CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

J. PENON

Logique de la géométrie algébrique

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 33, nº 3 (1992), p. 277-278

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_277_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

VOLUME XXXIII
3ème trimestre 1992

Logique de la Géométrie Algébrique

J. Penon[1]

ABSTRACT : Topoi of algebraic geometry do satisfy a stronger property than Kock's field's axiom.

Désignons par $\mathcal{A}$ l'une des deux catégories suivantes :

- La catégorie des anneaux commutatifs unitaires,
- La catégorie des anneaux commutatifs unitaires de présentation finie,

et munissons $\mathcal{A}^{op}$ d'une topologie sous-canonique (c.à.d. telle que tout foncteur représentable soit un faisceau).

Dans le topos $\mathbf{E}$ des faisceaux sur le site $\mathcal{A}^{op}$ il y a un objet anneau commutatif unitaire R canonique qui est tout simplement le foncteur d'oubli $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}ns$. De par la nature même de l'objet R on constate qu'étudier le topos $\mathbf{E}$ revient, en grande partie, à étudier les propriétés de l'anneau R.

Lorsque la topologie sur $\mathcal{A}^{op}$ est plus fine que la topologie de Zariski, on sait que R est (internement parlant) un anneau local c'est-à-dire qu'il satisfait les formules :

$$0 \neq 1$$

$$\forall x (x \ \mathit{inversible} \ \vee \ 1 - x \ \mathit{inversible})$$

où "x *inversible*" est une abréviation de la formule $\exists y (y.x = 1)$.

Kock a aussi montré (il y a quelques années) que lorsque dans le site $\mathcal{A}^{op}$ la famille vide couvre l'objet initial, l'anneau R a une structure de corps, c'est-à-dire satisfait les formules :

[1] Université de Paris 7

$$0 \neq 1$$

$$(K_1) \qquad \forall x(x \neq 0 \Rightarrow x \ \ inversible).$$

Lorsque la topologie sur $\mathcal{A}^{op}$ est plus fine que celle de Zariski il a même montré un peu plus (intuitionnistement). L'anneau R satisfait, pour chaque entier $n \geq 1$:

$$(K_n) \quad \begin{array}{l} \forall x_1 ... \forall x_n[\neg(x_1 = 0 \wedge ... \wedge x_n = 0) \Rightarrow \\ \qquad (x_1 \ \ inversible \vee ... \vee x_n \ \ inversible)] \end{array}.$$

Dans cet exposé j'ai montré qu'en fait, pour $n = 1$, et sans condition supplémentaire sur la topologie de $\mathcal{A}^{op}$, R a une propriété un peu plus forte intuitionnistement. Il vérifie :

$$(Div) \qquad \forall x \forall y[(x = 0 \Rightarrow y = 0) \Leftrightarrow \exists z(y = z.x)].$$

Moyennant la condition $0 \neq 1$, on retrouve le fait que R satisfait la formule (K) (en faisant $y = 1$).

Remarquons qu'en logique classique un anneau satisfaisant $0 \neq 1$ est un corps ssi il satisfait (Div).

Plus généralement, pour tous entiers $n, \ \ m \geq 1$, l'anneau R satisfait :

$$(Div_{n,m}) \qquad \forall x \in R^n \forall y \in R^m[(x = 0 \Rightarrow y = 0) \Leftrightarrow \exists M \in R^{mn}(y = Mx)].$$

Lorsque R est local l'axiome $(Div_{n,1})$ entraîne l'axiome (K_n) de Kock.

Remarque :

L'axiome $(Div_{n,m})$ établit une équivalence entre une formule typiquement non-cohérente ; "$x = 0 \Rightarrow y = 0$" et une formule cohérente : "$\exists M \in R^{mn}(y = M.x)$". Il permet donc, comme beaucoup d'autre axiomes du même type, une traduction en langage cohérent de formules non-cohérentes.

Université de Paris 7
Département de mathématiques
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05