CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PIERRE DAMPHOUSSE

Automates et langages

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 33, nº 3 (1992), p. 217-222

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_217_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
CATEGORIQUES

VOLUME XXXIII
3ème trimestre 1992

Automates et Langages

Pierre Damphousse[1]

ABSTRACT : The classical notion of finite deterministic automata is extended in a natural way so as to reveal interesting categories of automata and languages.

Un *langage* L *dans un alphabet* Σ est, dans la théorie classique des langages, un sous-ensemble L du monoïde libre Σ^*. Deux questions naturelles se posent alors. (1) Existe-t-il un algorithme qui, étant donné $x \in \Sigma^*$, détermine si x est dans L ou non ? (2) Existe-t'il un algorithme qui permet d'engendrer une suite d'éléments de Σ^* formée exactement des éléments de L ? L'essentiel de la théorie des langages est l'étude de différentes classes de L caractérisées chacune par le fait qu'il existe une classe de "mécanismes" d'un type particulier soit pour reconnaître soit pour engendrer L. A ce corpus, nous faisons deux reproches.

Le premier reproche est que cette notion de langage — un sous-ensemble d'un monoïde libre — est beaucoup trop pauvre pour rendre compte des plus simples structures internes rencontrées dans l'élaboration et la manipulation de langages formels. Un langage comprend en général une donnée de relations d'incidence, d'emboîtements, de découpages, ... qui ont un lien intime avec les mécanismes de reconnaissance et de génération de ses mots.

Le second reproche est davantage de nature mathématique. Les notions de théorie des langages correspondent le plus souvent à des objets extérieurs aux langages eux-mêmes et aux monoïdes libres qui les hébergent. Par exemple, un langage est dit régulier s'il existe un "mécanisme" pour le construire (v.g. une grammaire régulière), ou bien s'il existe un "mécanisme" pour le reconnaître (v.g. un automate déterministe), ou bien s'il existe dans le méta-langage une expression générique de ses éléments (v.g. une expression régulière), et la théorie se préoccupe de l'équivalence de ces faits. En

[1]Université de Tours, "damphous@frutrs51.bitnet"

revanche, elle ne se préoccupe pas des liens de ces faits avec des notions internes au monoïde libre Σ^*. De surcroît, la notion d'homomorphisme, faite pour comparer des objets, est quasiment absente de la théorie ; par exemple, comment sont "organisés entre eux" les automates déterministes qui reconnaissent un même langage ? Pour expliquer la nature de ce deuxième reproche par une analogie, disons que c'est comme si un espace vectoriel était considéré comme la donnée d'un partie génératice ou un groupe la donnée d'une présentation, et que l'on se soucie très peu de notions d'algèbre linéaire ou de la théorie des groupes plus structurelles ou "intrinsèques".

Notre objectif ici est une approche de la théorie des langages à laquelle on ne peut pas faire le second reproche, et qui est la base d'une théorie à l'abri du premier reproche, mais que nous ne développons pas ici.

1 Catégories de langages et d'automates

Se donner une partie L de Σ^* revient à se donner une relation d'équivalence découpant Σ^* en au plus deux classes. Nous étendons naturellement la notion classique de langage comme suit : un langage est une paire (Σ, L), où L est une relation d'équivalence sur Σ^*. Cette notion de langage est encore beaucoup trop pauvre pour échapper au premier reproche, mais elle est suffisante pour l'objectif de cette note.

Nous appelons morphisme de langages de (Σ_1, L_1) dans (Σ_2, L_2) un morphisme de monoïdes $\Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ induisant une application $\Sigma_1/\mathsf{L}_1 \to \Sigma_2/\mathsf{L}_2$ par passage au quotient. Les langages ainsi définis forment une catégorie que nous notons Lang.

Rappelons qu'un automate déterministe fini est essentiellement un triplet (Σ, Q, L) où (1) Σ est un alphabet, (2) Q est un Σ^*-ensemble pointé transitif, appelé ensemble d'états, et (3) L est un découpage de Q en (au plus) deux classes —la classe des états finaux et celle des autres, qui peut éventuellement être vide. Le point de base de Q, l' "état initial", sera noté $\check{q}$. On convient de noter à droite l'action de Σ^* sur Q. Nous observons que :

1 : La donnée d'un tel automate détermine canoniquement une surjection $\Sigma^* \xrightarrow{\phi} Q$, à savoir $x \mapsto \check{q}x$. Cette surjection induit à son tour deux relations d'équivalence sur Σ^* ; la première correspond à l'image réciproque du découpage L de Q en au plus deux classes d'équivalence, la seconde au découpage de Σ^* en fibres au-dessus des états. Notons L la première et E la seconde. Il est clair que

α : $\mathsf{E} \subset \mathsf{L}$ (i.e. que E est plus fine que L) ;

β : E est invariante à droite par l'action de Σ^*, i.e. si $x \mathrel{\mathsf{E}} y$, alors pour chaque $z \in \Sigma^*$, $xz \mathrel{\mathsf{E}} yz$.

2 : Inversement, supposons donnée sur Σ^* une paire (E,L) de relations d'équivalence satisfaisant (α) et (β) ci-dessus, telles que L découpe Σ^* en au plus deux classes. Parce que E est invariante à droite, l'action naturelle de Σ^* sur lui-même détermine une action à droite de Σ^* sur le quotient Σ^*/E ; d'autre part, Σ^* a naturellement un point de base — son élément neutre ϵ —, si bien que Σ^*/E est aussi un Σ^*-ensemble pointé, dont le point de base est la classe de ϵ. Le triplet

$$(\Sigma, \Sigma^*/\mathsf{E}, \mathsf{L}/\mathsf{E}),$$

où L/E est la relation d'équivalence induite sur Σ^*/E par L, est donc un automate ; la surjection $\phi : \Sigma^* \to Q$ que détermine cet automate n'est autre que le projecteur canonique, et les deux relations d'équivalence que ϕ détermine sont E et L.

3 : Finalement, si E et L proviennent de la donnée d'un automate (Σ, Q, L), alors la bijection $\overline{\phi} : \Sigma^*/\mathsf{E} \to Q$ provenant de l'application $\Sigma^* \xrightarrow{\phi} Q$ est un isomorphisme d'automates au sens le plus fort que l'on puisse concevoir : une bijection compatible avec l'action de Σ^* et la donnée de L.

Se donner un automate déterministe fini revient donc à se donner deux relations d'équivalence L et E sur Σ^* satisfaisant (α) et (β), avec en plus les propriétés que E induit un quotient fini et que L découpe Σ^* en au plus deux classes.

Nous étendons maintenant naturellement la notion d'automate déterministe en oubliant ces deux dernières conditions. Un automate (déterministe) abstrait est un triplet $(\Sigma, \mathsf{E}, \mathsf{L})$ où E et L sont des relations d'équivalence sur Σ^* satisfaisant (α) et (β) ci-dessus. Nous appelons morphisme d'automates de $(\Sigma_1, \mathsf{E}_1, \mathsf{L}_1)$ dans $(\Sigma_2, \mathsf{E}_2, \mathsf{L}_2)$ un morphisme de monoïdes $\Sigma_1^* \xrightarrow{f} \Sigma_2^*$ qui induit deux applications

$$\Sigma_1^*/\mathsf{E}_1 \longrightarrow \Sigma_2^*/\mathsf{E}_2 \quad \text{et} \quad \Sigma_1^*/\mathsf{L}_1 \longrightarrow \Sigma_2^*/\mathsf{L}_2$$

par passage aux quotients. Les automates et leurs morphismes forment une catégorie, que l'on note Auto. Etant donné un automate déterministe abstrait $(\Sigma, \mathsf{E}, \mathsf{L})$, le triplet $(\Sigma, \Sigma^*/\mathsf{E}, \mathsf{L}/\mathsf{E})$ sera appelé sa réalisation.

Il existe deux foncteurs évidents $\mathsf{Auto} \longrightarrow \mathsf{Lang}$, à savoir les foncteurs oubli qui envoient $\begin{pmatrix} (\Sigma_1, \mathsf{E}_1, \mathsf{L}_1) \\ \downarrow f \\ (\Sigma_2, \mathsf{E}_2, \mathsf{L}_2) \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} (\Sigma_1, \mathsf{L}_1) \\ \downarrow f \\ (\Sigma_2, \mathsf{L}_2) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} (\Sigma_1, \mathsf{E}_1) \\ \downarrow f \\ (\Sigma_2, \mathsf{E}_2) \end{pmatrix}$ respectivement. Quand notre notion d'automate se traduit dans le contexte classique, le premier de ces foncteurs associe à un automate le langage qu'il reconnaît ; pour cette raison, nous l'appelons le foncteur "*Langage-reconnu-par*". Il est cependant un autre foncteur oubli qui est du plus grand intérêt, que nous décrivons maintenant.

2 L'automate minimal

Soit (Σ, L) un langage. Considérons l'ensemble $\mathbf{D}$ des relations d'équivalence E sur Σ^* qui sont plus fines que L et invariantes à droite. Cet ensemble $\mathbf{D}$ n'est pas vide car il contient l'égalité. Ses éléments sont les objets de trois catégories que nous notons respectivement $\mathbf{D}_i$, $\mathbf{D}_a$ et $\mathbf{D}_q$ (lire $\mathbf{D}$-inclusion, $\mathbf{D}$-automate et $\mathbf{D}$-quotient, où $\mathbf{D}$ est le "$\mathbf{D}$" de "invariante à $\mathbf{D}$roite").

- $\mathbf{D}_i$ est le pré-ordre des relations d'équivalence invariantes à droites et plus fines que L. Dans $\mathbf{D}_i$, il y a donc un morphisme $\mathsf{E}_1 \rightarrow \mathsf{E}_2$ si et seulement si $\mathsf{E}_1 \subset \mathsf{E}_2$.
- Les morphismes $\mathsf{E}_1 \rightarrow \mathsf{E}_2$ dans $\mathbf{D}_a$ sont les endomorphismes de monoïdes $\Sigma^* \xrightarrow{f} \Sigma^*$ qui sont compatibles avec la relation L et induisent une application $\overline{f} : \Sigma^*/\mathsf{E}_1 \rightarrow \Sigma^*/\mathsf{E}_2$. Cette catégorie est la sous-catégorie pleine des langages reconnaissant L.
- Finalement, $\mathbf{D}_q$ est la catégorie quotient obtenue à partir de $\mathbf{D}_a$ en identifiant les morphismes f qui donnent la même application $\overline{f}$: $\Sigma^*/\mathsf{E}_1 \rightarrow \Sigma^*/\mathsf{E}_2$ par passage au quotient.

Ces trois catégories sont reliées entre elles dans une "présentation" canonique par deux foncteurs

$$\mathbf{D}_i \xrightarrow{I} \mathbf{D}_a \xrightarrow{P} \mathbf{D}_q$$

où I envoie $\mathsf{E}_1 \subset \mathsf{E}_2$ sur le morphisme de $\mathbf{D}_a$ donné par le morphisme identité sur Σ^* (dire que ce dernier peut passer au quotient revient à dire que $\mathsf{E}_1 \subset \mathsf{E}_2$), et où P envoie $\mathsf{E}_1 \xrightarrow{f} \mathsf{E}_2$ sur sa classe $\mathsf{E}_1 \xrightarrow{\overline{f}} \mathsf{E}_2$. Le foncteur composé $P \cdot I$ envoie essentiellement $\mathsf{E}_1 \subset \mathsf{E}_2$ sur le projecteur canonique $\Sigma^*/\mathsf{E}_1 \to \Sigma^*/\mathsf{E}_2$.

La catégorie $\mathbf{D}_i$ contient un objet initial, à savoir l'égalité. Du point de vue de la catégorie des automates, $(\Sigma, \text{“égalité”}, \mathsf{L})$ est le plus mauvais automate possible, car sa réalisation donne essentiellement le langage qu'il doit reconnaître [i.e. $(\Sigma, \Sigma^*, \mathsf{L})$].

$\mathbf{D}_i$ contient aussi un objet terminal. En effet, étant donnée une famille $\{\mathsf{E}_i\}_{i \in I}$ de relations d'équivalence invariantes à droite et plus fines que L, on vérifie immédiatement que la relation E engendrée par les E_i (i.e. l'enveloppe des E_i) est aussi invariante à droite et plus fine que L. On en déduit que la relation E_0 engendrée par tous les objets de $\mathbf{D}_i$ est un objet maximum (i.e. terminal) de $\mathbf{D}_i$. Cet automate $(\Sigma, \mathsf{E}_0, \mathsf{L})$ est appelé “automate minimal reconnaissant L” car sa réalisation est le plus petit automate (au sens habituel) qui reconnaît le langage donné par L.

Comme $\mathbf{D}_i$ est un ordre, ses classes d'isomorphie sont chacune réduite à un objet. Dire que l'automate minimal est unique n'apporte donc en ce sens aucun profit ; sa minimalité, et non son unicité découle de son caractère final.

Le foncteur I plonge $\mathbf{D}_i$ dans $\mathbf{D}_a$. Il est clair que l'automate minimal n'est pas terminal dans $\mathbf{D}_a$, car son groupe d'automorphismes n'est généralement pas trivial (Exemple : si L est le découpage de Σ^* en palindromes et non palindromes, le groupe des automorphismes (dans $\mathbf{D}_a$) de l'automate minimal contient le groupe des permutations de Σ). Il y a cependant un fait fort qui reste vrai : $\mathbf{D}_a$ et $\mathbf{D}_q$ sont chacune leur propre squelette. Faute de place et de temps, nous montrons ici seulement que l'automate minimal est seul dans sa classe d'isomorphie dans $\mathbf{D}_a$ et dans $\mathbf{D}_q$.

Soit E_0 la relation maximum dans $\mathbf{D}_i$, et soit E_1 un objet de $\mathbf{D}_i$. Nous montrons que E_0 et E_1 ne sont pas isomorphes dans $\mathbf{D}_q$ — et donc qu'elles ne le sont pas dans $\mathbf{D}_a$.

Soit f un morphisme dans $\mathbf{D}_a$ induisant dans $\mathbf{D}_q$ un isomorphisme $\overline{f}$: $\mathsf{E}_0 \to \mathsf{E}_1$. Par définition, f est un morphisme de monoïdes $\Sigma^* \to \Sigma^*$ rendant le diagramme suivant commutatif, $\overline{\overline{f}}$ étant une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^* & \xrightarrow{f} & \Sigma^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^*/\mathsf{L} & \xrightarrow{\overline{f}} & \Sigma^*/\mathsf{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^*/\mathsf{E}_0 & \xrightarrow{\overline{\overline{f}}} & \Sigma^*/\mathsf{E}_1 \end{array}$$

(où les flèches verticales sont les projecteurs). Soit E'_0 la relation d'équivalence sur Σ^* donnée par image réciproque par f de la relation E_0 sur Σ^*. Il est clair, au vu de la commutativité du diagramme ci-dessus, que

- E'_0 est plus fine que L (car, avec l'abus de notation évident, $\mathsf{E}'_0 = f^{-1}(\mathsf{E}_0) \subset f^{-1}(\mathsf{L}) \subset \mathsf{L}$).
- E'_0 est invariante à droite (car elle est l'image réciproque d'une relation d'équivalence invariante à droite).

On en déduit donc que $\mathsf{E}'_0 = \mathsf{E}_0$, car E_0 est maximal, puis que $\mathsf{E}_1 = \mathsf{E}_0$.

3 Conclusion

Nous avons "déménagé" la notion d'automate à l'intérieur des monoïdes libres, palliant ainsi au second reproche fait à la théorie des langages, et ce faisant, le souci de l'expression formelle minimale et de la naturalité (v.g. éviter les contraintes accessoires du type "... *en au moins deux classes*") nous amène un gain structurel de clareté et de simplicité. Ainsi les automates reconnaissant un langage donné forment canoniquement un treillis, et l'existence et l'unicité de l'automate minimal deviennent presque tautologiques (indépendamment de tout argument de finitude sur l'alphabet et les états).

Université de Tours
Faculté des Sciences
Parc de Grandmont
Tours 37200
"damphous@frutrs51.bitnet"