'standard' construction to add infinitesimals to a topological situation, in a way such that they allow to describe all the local properties. This construction is based on the concept of A-ringed spaces introduced by Dubuc, and it englobes most of the models of Synthetic Differential Geometry.

## Introduction.

Nous cherchons une construction "standard" susceptible de regrouper, comme exemples, la plupart des modèles de la Géométrie Différentielle Synthétique. C'est le concept de "A-ringed spaces", introduite par E. Dubuc dans "Analytic rings" (voir [1]) qui, en le transposant dans un contexte suffisamment général, nous a permis une telle construction. En fait, celle-ci est de portée plus générale puisque, à partir d'une situation topologique donnée, elle y ajoute des infinitésimaux, et même en quantité suffisante pour leur permettre de décrire les propriétés locales de l'ancienne situation topologique. Bien entendu cela n'est pas sans rappeler les méthodes utilisées par l'analyse non-standard bien que celles-ci diffèrent sur quelques points essentiels. Dans ce présent article nous resterons dans une problématique topologique, préférant laisser l'application à la géométrie différentielle synthétique pour un article ultérieur.

## 1. Les situations topologiques.

**Définition.** J'appelle *situation topologique* la donnée **S** :

- d'une catégorie $S$,
- d'une classe de mono $U$ (les éléments de $U$ sont appelés *ouverts élémentaires*),
- d'un foncteur Pt: $S \to Ens$,

ces trois données étant soumises aux conditions suivantes:

(C) $S$ est cartésienne (i.e. a des produits finis et un objet final).

(U0) $U$ contient Iso($S$) la classe des isomorphismes de $S$.

(U1) $U$ est stable par composition.

(U2) les flèches de $U$ sont carrables et stables par changement de base (i.e. pour tout ouvert élémentaire U $\rightarrowtail$ X et toute flèche Y $\to$ X le produit fibré suivant existe

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, tail] & U \arrow[d, tail] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd} .$$

et le mono V >→ Y est lui-même un ouvert élémentaire).

(P1) Pt préserve les produits fibrés et l'objet final.

(P2) Pt préserve les produits fibrés le long d'ouverts élémentaires.

(P3) Si U >→ S×S' est un ouvert élémentaire, il existe une famille de couples d'ouverts élémentaires $(U_i \rightarrowtail S, U'_i \rightarrowtail S')_i$ telle que:

$$(\mathrm{Pt}(U) \rightarrowtail \mathrm{Pt}(S\times S')) = \cup_i(\mathrm{Pt}(U_i\times U'_i) \rightarrowtail \mathrm{Pt}(S\times S')).$$

(R) Si $(U_i \rightarrowtail S)_i$ est une famille d'ouverts élémentaires telle que la famille $(\mathrm{Pt}(U_i) \rightarrowtail \mathrm{Pt}(S))_i$ est surjective, alors $(U_i \rightarrowtail S)_i$ est épimorphe effective dans *S*.

**Remarques.** - Le foncteur Pt envoie les ouverts élémentaires sur des monos (à cause de (P2)).

- Si le composé de monos U >→ Z >→ S est un ouvert élémentaire, alors U >→ Z est encore un ouvert élémentaire (à cause de (U2)).

- Si U >→ S et U' >→ S sont deux ouverts élémentaires pour lesquels

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{Pt}U \rightarrowtail \mathrm{Pt}S) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{Pt}U' \rightarrowtail \mathrm{Pt}S),$$

alors les deux ouverts sont égaux (égalité des sous-objets) (on utilise principalement l'axiome (R)).

**Cas particulier.** 1. Soit *C* une catégorie cartésienne satisfaisant en plus les trois conditions suivantes:

- *C* a un objet initial strict O,
- Si S×S' ≅ O, alors S ≅ O ou S' ≅ O,
- La flèche O → 1 n'est pas un isomorphisme.

Posons $U = Iso(C)\cup N(C)$ où $N(C)$ est la classe des flèches qui sont de la forme S' → S, où S' ≅ O. Soit aussi Pt: *C* → *Ens* le foncteur défini par:

$$\mathrm{Pt}(S) = \varnothing^{\mathrm{Hom}(S,O)}$$

(en fait Pt(S) = ∅ si S ≅ O et Pt(S) ≅ 1 sinon). On voit facilement que *C* muni de *U* et Pt est une situation topologique.

2. Soit *C* une catégorie cartésienne. Ajoutons-lui un objet initial et notons *C*^ la catégorie obtenue. Alors *C*^ satisfait les conditions du (1) avec Pt(S) ≅ 1 pour tout objet S de *C*.

**Exemples.** 1. Toutes les théories algébriques de Lawvere (par le cas particulier 2).

2. *Top,* on prend pour *U* la classe des injections continues ouvertes et pour Pt le foncteur d'oubli usuel.

3. La catégorie $C^k$ ($1 \leq k \leq \infty$) qui a: pour objets les ouverts de $\mathbf{R}^n$ ($n$ variable), pour flèches les applications de classe $C^k$ entre ces ouverts. On prend pour $U$ la classe des flèches de $C^k$ formée des immersions ouvertes. Pt est le foncteur d'oubli usuel.

4. La catégorie $H$ ayant pour objets les ouverts de $\mathbf{C}^n$ pour flèches les applications holomorphes entre ces ouverts. $U$ est la classe des flèches de $H$ formée des immersions ouvertes, et Pt est encore le foncteur d'oubli usuel.

## 2. Constructions de base.

*1.Les catégories* Fais(S).

Donnons-nous une fois pour toute une situation topologique $S$.

= S étant un objet de $S$ on munit l'ensemble Pt(S) de la topologie engendrée par les sous-ensembles de la forme Pt(U) $\rightarrowtail$ Pt(S) (on identifie sous-ensemble et sous-objet) où U $\rightarrowtail$ S est un ouvert élémentaire. Notons Sp(S) l'espace topologique obtenu. En fait Sp(S) a pour ouverts des réunions d'ouverts de la forme ci-dessus. Si $f$ : S $\to$ S' est une flèche de $S$, l'application Pt($f$): Pt(S) $\to$ Pt(S') est en fait continue de Sp(S) vers Sp(S').

= Par ailleurs notons $P$(S) l'ensemble ordonné des sous-objets ouverts élémentaires de S. Munissons $P$(S) de la topologie de Grothendieck définie par :

$$\left(\begin{tikzcd} U_\iota \arrow[rr, tail] \arrow[dr, tail] & & U \arrow[dl, tail] \\ & S & \end{tikzcd}\right)_\iota$$

est couvrante ssi $(\mathrm{Pt}(U_\iota) \rightarrowtail \mathrm{Pt}(U))_\iota$ est surjective, et notons Fais(S) le topos de faisceaux sur le site $P$(S) obtenu. Alors

$$\mathrm{Fais(S)} \cong \mathrm{Fais(Sp(S))}.$$

(On montre que les ensembles ordonnés des sous-objets de 1 des deux topos sont isomorphes et pour cela on utilise essentiellement l'axiome (R).)

*2. Les foncteurs* $O_S$.

= S étant un objet fixé de $S$, on construit pour chaque Z $\in |S|$ un objet $O_S(Z) \in$ |Fais(S)| en posant pour chaque ouvert élémentaire U $\rightarrowtail$ S :

$$\Gamma(U, O_S(Z)) = \mathrm{Hom}_S(U, Z)\ .$$

On prolonge cette construction en un foncteur $O_S$: $S \to$ Fais(S). $O_S$ préserve les limites finies et envoie les familles couvrantes sur des familles épimorphes effectives.

= Si $f$ : S' $\to$ S est une flèche de $S$, on construit une tranformation naturelle $f^{\#}$: $O_S \to \underline{f}_* O_{S'}$ (où $\underline{f}$ = Sp($f$) ) en posant, pour chaque ouvert élémentaire U $\rightarrowtail$ S:

$$\Gamma(\mathrm{U}, O_{\mathrm{S}}(\mathrm{Z})) \rightarrow \Gamma(f^{-1}\mathrm{U}, O_{\mathrm{S'}}(\mathrm{Z})) = \Gamma(\mathrm{U}, f_* O_{\mathrm{S'}}(\mathrm{Z})) : \phi \mapsto \phi \circ f'$$

où $f' : f^{-1}\mathrm{U} \rightarrow \mathrm{U}$ est la restriction de $f$.

*3. Les foncteurs $C_{\mathrm{X}}$.*

Par ailleurs, on construit, pour chaque espace topologique X et chaque objet Z de $S$, un objet $C_{\mathrm{X}}(\mathrm{Z})$ dans $|\mathrm{Fais(X)}|$ en posant, pour chaque ouvert U de X :

$$\Gamma(\mathrm{U}, C_{\mathrm{X}}(\mathrm{Z})) = \mathrm{Hom}_{Top}(\mathrm{U}, \mathrm{Sp(Z)}).$$

De même, on prolonge cette construction en un foncteur $C_{\mathrm{X}} : S \rightarrow \mathrm{Fais(X)}$. Ce foncteur préserve les produits finis (et donc l'objet final) et les produits fibrés le long d'ouverts élémentaires. De plus il envoie les familles d'ouverts élémentaires $(\mathrm{U}_\iota \rightarrowtail \mathrm{S})_\iota$ telles que $\mathrm{Pt(S)} = \cup_\iota \mathrm{PtU}_\iota$ sur des familles épimorphes.

De même si $f : \mathrm{X'} \rightarrow \mathrm{X}$ est une application continue, on construit une transformation naturelle $f^{\#} : C_{\mathrm{X}} \rightarrow f_* C_{\mathrm{X'}}$ en posant, pour chaque ouvert U de X :

$$\Gamma(\mathrm{U}, C_{\mathrm{X}}(\mathrm{Z})) \rightarrow \Gamma(f^{-1}\mathrm{U}, C_{\mathrm{X'}}(\mathrm{Z})) = \Gamma(\mathrm{U}, f_* C_{\mathrm{X'}}(\mathrm{Z})) : \phi \mapsto \phi \circ f'$$

où $f' : f^{-1}\mathrm{U} \rightarrow \mathrm{U}$ est la restriction de $f$.

*4. Les transformations naturelles $l_{\mathrm{S}}$.*

On peut "connecter" les deux constructions précédentes dans le cas où X = Sp(S). En effet:

= Pour chaque objet S de $S$, on construit la transformation naturelle $l_{\mathrm{S}} : O_{\mathrm{S}} \rightarrow C_{\mathrm{SpS}}$ en posant, pour chaque ouvert élémentaire $\mathrm{U} \rightarrowtail \mathrm{S}$ :

$$\Gamma(\mathrm{U}, O_{\mathrm{S}}(\mathrm{Z})) \rightarrow \Gamma(\underline{\mathrm{U}}, C_{\mathrm{SpS}}(\mathrm{Z})) : \phi \mapsto \mathrm{Sp}\phi \qquad (\text{où } \underline{\mathrm{U}} = \mathrm{Pt(U)}).$$

= Si $f : \mathrm{S'} \rightarrow \mathrm{S}$ est une flèche de $S$, le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd} O_{\mathrm{S}} \arrow[r, "f^{\#}"] \arrow[d, "l_{\mathrm{S}}"'] & f_* O_{\mathrm{S'}} \arrow[d, "f_* l_{\mathrm{S'}}"] \\ C_{\underline{\mathrm{S}}} \arrow[r, "\underline{f}^{\#}"] & \underline{f}_* C_{\underline{\mathrm{S}}'} \end{tikzcd} \quad \text{ou encore} \quad \begin{tikzcd} f^* O_{\mathrm{S}} \arrow[r, "f^{b}"] \arrow[d, "f^* l_{\mathrm{S}}"'] & O_{\mathrm{S'}} \arrow[d, "l_{\mathrm{S'}}"] \\ \underline{f}^* C_{\underline{\mathrm{S}}} \arrow[r] & C_{\underline{\mathrm{S}}'} \end{tikzcd}$$

en notant $\underline{\mathrm{S}} = \mathrm{SpS}$, $\underline{f} = \mathrm{Sp}f$ et $f^b$, $\underline{f}^b$ les transformations naturelles déduites de $f^{\#}$ et $\underline{f}^{\#}$ par les adjonctions $f^* \dashv f_*$ et $\underline{f}^* \dashv \underline{f}_*$ .

= Les trois transformations naturelles $l_S$, $f^b$, $\phi^b$ où $f$: S' $\to$ S est dans $S$, $\phi$: X' $\to$ X dans *Top*, ont la propriété énoncée dans la définition:

**Définition.** Très généralement, si $C$ est une catégorie quelconque et si F, F': $S \to C$ deux foncteurs parallèles et $t$: F $\to$ F' une transformation naturelle, on dit que *t est locale* si, pour tout ouvert élémentaire U $>\!\!\to$ S, le carré suivant est un produit fibré:

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "t_U"] \arrow[d] & F'(U) \arrow[d] \\ F(S) \arrow[r, "t_S"] & F'(S) \end{tikzcd} .$$

**Preuve du résultat ci-dessus.** On le montre fibre à fibre *pour* $f^b$ et $\phi^b$ en remarquant que ${f^b}_p : \phi|\underline{f}p \mapsto \phi|\underline{f}p \cdot f|p$.

## 3. Les géométries sur $S$.

Comme nous l'avons dit dans l'Introduction, notre but est d'élargir la catégorie $S$ en un topos possédant "suffisamment d'infinitésimaux". Mais avant d'obtenir ce topos, il nous faut construire un site dans lequel $S$ puisse se plonger. Les objets de ce site sont des structures sur $S$ que nous appellerons "géométries". Celles-ci sont définies en généralisant les constructions précédentes.

*1. Définition des géométries.*

On appelle *géométrie* sur $S$ la donnée $E$:
- d'un espace topologique $\underline{E}$,
- d'un foncteur $O_E$: $S \to$ Fais($\underline{E}$) préservant les produits,
- d'une transformation naturelle locale $l_E$: $O_E \to C_{\underline{E}}$.

**Remarque.** Comme $C_{\underline{E}}$, nous l'avons vu, préserve les produits fibrés le long d'ouverts élémentaires et les familles couvrantes, $O_E$ a ces mêmes propriétés car $l_E$ est locale.

**Exemples.** a) Si S est un objet de $S$, le triplet (Sp(S), $O_S$, $l_S$) définit une géométrie sur $S$, notée $Sp$(S).

b) Si X est un espace topologique, le triplet (X, $C_X$, $\mathrm{Id}_{C_X}$) définit aussi une géométrie sur $S$, notée Gé(X).

*Un morphisme entre géométries* $f$: $E' \to E$ est la donnée:
- d'une application continue $\underline{f}$ : $\underline{E}' \to \underline{E}$,
- d'une transformation naturelle $f^b$: $\underline{f}^*O_E \to O_{E'}$ rendant le carré suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \underline{f}^*O_E & \xrightarrow{\underline{f}^b} & O_{E'} \\ {\scriptstyle \underline{f}^*l_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_{E'}} \\ \underline{f}^*C_{\underline{E}} & \xrightarrow{\underline{f}^b} & C_{\underline{E}'} \end{array}$$

**Remarque.** $f^b$ est toujours locale car c'est le cas pour $l_{E'}$, $\underline{f}^b$ et $\underline{f}^*l_E$.

**Exemples.** a) Si $f$: S' $\to$ S est une flèche de $S$ elle définit un morphisme

$$Sp(f) = (\mathrm{Sp}(f), f^b)\colon (Sp(\mathrm{S}') \to Sp(\mathrm{S})).$$

b) Si $\phi$: X' $\to$ X est continue, elle définit aussi de façon évidente un morphisme Gé($\phi$): Gé(X') $\to$ Gé(X).

*2. Propriétés des géométries.*

= Les géométries et leurs morphismes définissent en fait une catégorie, notée *Géo(S)*. De plus les familles d'exemples a et b définissent des foncteurs:

$$Sp\colon S \to Géo(S), \qquad \text{Gé}\colon Top \to Géo(S).$$

= *Sp* a la propriété suivante:

**Lemme (à la Yoneda).** *E étant une géométrie et* S *un objet de S, on a la bijection suivante, naturelle en E et* S *:*

$$\mathrm{Hom}(E, Sp(\mathrm{S})) \to \Gamma(\underline{E}, O_E(\mathrm{S})).$$

**Preuve.** L'application $\mathrm{Hom}(E, Sp(\mathrm{S})) \to \Gamma(\underline{E}, O_E(\mathrm{S}))$ est définie par $f \mapsto a_f$ où $a_f$ est l'image de $\mathrm{Id}_\mathrm{S}$ par

$$S(\mathrm{S},\mathrm{S}) = \Gamma(\mathrm{S}, O_\mathrm{S}(\mathrm{S})) \xrightarrow{\Gamma(\mathrm{S}, f^\#(\mathrm{S}))} \Gamma(\mathrm{S}, \underline{f}_*O_E(\mathrm{S})) = \Gamma(\underline{E}, O_E(\mathrm{S})).$$

L'application inverse $\Gamma(\underline{E}, O_E(\mathrm{S})) \to \mathrm{Hom}(E, Sp(\mathrm{S}))$ est définie par $a \mapsto (\underline{a}, a^b)$, où $\underline{a}$ est l'image de $a$ par l'application

$$\Gamma(\underline{E}, O_E(\mathrm{S})) \xrightarrow{\Gamma(\underline{E}, l_E(\mathrm{S}))} \Gamma(\underline{E}, C_{\underline{E}}(\mathrm{S})) \to \mathrm{Hom}_{Top}(\underline{E}, \mathrm{Sp}(\mathrm{S})),$$

et où $a^\#\colon O_\mathrm{S} \to \underline{a}_*O_E$ est donnée par

$$\Gamma(\mathrm{U}, a^\#(\mathrm{Z}))(\phi) = \Gamma(\underline{a}^{-1}\underline{\mathrm{U}}, O_E(\phi))(a')$$

en écrivant $a'$: $\underline{a}^{-1}\underline{U} \to O_E(U)$ pour la restriction de $a$.

En particulier :
1. $Sp$: $S \to Géo(S)$ est pleinement fidèle.
2. Le foncteur $Sp$ préserve les produits et les produits fibrés le long des ouverts élémentaires (car c'est le cas de tous les foncteurs $O_E$: $S \to$ Fais($\underline{E}$)).

= a) Le foncteur Gé: $Top \to Géo(S)$ est l'adjoint à gauche du foncteur $Géo(S) \to Top$, $E \mapsto \underline{E}$. De plus

b) Le foncteur $Géo(S) \to Top$ est fibrant. Ses morphismes cartésiens sont les morphismes $f: E' \to E$ tels que $f^b$: $\underline{f}^*O_E \to O_{E'}$ est un isomorphisme.

En particulier si Y est un sous-espace topologique de $\underline{E}$ , alors le monomorphisme $E|Y \rightarrowtail E$ est cartésien, où $E|Y = (Y, i^*O_E, i^b.i^*l_E)$ (en notant $i$ : Y $\to \underline{E}$ l'injection canonique).

= La catégorie $Géo(S)$ a les limites suivantes:

**a) Proposition.** *$Géo(S)$ a des égalisateurs.*

**Preuve.** Avant de le montrer, faisons une légère digression: **E** étant un topos de Grothendieck, notons Mod(**E**) la catégorie des "modèles" de $S$ dans **E**, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine de $\mathbf{E}^S$ ayant pour objets les foncteurs préservant les produits finis. Soit maintenant M un modèle de $S$ dans **E**. Notons $\mathrm{Loc}_M(\mathbf{E})$ la sous-catégorie pleine de Mod(**E**)/M ayant pour objets les transformations naturelles locales de but M.

**Lemme.** *1.* $\mathrm{Loc}_M(\mathbf{E})$ *est à limites finies et celles-ci sont préservées par l'inclusion* $\mathrm{Loc}_M(\mathbf{E}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{E})/M$.

*2.* $\mathrm{Loc}_M(\mathbf{E})$ *a des coégalisateurs.*

*3. Si $g$:* $\mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ *est un morphisme géométrique, le foncteur image inverse $g^*$ définit un foncteur, noté encore $g^*$:*

$$g^*\colon \mathrm{Loc}_M(\mathbf{E}) \to \mathrm{Loc}_{g^*M}(\mathbf{E}') .$$

*Ce foncteur admet un adjoint à droite.*

*4. Si $f$ :* M $\to$ M' *est un morphisme local dans* Mod(**E**), *alors le foncteur de composition $\Sigma f$:* $\mathrm{Loc}_M(\mathbf{E}) \to \mathrm{Loc}_{M'}(\mathbf{E})$ *admet un adjoint à droite.*

Revenons à la preuve de la proposition. Soit $u,v$: $E \to F$ un couple de morphismes dans $Géo(S)$. Notons $\underline{E}'$ l'égalisateur de $\underline{u}$, $\underline{v}$: $\underline{E} \to \underline{F}$ dans $Top$, $\underline{i}$: $\underline{E}' \to \underline{E}$ l'inclusion canonique et $\underline{k} = \underline{u}.\underline{i} = \underline{v}.\underline{i}$ . On considère le coégalisateur $i^b$: $\underline{i}^*O_E \to O_{E'}$ de la paire de flèches:

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{i}^*\underline{u}^*O_F \arrow[dr, "\underline{i}^*u^b"] & \\
\underline{k}^*O_F \arrow[ur, dash, "\sim"] \arrow[dr, dash, "\sim", "\underline{i}^*v^b"'] & & \underline{i}^*O_E \\
 & \underline{i}^*\underline{v}^*O_F \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

dans $\mathrm{Loc}_M(\mathrm{Fais}(\underline{E}'))$ où $M = C_{\underline{E}'}$. On construit ainsi une géométrie $E'$ et un morphisme $i$: $E' \to E$ qui est l'égalisateur cherché. (Pour la vérification de la propriété universelle, on utilise les parties 3 et 4 du Lemme.)

b) **Proposition.** *Les sous-géométries sont des monomorphismes carrables et stables par changement de base dans Géo(S).*

**Preuve.** On se replace dans le contexte précédent.

**Lemme**. *Les épimorphismes effectifs dans* $\mathrm{Loc}_M(\mathbf{E})$ *sont co-carrables et stables par changement de co-base.*

(Résulte des Lemmes 1 et 2 et de la Proposition précédente.)

Revenons à la preuve de la Proposition. Considérons $f$: $E \to F$ dans *Géo*(**S**) et une sous-géométrie $i$: $F' \rightarrowtail F$. Posons $\underline{E}' = \underline{f}^{-1}(\underline{F}')$ (muni de la topologie induite de celle de $\underline{E}$ ) et $\underline{i}'$: $\underline{E}' \rightarrowtail \underline{E}$ l'inclusion canonique. $O_{E'}$ est défini par la somme amalgamée dans $\mathrm{Loc}_M(\mathrm{Fais}(\underline{E}'))$ (où $M = C_{\underline{E}'}$)

$$\begin{tikzcd}
\underline{i}'^*\underline{f}^*O_F \arrow[r, "\underline{i}'^*f^b"] \arrow[d, "\underline{f}'^*i^b"'] & \underline{i}'^*O_{E'} \arrow[d, "i^b"] \\
\underline{f}'^*O_{F'} \arrow[r, "\underline{f}'^b"] & O_{E'}
\end{tikzcd}$$

(On utilise, là encore, les parties 3 et 4 du Lemme de a.)

= Une sous-géométrie $i$: $E' \to E$ est dite *ouverte* si elle est cartésienne et si $\underline{i}$ est ouverte. Les sous-géométries ouvertes sont stables par changement de base. De plus une famille de sous-géométries ouvertes $(E'_i \rightarrowtail E)_i$ est épimorphe effective et universelle dans *Géo(S)* si $\underline{E} = \cup_i \underline{E}'_i$ . Enfin si U $\rightarrowtail$ S est un ouvert élémentaire, alors *Sp*(U) $\to$ *Sp*(S) est ouverte.

*3. Le topos* **Géo**(*S*).

La catégorie *Géo(S)* n'ayant pas (semble-t-il) de produits, on va lui préférer la sous-catégorie pleine *Géop(S)* des géométries *présentables*, c'est-à-dire des sous-géométries d'une géométrie de la forme Sp(S).

Si $E_1 \rightarrowtail Sp(S_1)$ et $E_2 \rightarrowtail Sp(S_2)$ sont des géométries présentables, alors

$$E_1 \times E_2 = (\pi_1^{-1}(E_1) \cap \pi_2^{-1}(E_2) \rightarrowtail Sp(S_1 \times S_2)) \quad \text{où} \quad \pi_i = Sp(S_1 \times S_2 \to S_i).$$

A partir de ce résultat on voit facilement que *Géop(S)* est une catégorie à limites projectives finies. On en fait un site en la munissant de la topologie dont les familles couvrantes sont les "recouvrements ouverts" (Lemme). Notons **Géo**($S$) le topos sur ce site. On a les plongements pleinement fidèles:

$$S \xrightarrow{Sp} Géop(S) \xrightarrow{\text{Yoneda}} \mathbf{Géo}(S).$$

Il préserve les produits et les produits fibrés le long d'ouverts élémentaires.

## 4. Le théorème d'inversion locale.

= Comme nous l'avons dit dans l'introduction, le topos **Géo**($S$) fournit aux objets de $S$ des "infinitésimaux" et ce, en quantité suffisante pour permettre de décrire les propriétés locales de $S$. Un exemple significatif est le théorème d'inversion locale. Par cette appellation nous entendons un théorème de portée beaucoup plus générale que celle de son homologue classique donnant des conditions d'inversion infinitésimale pour permettre en fin de compte des inversions locales.

= On suppose que $\mathrm{Pt} = \Gamma = \mathrm{Hom}_S(1, -)$. Montrons qu'étant donné un point $p$ d'une géométrie présentable $E$, le double complémentaire du morphisme $\{p\} \rightarrowtail E$ dans le topos **Géo**($S$) "classifie" les germes de flèches au point $p$. Plus précisément montrons la bijection naturelle en $\mathrm{S} \in |S|$ suivante:

$$\mathrm{Hom}(\neg\neg\{p\}, \mathrm{S}) \cong O_{E,p}(\mathrm{S}).$$

**Preuve.** Procédons par étapes:
- On remarque tout d'abord que $\mathrm{Géo}(1) \cong Sp(1) \cong 1$ où 1 désigne successivement l'objet final dans *Top*, $S$ et *Géop(S)*.
- Pour tout objet $E$ de *Géop(S)* on a:

$$\mathrm{Hom}_{Géop(S)}(1, E) = \mathrm{Hom}_{Géo(S)}(1, E) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Gé}(1), E) \cong \mathrm{Hom}_{Top}(1, \underline{E}) \cong \underline{E}.$$

- *Géop(S)* est un site concret (voir [2], Chapitre II, §2) (ceci résulte immédiatement des propriétés de *Géo(S)* énoncées précédemment).
- Si P est contenu dans $\underline{E}$, alors $\mathrm{E}(E,\mathrm{P}) = E|\mathrm{P}$ (pour la notation $\mathrm{E}(E,\mathrm{P})$ voir toujours [2], Chapitre II, §2). Donc si $\mathrm{P} \rightarrowtail E$ est cette fois un sous-objet de $E$ dans le topos **Géo**($S$), on a:

$$\neg\neg P = E|\Gamma P \quad \text{où} \quad \Gamma P = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Géo}(S)}(1, P).$$

- Dans le cas particulier d'un point $p\colon 1 \to E$ on a donc $\neg\neg\{p\} = E|\{p\}$ .
- Finalement on a les bijections naturelles suivantes:

$$\mathrm{Hom}_{Géo(S)}(\neg\neg\{p\},S) \cong \mathrm{Hom}_{Géo(S)}(E|\{p\}, S) \cong \Gamma(\{p\},O_{E|\{p\}}(S)) \cong O_{E|\{p\}}(S) \cong O_{E,p}(S)\,.$$

= Soit maintenant $f\colon$ S $\to$ S' une flèche de $S$. On note encore $f$ son image dans **Géo**($S$). Alors:

**Théorème.** *On a l'équivalence suivante :*

$$\mathrm{Géo}(S) \models \forall\, x \in S\ (\neg\neg\{x\} \to \neg\neg\{fx\}\ \textit{bijectif}) \quad (*)$$

*ssi*

*Pour tout point p de* $\Gamma$S, *il existe un ouvert élémentaire* U' $\rightarrowtail$ S' *tel que f.p* appartienne à $\Gamma$U' *et une flèche g:* U' $\to$ S' *pour laquelle*

$$g|fp \,.\, f|p = \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad f|p \,.\, g|fp = \mathrm{Id}\,.$$

[L'écriture "**Géo**(S) |= ..." signifie "la formule ... est valide dans le topos **Géo**($S$)". Rappelons aussi que $\forall\, x \in$ S (...) est une formule du langage interne au topos **Géo**($S$). ]

**Preuve.** L'hypothèse (*) signifie que:
- Le carré suivant est un produit fibré dans **Géo**($S$) :

$$\begin{tikzcd}
\neg\neg_{S^2}(D_S) \arrow[r] \arrow[d, tail] & \neg\neg_{S'^2}(D_{S'}) \arrow[d, tail] \\
S^2 \arrow[d, "pr_1"'] & S'^2 \arrow[d, "pr_1"] \\
S \arrow[r, "f"] & S'
\end{tikzcd}$$

(où $D_S$ est la diagonale de S), ou encore que:
- La flèche $\neg\neg_{S^2}(D_S) \to \neg\neg_{S'^2}(\mathrm{Gr}(f))$ est un isomorphisme (où Gr($f$) est le graphe de $f$ et la flèche considérée est la restriction de Id$\times f$: $S^2 \to S\times S'$ ), ou encore que:

- La flèche $Sp(S^2)|D_{\underline{S}} \to Sp(S\times S')|_{\mathrm{Gr}(f)}$ restriction de $Sp(\mathrm{Id}\times f)$ est un isomorphisme dans *Géo(S).* Si on note $\phi$ cette flèche, alors $\underline{\phi}$: $D_{\underline{S}} \to \mathrm{Gr}(f)$ est toujours un homéomorphisme et on peut identifier $D_{\underline{S}}$ et Gr($f$) à $\underline{S}$. Alors $\phi$ est un isomorphisme ssi:
- La flèche $\phi^b\colon g^*O_{S\times S'} \to \underline{d}^*O_{S^2}$ est un isomorphisme dans Mod(Fais($\underline{S}$)), où $\phi^b$ est en fait le composé suivant:

$$g^*O_{S\times S'} \to \underline{d}^*(\mathrm{Id}\times f)^*O_{S\times S'} \xrightarrow{d^*(\mathrm{Id}\times f)^b} \underline{d}^*O_{S^2}$$

avec

$$d = (\mathrm{Id},\mathrm{Id})\colon S \to S^2 \qquad \text{et} \qquad g = (\mathrm{Id}, f)\colon S \to S\times S'.$$

Cette flèche est un isomorphisme ssi c'est le cas fibre à fibre. Ainsi la condition (*) est satisfaite ssi:
- Pour tout point $p$ de $\underline{S}$ la flèche $(\mathrm{Id}\times f)^b{}_{(p,p)}\colon O_{S\times S',(p,fp)} \to O_{S^2,(p,p)}$ est un isomorphisme dans Mod(*Ens*). Mais on montre facilement que, d'une façon générale, pour toute flèche $f$ : $S \to Z$ dans $S$, la flèche $f_p{}^b\colon O_{Z,fp} \to O_{S,p}$ est un isomorphisme en un point $p$ dans $\underline{S}$ ssi il existe un élément $g|fp$ de $O_{Z,fp}(S)$ tel que $g|fp.\, f|p = \mathrm{Id}|p$ et $f|p.g|fp = \mathrm{Id}|fp$ .La condition (*) est donc satisfaite ssi:
- Pour tout $p$ dans $\underline{S}$, il existe $G|(p,fp)$ dans $O_{S\times S',(p,fp)}(S^2)$ tel que:

$$G|(p,fp).(\mathrm{Id}\times f)|(p,p) = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad (\mathrm{Id}\times f)|(p,p).G|(p,fp) = \mathrm{Id}.$$

On montre alors, par des manipulations catégoriques simples, que cette condition est équivalente à celle cherchée.

## 5. Le cas particulier des catégories cartésiennes. (Voir le §1, Cas particulier)

Considérons une catégorie cartésienne $C$. On a la caractérisation

$$\mathbf{Géo}(C^{\sim}) \cong (\mathrm{Mod}_f(C))^{\wedge}$$

où:
- $C^{\sim}$ est la situation topologique construite au §1,
- la notation $C^{\wedge}$ désigne la catégorie $Ens^{C^{op}}$ des préfaisceaux dans $C$,
- $\mathrm{Mod}_f(C)$ désigne la catégorie des modèles de type fini de $C$

**Preuve.** - On remarque déjà que, pour tout espace topologique X,

$$\mathrm{Mod}_C(\mathrm{Fais}(X)) \cong Géo_X(C^{\sim}),$$

où $\mathrm{Mod}_C(\mathrm{Fais}(X))$ désigne la catégorie des modèles de $C$ dans Fais(X) et $Géo_X(C^{\sim})$ est la fibre au-dessus de X de la catégorie fibrée $Géo(C^{\sim})$.
- On montre ensuite que $Géop(C^{\sim}) \cong (\mathrm{Mod}_f(C))^{\sim}$, d'où finalement le résultat cherché.

## Bibliographie.

1. E. DUBUC, *Analytic Rings*, Trabajos de Matematica 40, I.A.M. Buenos Aires, 1982.
2. J. PENON, *De l'infinitésimal au local*, Thèse Université Paris VII, 1985.

U.F.R. de Mathématiques
Université Paris VII, Tours 45-55, 4e étage
2 Place Jussieu, 75005 PARIS