

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

Y. LAFONT

Diagrammes de Penrose et réécriture en dimension 2

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 33, n° 3 (1992), p. 267-275

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_267_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Diagrammes de Penrose et réécriture en dimension 2

Y. Lafont¹

ABSTRACT : Albert Burroni proved that the monoidal category \mathbf{N} of finite sets, with disjoint union as tensor product, is finitely presentable. Here we exhibit a canonical rewriting system for \mathbf{N} with 12 rules and 56 critical pairs! It is a step towards the elimination of variables in equational reasoning.

Albert Burroni a démontré que la catégorie monoïdale \mathbf{N} des ensembles finis, avec l'union disjointe comme produit tensoriel, est finiment présentable. Ici nous exhibons un système de réécriture canonique pour \mathbf{N} avec 12 règles et 56 paires critiques! C'est une étape vers l'élimination des variables dans le raisonnement équationnel.

1 Une présentation finie

Soit \mathbf{N} la sous-catégorie pleine de \mathbf{Ens} dont les objets sont les entiers naturels. Si n est un entier naturel, nous écrirons n pour l'identité sur n . L'addition définit un bifoncteur associatif $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ avec 0 comme unité. En tant que catégorie monoïdale stricte, \mathbf{N} est engendrée par l'objet 1 et les trois morphismes suivants:

$$\mu : 2 \rightarrow 1, \quad \eta : 0 \rightarrow 1, \quad \tau : 2 \rightarrow 2 \text{ (transposition).}$$

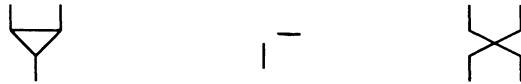
En effet, toute application $\varphi : n \rightarrow m$ est de la forme $\iota \circ \sigma \circ \pi$ où π est une permutation, σ une surjection croissante et ι une injection croissante.

¹Ecole Normale Supérieure. An extended english version of this paper is published in the *Proceedings volume for LMS Symposium on Applications of Categories in Computer Science* (Cambridge University Press, LMS Lecture Notes Series 177).

Notez que, dans cette décomposition, π n'est pas unique, sauf si φ est injective, auquel cas σ est triviale. Maintenant π est elle-même un produit de transpositions qui sont de la forme $p + \tau + q$. De même, σ est un produit d'applications de la forme $p + \mu + q$ et ι est un produit d'applications de la forme $p + \eta + q$. Nos 3 générateurs vérifient les 7 équations suivantes:

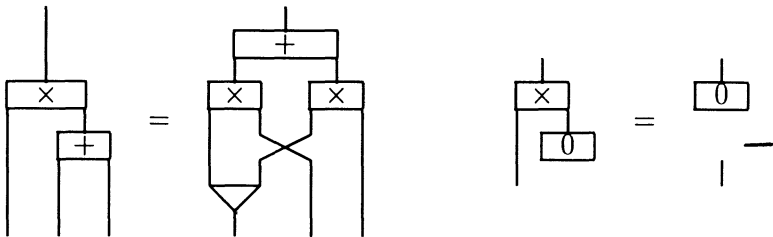
$$\begin{aligned} \mu \circ (\mu + 1) &= \mu \circ (1 + \mu), & \mu \circ (\eta + 1) &= 1, & \mu \circ \tau &= \mu, \\ \tau \circ \tau &= 2, & (\tau + 1) \circ (1 + \tau) \circ (\tau + 1) &= (1 + \tau) \circ (\tau + 1) \circ (1 + \tau), \\ \tau \circ (\mu + 1) &= (1 + \mu) \circ (\tau + 1) \circ (1 + \tau), & \tau \circ (\eta + 1) &= 1 + \eta. \end{aligned}$$

Tout cela s'exprime bien mieux avec des diagrammes dans le style de Penrose, en représentant les 3 générateurs ainsi:



Parmi les 7 équations (figure 1), les trois premières correspondent à des lois d'associativité, d'unité et de commutativité. Les deux suivantes apparaissent implicitement dans la présentation bien connue des groupes de permutations, et aussi, sous une forme légèrement modifiée, des groupes de tresses. Notez aussi que trois de ces équations sont asymétriques, mais leurs images miroir sont déductibles (figure 2).

Albert Burroni a démontré que de ces 7 équations découlent toutes celles qui sont vraies dans \mathbf{N} . Autrement dit, \mathbf{N} est finiment présentable en tant que catégorie monoïdale stricte [Bur91]. Ce résultat est important car \mathbf{N} (en fait sa duale) modélise la gestion des variables dans le raisonnement équationnel. Typiquement, des équations telles que $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ et $x \times 0 = 0$ peuvent être représentées ainsi:



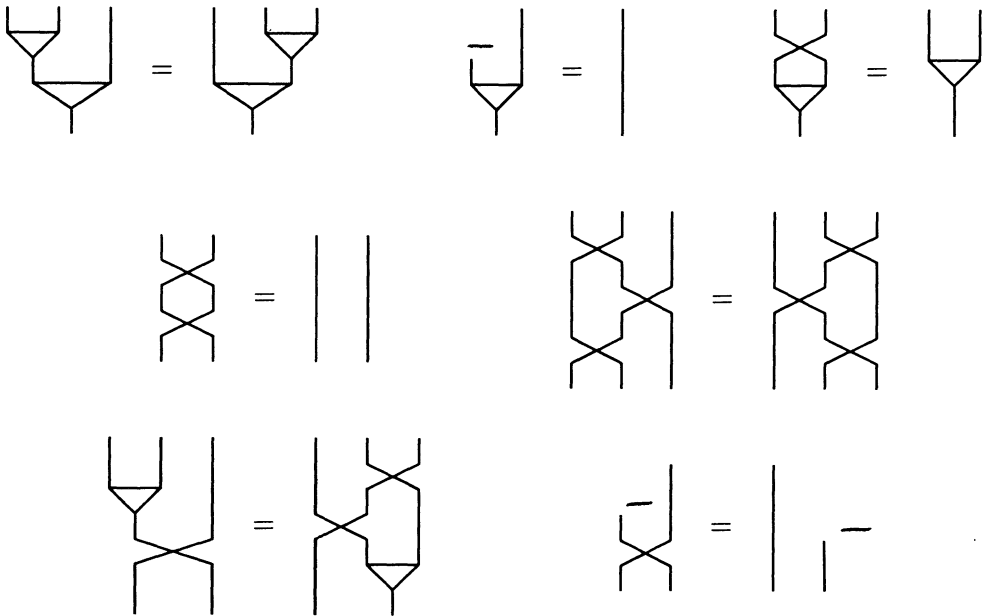


Figure 1 : équations

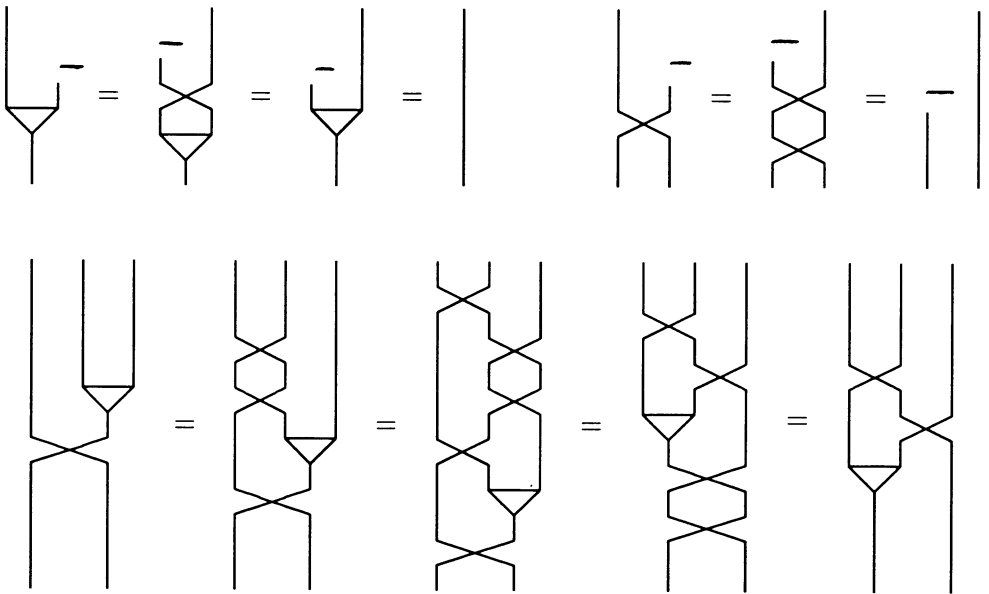


Figure 2 : équations déductibles

Du coup on peut associer à toute théorie équationnelle finie une catégorie monoïdale stricte finiment présentée². Notre but est d'obtenir des résultats analogues pour les systèmes de réécriture.

2 Un Système de réécriture canonique

Le théorème de Knuth-Bendix résoud le problème des mots dans certains monoïdes finiment présentés. L'idée consiste à orienter les équations de telle sorte que le relation de réécriture correspondante soit *noetherienne* et *confluente*. Dans ce cas, deux mots sont équivalents modulo la théorie si et seulement si ils ont la même *forme normale*. La noethérianité implique l'existence de cette forme normale, et la confluence son unicité. En général, on démontre la noetherianité en définissant un ordre bien fondé sur les mots tel que, si u se réduit en v , alors $u > v$. Dès lors, la confluence peut être vérifiée automatiquement, en inspectant tous les conflits possibles entre règles (les *paires critiques*). Si une paire critique n'est pas confluente, on peut la rendre confluente en ajoutant une nouvelle règle qui correspond à une équation déductible. Ce processus de *complétion* continue tant que tous les conflits n'ont pas été résolus. Toutes ces techniques ont été étendues à la *réécriture de termes* (voir par exemple [DeJ90]).

Nous avons adapté cette méthodologie au problème des mots en dimension 2, selon la terminologie de Burroni, et plutôt que de présenter une théorie générale (qui n'est d'ailleurs pas complètement fixée), nous préférons expliquer un exemple de façon informelle. Le système de réécriture pour \mathbf{N} (figure 3) a été obtenu en appliquant l'algorithme de complétion de Knuth-Bendix à la main. L'orientation des équations n'était pas évidente: certains choix naturels conduisent à une infinité de règles!

Théorème *Ce système est noetherien et confluent.*

²Pour une théorie à n symboles de fonction et m équations, la présentation correspondante aura $n + 3$ générateurs et $m + 3n + 7$ équations. Les $3n$ équations supplémentaires expriment des commutations entre les n symboles de fonction et les 3 générateurs supplémentaires. Notez aussi que, du point de vue de la théorie de la démonstration, ces 3 générateurs correspondent aux règles structurelles de *contraction*, *affaiblissement* et *échange*.

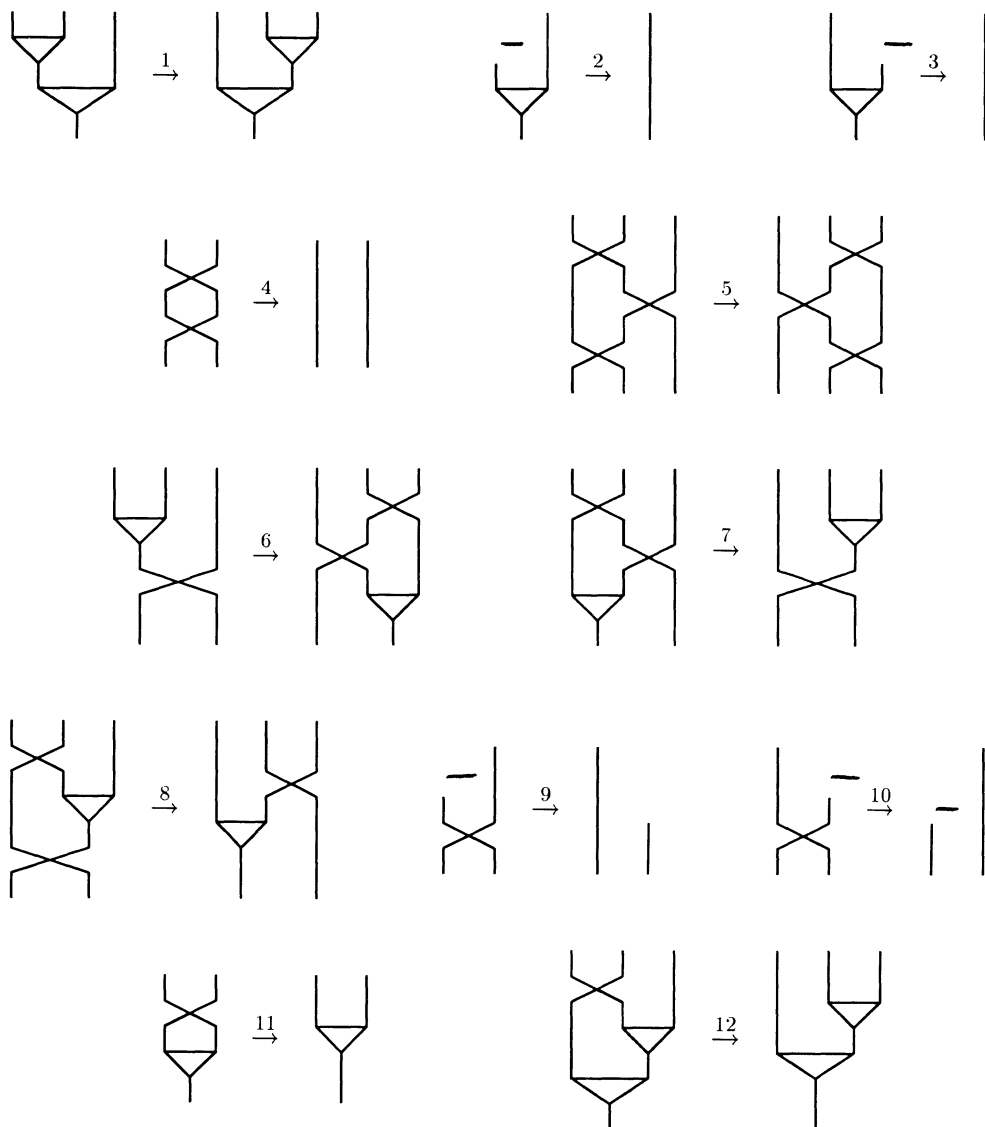
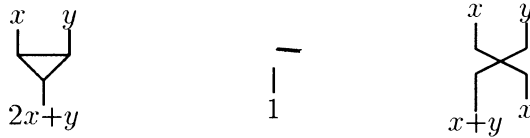


Figure 3 : règles de réécriture

Pour démontrer la noetherianité, on construit, pour chaque diagramme u représentant une application $n \rightarrow m$, une application strictement croissante $\tilde{u} : V^n \rightarrow V^m$ où V est l'ensemble des entiers naturels strictement positifs, et V^n, V^m sont munis de l'ordre produit. Cette interprétation est définie sur les générateurs:



puis étendue de façon évidente aux diagrammes composés. Pour chaque règle $u \rightarrow v$, on vérifie que $\tilde{u}(x_1, \dots, x_n) > \tilde{v}(x_1, \dots, x_n)$ pour l'ordre produit. Par conséquent, si $u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots$ était une suite infinie de réductions, on obtiendrait une suite strictement décroissante $\tilde{u}_0(1, \dots, 1) > \tilde{u}_1(1, \dots, 1) > \tilde{u}_2(1, \dots, 1) > \dots$ ce qui est absurde.

La confluence de toutes les paires critiques fut d'abord vérifiée à la main, puis à la machine. Par manque de place, nous ne donnons que 2 exemples (figure 4) et nous invitons le lecteur à vérifier la confluence des 54 autres.

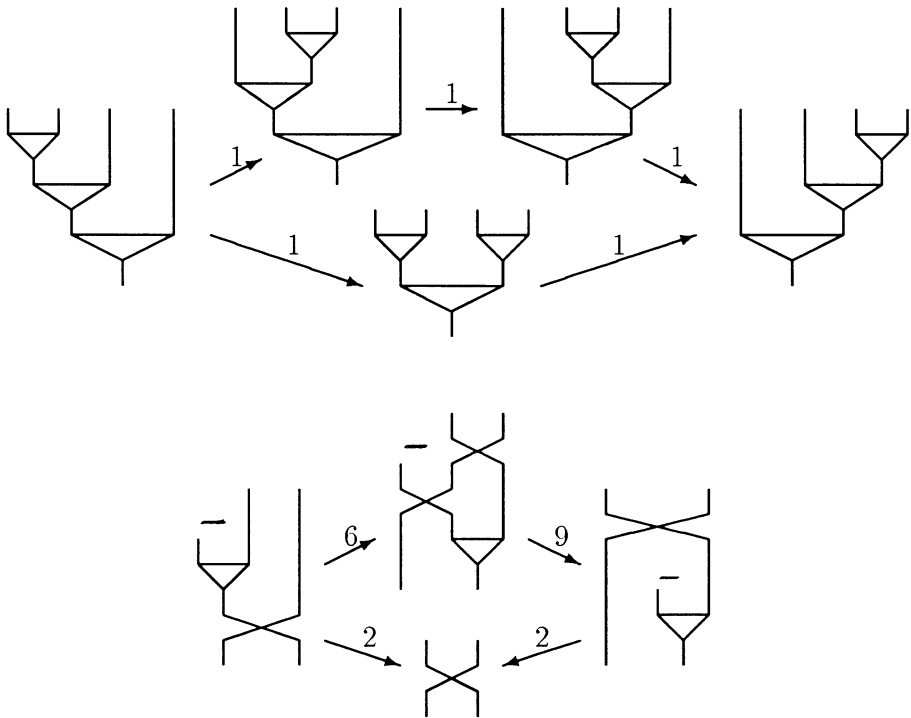


Figure 4 : 2 des 56 diagrammes de confluence

Références

- [Bur91] Burroni A., *Higher Dimensional Word Problem. Category Theory and Computer Science, LNCS 530*, Springer-Verlag, 1991, pp. 94-105.
- [DeJ90] Dershowitz N., Jouannaud J.P., *Rewrite systems. Handbook of Theoretical Computer Science, Vol. B*, Elsevier, 1990.
- [JoS91] Joyal A., Street R., *The Geometry of Tensor Calculus. Advances in Mathematics* 88, 1991, pp. 55-112.
- [KnB70] Knuth D.E., Bendix P.B., *Simple word problems in universal algebras. Abstract Algebra (ed. J. Leech)*, Pergamon Press, 1970, pp. 263-297.
- [PeR86] R. Penrose & W. Rindler, *Spinors and space-time, Vol. 1: Two-spinor calculus and relativistic fields*. Cambridge University Press, 1986.

LIENS
45 rue d'Ulm
75230 Paris cedex 05