CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

Fonctions d'Euler-Jordan et de Gauß et exponentielle dans les semi-anneaux de Burnside

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 33, n° 3 (1992), p. 253-260

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_253_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
CATEGORIQUES

VOLUME XXXIII
3ème trimestre 1992

Fonctions d'Euler-Jordan et de Gauß et exponentielle dans les semi-anneaux de Burnside

René Guitart[1]

ABSTRACT : In this paper, the arithmetical functions of Euler-Jordan and Gauß are related to explicit computations of internal exponentiation of isomorphic classes of objects in the topos of permutations.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et $\widehat{\mathcal{C}}$ le topos des foncteurs $X : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{E}ns$ et transformations naturelles entre ces foncteurs. On désigne par $\mathcal{KC} = \mathcal{K}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets de $\widehat{\mathcal{C}}$, la classe d'isomorphisme de X étant notée $\#X = x$. Comme $\widehat{\mathcal{C}}$ est à sommes et à produits, $\mathcal{KC}$ est un semi-anneau avec, pour $x = \#X$ et $y = \#Y$, $x + y = \#(X + Y)$ et $x.y = \#(X \times Y)$, et l'anneau engendré $K\mathcal{C}$ est un λ-anneau essentiel en combinatoire et en théorie des classes caractéristiques (voir [2] et [4]). Si $\mathcal{C}$ est un groupe $\mathbf{G}$, alors ainsi $\mathcal{K}\mathbf{G}$ est connu comme le semi-anneau de Burnside de $\mathbf{G}$.

Ici nous voulons introduire une seule nouvelle idée, très simple, qui est la suivante : si $x, y \in \mathcal{KC}$, on pose $x^y = \#(X^Y)$, et alors cette *exponentielle* dans $\mathcal{KC}$, qui se calcule explicitement, grâce au lemme de Yoneda, via certaines des quantités $x \to y = card(Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, Y))$, s'avère combinatoirement significative, liées au petit théorème de Fermat, aux fonctions arithmétiques comme la fonction ϕ d'Euler, les fonctions J_k de Jordan, et les fonctions $F(a, n)$ de Gauss (voir [1], et, pour des références plus récentes, [5], [6], [7]).

Pour $X \in \widehat{\mathcal{C}}$ on note $\int X$ la catégorie fibrée associée à X, ayant pour objets les (C, u), $C \in ob\mathcal{C}$, $u \in X(C)$, et pour morphismes de (C_1, u_1) vers (C_2, u_2) les $f : C_1 \longrightarrow C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $X(f)(u_2) = u_1$. Si K est une composante

[1]Université de Paris 7

connexe de $\int X$, on pose $X_K(C) = u \in X(C)$; $(C,u) \in obK$. On a $X = \sum_{K comp.conn.de \int X} X_K$. On dit que X est *connexe* si $\int X$ est connexe, ce qui équivaut à ce que $Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(X,-)$ commute aux sommes, ce qui équivaut à ce que $X = Y + Z$ dans $\widehat{\mathcal{C}}$ implique $Y = 0$ ou $Z = 0$. On dit que $f \in \mathcal{KC}$ est une *figure* de $\mathcal{C}$ si $f = \#F$ avec F connexe et $F \neq 0$. On note $\mathcal{FC} = \mathcal{F}$ l'ensemble des figures de $\mathcal{C}$. On note par x, y, z des éléments quelconques de $\mathcal{KC}$, et par f, g, h, k, l, m, des éléments quelconques de $\mathcal{FC}$. Pour tout x et toute f on pose, avec $x = \#X$,

$$x_f = card\{K; K comp.conn.de \int X, \#X_K = f\}.$$

La fonction $x_- : \mathcal{F} \to Card$ détermine x. On a $f_g = \delta_{f,g}$ et $x_- = \sum_{f\in\mathcal{F}} x_f f_-$, ce que l'on écrit

$$x = \sum_{f\in\mathcal{F}(x)} x_f f, \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}(x) = \{f \in \mathcal{F}; x_f \neq 0\}.$$

Proposition 1 *Pour $x, y \in \mathcal{K}$ and $f, g, \ldots \in \mathcal{F}$ on a :*

$$(x+y)_f = x_f + y_f,$$

$$(x.y)_f = \sum_{g\in\mathcal{F}(x), h\in\mathcal{F}(y)} x_g y_h (g.h)_f,$$

les $(g.h)_f$ étant solution du système d'équations indexées par les $k \in \mathcal{F}$:

$$\sum_{f\in\mathcal{F}(g.h)} (k \to f)(g.h)_f = (k \to g)(k \to h).$$

On a :

$$(x \to y) = \prod_{f\in\mathcal{F}(x)} [(\sum_{g\in\mathcal{F}(y)} y_g(f \to g))^{x_f}].$$

On a :

$$y^x = \sum_{f\in\mathcal{F}(y^x)} (y^x)_f f,$$

les $(y^x)_f$ étant solution du système d'équations indexées par les $k \in \mathcal{F}$:

$$\sum_{f\in\mathcal{F}(y^x)} (k \to f)(y^x)_f = \prod_{f\in\mathcal{F}(k.x),(f\to y)\neq 0} \Big[\prod_{h\in\mathcal{F}(x)} [(\sum_{g\in\mathcal{F}(y)} y_g(f \to g))^{x_h(k.h)_f}]\Big].$$

On a :

$$x.y = \sum_{f \in \mathcal{F}(x.y)} (x.y)_f f,$$

les $(x.y)_f$ *étant solution du système d'équations indexées par les* $k \in \mathcal{F}$ *:*

$$\prod_{f \in \mathcal{F}(x.y),(f \to k) \neq 0} (f \to k)^{(x.y)_f} = \prod_{g \in \mathcal{F}(x),(g \to k^y) \neq 0} \Big[\Big(\sum_{f \in \mathcal{F}(k^y)} (k^y)_f (g \to f) \Big)^{x_g} \Big].$$

En particulier, en notations allégées on a :

$$\prod_f (f \to k)^{(l.m)_f} = \sum_f (l \to f)(k^m)_f.$$

Supposons désormais que $\mathcal{C} = \mathbf{G}$ soit un groupe. Alors $X \in \widehat{\mathbf{G}}$ est connexe ssi X est un $\mathbf{G}$-ensemble transitif, ssi $X \cong \mathbf{G}/\mathbf{H}$ pour un sous-groupe $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$. On a $\mathbf{G}/\mathbf{H} \cong \mathbf{G}/\mathbf{K}$ ssi il existe un $g \in \mathbf{G}$ tel que $g^{-1}\mathbf{H}g = \mathbf{K}$, de sorte que $\mathcal{F}\mathbf{G}$ est l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $\mathbf{G}$. Si on note $H \in \mathcal{F}\mathbf{G}$ la figure déterminée par $\mathbf{H}$, on a : $(H \to K) = card\{g\mathbf{K}; g^{-1}\mathbf{H}g \subseteq \mathbf{K}\}$.

Proposition 2 *Pour* $x, y \in \mathcal{K}\mathbf{G}$, *l'exponentielle* y^x *se calcule par la proposition 1, via les valeurs des* $(H \to K)$ *ci-avant, et se calcule aussi, en notant* EX *l'ensemble des éléments de* X, *comme* $\#(EY^{EX}, \circ)$ *où* $\circ$ *est l'action sur* EY^{EX} *qui est définie par* $(g \circ \phi)(x) = g.(\phi(g^{-1}.x))$. *Par suite le foncteur* $E : \widehat{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ *induit un homomorphisme de semi-anneau* $\epsilon : \mathcal{K}\mathbf{G} \longrightarrow \mathcal{K}\mathbf{1} = Card$ *qui de plus préserve l'exponentielle.*

On désigne par $\mathcal{N}\mathbf{G}$ l'ensemble des éléments $x \in \mathcal{K}\mathbf{G}$ tels que, avec $x = \#X$, EX soit un ensemble fini. Ainsi $\mathcal{N}\mathbf{1} = \mathbf{N}$.

Proposition 3 $\mathcal{N}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ *comporte 2 figures, notées 1 et* D, *1 étant neutre pour le produit, avec*

$$D^2 = 2D$$

et l'exponentielle vérifie

$$(a + bD)^D = (a + 2b) + \frac{(a + 2b)^2 - (a + 2b)}{2} D.$$

En particulier on a :

$$D^D = 2^D = 2 + D$$

et puis :

$$2^{a+bD} = 2^{a+b} + 2^{a+b-1}(2^b - 1)D.$$

On note $\mathcal{R}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ le semi-anneau extension de $\mathcal{N}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ constitué des symboles $a + bD$, avec $a, b \in \mathbf{R}$ (a et b réels). On pose $\frac{D}{2} = U$, de sorte que $U^2 = U$, et si $y = \alpha + \beta U$ est *positif*, c'est-à-dire si $0 \leq \alpha$ et $0 \leq \alpha + \beta$, on pose, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$y^x = \alpha^x + ((\alpha + \beta)^x - \alpha^x)U,$$

$$y^U = ((\alpha + \frac{\beta}{2}D)^D)^{1/2}.$$

Ainsi l'exponentielle peut s'étendre aux y^x avec y positif. Pour y positif strictement ($\alpha \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$), on pose

$$log_2(y) = log_2(\frac{\alpha^2}{\alpha + \beta}) + log_2(\frac{\alpha + \beta}{\alpha})D.$$

Proposition 4 *Avec les notations ci-avant on a, pour y strictement positif,*

$$y^x = 2^{x log_2 y}.$$

Proposition 5 $\mathcal{N}((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2)$ *comporte 4 figures, notées 1, H, V, et C, 1 étant neutre pour le produit, avec*

$$H^2 = 2H, V^2 = 2V, C^2 = 4C, HV = C, HC = VC = 2C.$$

L'exponentielle vérifie par exemple :

$$H^H = 2 + H, V^V = 2 + V, V^H = H^V = H + V, C^H = 4H + 2V + C.$$

Proposition 6 $\mathcal{N}(\mathcal{S}3)$ *comporte 4 figures, notées 1, D,T,et H, 1 étant neutre pour le produit, avec*

$$D^2 = 2D, T^2 = T + H, H^2 = 6H, DT = H, DH = 2H, TH = 3H.$$

L'exponentielle vérifie par exemple :

$$H^H = 6 + 15D + 210T + 7665H, T^H = 3 + 3D + 24T + 108H\ ;$$

$\mathcal{N}(\mathcal{S}5)$ *comporte 19 figures*, $\mathcal{N}(\mathcal{S}7)$ *comporte 96 figures.*

Proposition 7 *$\mathcal{N}(\mathbf{Z})$ comporte une infinité dénombrable de figures, notées 1, et C_n, pour $n > 0$, où C_n est le cycle à n éléments, et on a*

$$(C_u \to C_v) = (si \ \ v \mid u \ : v, \ \ sinon \ : 0), \qquad C_u.C_v = (u \wedge v) C_{(u \vee v)}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{N}(\mathbf{Z})$ on a : $(C_u \to x) = \sum_{d|u} dx_d$, en convenant de noter x_{C_n} par simplement x_n.

Pour $x, y \in \mathcal{N}(\mathbf{Z})$ et $r \in \mathbf{N}$ on pose

$$Q(x,y,r) = \prod_{l, x_l \neq 0} [(\sum_{d|(l \vee r)} dy_d)^{x_l (l \wedge r)}]$$

et $R(x,y) = ppcm\{i; x_i \neq 0 \ \ ou \ \ y_i \neq 0\}$. Alors $z = y^x$ vérifie :

- pour tout n, $(z_n \neq 0)$ implique $(n \mid R(x,y))$

- pour tout r et tout n :

$$\sum_{n|r} n z_n = Q(x,y,r),$$

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) Q(x,y,\frac{n}{d})$$

où μ est la fonction de Moebius.

Par exemple on a : $C_2^{C_2} = 2 + C_2, C_2^{C_3} = C_2 + C_6, C_2^{C_4} = 2 + C_2 + 3C_4, C_2^{C_5} = C_2 + 3C_{10}, C_2^{C_6} = 2 + C_2 + 2C_3 + 9C_6$.

Ce calcul sur les "nombre-cycles" et les exponentielles de permutations est amorcé dans [3].

Proposition 8 *Soit C_∞ la figure non-finie de $\mathcal{K}(\mathbf{Z})$, c'est-à-dire le cycle infini, et soit $x \in \mathcal{N}(\mathbf{Z})$, avec $x = \#X$ et $EX = \epsilon.x = e$ Alors dans $x^{C_\infty} = \sum_n z_n C_n$, on a, pour tout p premier*

$$z_p = \frac{e^p - e}{p} \in \mathbf{N}.$$

Pour a et k entiers, soit $F(a,n)$ la fonction de Gauss et $J_k(d)$ la fonction de Jordan, caractérisées par

$$\sum_{n|k} F(a,n) = a^k = \sum_{d|a} J_k(d).$$

Ces fonctions sont donc données par :

$$F(a,n) = \sum_{q|n} \mu(q) a^{n/q},$$

$$J_k(d) = \sum_{q|d} \mu(q) (\frac{d}{q})^k.$$

Ainsi, avec $n = p_1^{e_1} \ldots p_s^{e_s}$ (la décomposition de n en facteurs premiers),

$$F(a,n) = a^n - \sum_{i \leq s} a^{n/p_i} + \sum_{i<j\leq s} a^{n/(p_i p_j)} - \ \ldots \ + (-1)^s a^{n/(p_1 \ \ldots \ p_s)}$$

et de même pour $J_k(d)$. On sait que J_k de Jordan vaut :

$$J_k(n) = card\{(a_1, \ldots, a_k); 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq n, (a_1, \ldots, a_k, n) = 1\}.$$

Pour $k = 1$ on retrouve la fonction ϕ d'Euler :

$$\phi(n) = card\{a; 1 \leq a \leq n, a \wedge n = 1\}.$$

Proposition 9 *Pour $a, m \in \mathbf{N}$, dans $a^{C_m} = \sum_n z_n C_n$, on a, pour p premier :*

$$si \ \ p^k \mid m, \ \ alors \ \ z_{p^k} = \frac{a^{p^k} - a^{p^{k-1}}}{p^k} \in \mathbf{N}.$$

Et, plus généralement, on a :

$$a^{C_m} = \sum_{n|m} \frac{F(a,n)}{n} C_n.$$

Alors, de $(a^{C_m})(b^{C_m}) = (ab)^{C_m}$ on tire :

Proposition 10 *Pour $a, b, n \in \mathbf{N}$ on a :*

$$F(ab, n) = \sum_{n_1 \vee n_2 = n} F(a, n_1) F(b, n_2).$$

Proposition 11 *Pour tout $a \in \mathbf{N}$ on définit $\Psi_a \in \mathcal{N}(\mathbf{Z})$ par :*

$$\Psi_a = \sum_{d|a} \frac{a}{d} \phi(d) C_d.$$

On a, pour tout $r \in \mathbf{N}$,

$$(C_r \to \Psi_a) = a(a \wedge r),$$

et, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$(\Psi_a)^k = \sum_{d|a} \frac{a^k}{d} J_k(d) C_d.$$

On note $\mathcal{Q}^+(\mathbf{Z})$ le semi-anneau extension de $\mathcal{N}(\mathbf{Z})$ constitué des symboles $\sum_n z_n C_n$ avec les $z_n \in \mathbf{Q}^+$ (i.e. rationnels positifs ou nuls), et on définit dans ce semi-anneau

$$\Phi = \sum_n \frac{\phi(n)}{n} C_n.$$

Proposition 12 *On a*

$$\Phi^k = \sum_n \frac{J_k(n)}{n} C_n.$$

Pour tout polynôme P à coefficients entiers et tout entier r on a :

$$(C_r \to P(\Phi)) = P(r).$$

Pour toute figure $f \in \mathcal{N}(\mathbf{Z})$ on a :

$$(f \to \Phi) = \epsilon(f).$$

Ainsi Φ représente sur les figures l'augmentation $\epsilon\ : \mathcal{N}(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{N}$.

Références

[1] L.E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. I, 1919, reprint Chelsea, New York,1952.

[2] A. Grothendieck, *La théorie des classes de Chern*, Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 137-154.

[3] R.Guitart, *Miroirs et Ambiguités*, 70 p., multigraphié, Université Paris 7, décembre 1987.

[4] D. Knutson, *λ-Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group*, Springer L.N. Math. 308, 1973.

[5] J. Sandor, *Note on Jordan's arithmetical function*, Sem. Arghiriade, Univ. Timisoara, 1989, 4p.

[6] E. Schwab and E.D. Schwab, *Total additivity and summation function*, Sem. Arghiriade, Univ. Timisoara, 1990, 7p.

[7] L. Toth, *Some remarks on a generalisation of Euler's function*, Sem. Arghiriade, Univ. Timisoara. 1990, 9p.

Université de Paris 7
Département de mathématiques
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05