

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

PIERRE AGERON

Quelques aspects de la dualité entre logique et topologie

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 33, n° 3 (1992), p. 195-198

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_195_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Quelques aspects de la dualité entre logique et topologie

Pierre Ageron¹

ABSTRACT : We describe some properties of the Stone-type duality between sketches (or first order theories) and accessible theories.

A Patrice

Une *dualité* est, au sens strict, une équivalence entre deux catégories \mathbf{A} et \mathbf{B}^{op} . Il est clair que cette définition, à la fois trop générale et trop restrictive, renvoie l'idée de dualité dans le domaine du psychologique. Tout autant psychologique est la perception "topologique" ou "spatiale" des objets de \mathbf{B} lorsque les objets de \mathbf{A} sont certaines "algèbres", en particulier certaines "théories logiques". On peut cependant extraire de cette intuition des directions de recherche très intéressantes.

Le paradis, plus que le paradigme, des situations de dualité est la fameuse dualité de Stone entre la catégorie des algèbres de Boole et celle des espaces compacts totalement discontinus. Rappelons-en le point essentiel.

Soit B une algèbre de Boole, que nous imaginerons comme une théorie propositionnelle classique. Un modèle de B est un homomorphisme M de B dans $\{\text{vrai}, \text{faux}\}$, et s'identifie à un ultrafiltre de B . On dispose de l'espace topologique $X = \text{Spec}(B)$ dont les points sont les modèles de B et dont les ouverts sont les ensembles de la forme $\{M/M(a) = \text{vrai}\}$, pour $a \in B$. Ce spectre est séparé, quasi-compact et totalement discontinu.

Il y a eu beaucoup d'extensions de cette idée, avec tout ce que P. Johnstone a appelé "pointless topology". Par exemple il existe une dualité entre

¹Université de Caen

la catégorie des treillis locaux spatiaux (anglais : *spatial frames*) et celle des espaces topologiques sobres. La logique sous-jacente est ici plutôt la logique intuitionniste (encore que...).

Mais quittons plutôt le calcul propositionnel pour aborder celui des formules du premier ordre par le biais des esquisses (mixtes) d'Ehresmann.

Soit \mathbf{E} une petite esquisse, que nous imaginerons comme une théorie du premier ordre (infinitaire) classique. Un modèle de \mathbf{E} est un foncteur de \mathbf{E} vers $\mathcal{E}ns$ qui envoie les cônes projectifs (resp. inductifs) distingués de \mathbf{E} sur des cônes limite projective (resp. inductive) dans $\mathcal{E}ns$. On dispose de la catégorie $\mathbf{C} = \mathcal{M}od(\mathbf{E})$ dont les objets sont les modèles de \mathbf{E} et dont les flèches sont les transformations naturelles entre modèles. On démontre que cette catégorie est *modelable* (certains disent aujourd'hui *accessible*), c'est-à-dire qu'elle est localement petite et qu'il existe un cardinal régulier κ (suffisamment grand) tel que :

- (a) \mathbf{C} a les petites limites κ -filtrantes ;
- (b) la sous-catégorie \mathbf{C}_κ des objets κ -présentables est essentiellement petite ;
- (c) pour tout objet X de \mathbf{C} , la catégorie \mathbf{C}_κ/X est κ -filtrante et X est canoniquement limite inductive du foncteur canonique de \mathbf{C}_κ/X vers \mathbf{C} .

On remarquera que si \mathbf{C} est modelable, \mathbf{C} est la complétée par limites inductives κ -filtrantes de \mathbf{C}_κ .

La notion de catégorie modelable et le théorème ci-dessus apparaissent dans C. Lair, *Catégories modelables et catégories esquissables*, Diagrammes 7 (1981), où il est aussi constaté que toute catégorie modelable est équivalente à la catégorie des modèles d'une petite esquisse. Une différence importante avec la situation de Stone est qu'il n'y a pas, dans le cas général, d'esquisse "canonique" associée à une catégorie modelable donnée. Sur ces sujets, consulter aussi M. Makkai and R. Paré, *Accessible categories : the foundations of categorical model theory*, Contemporary Mathematics 104 (AMS, 1990).

J'ai le sentiment persistant que les catégories modelables ont une saveur topologique d'espaces compacts, ou plutôt qu'elles sont aux catégories petites (dont elles gardent beaucoup de propriétés) ce que les espaces compacts sont aux espaces finis.

Est-il possible de préciser cette impression? Une idée pourrait être d'étudier les propriétés de la *topologie de Scott* sur (la classe préordonnée des objets d') une catégorie κ -modelable. On convient de dire qu'une sous-classe O de $Ob(\mathbf{C})$ est ouverte si et seulement si :

- (1) pour toute flèche $f : A \longrightarrow B$ telle que $A \in O$, alors $B \in O$;
- (2) pour tout diagramme κ -filtrant $F : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{C}$ tel que $\varinjlim F \in O$, il existe un objet I de \mathbf{I} tel que $F(I) \in O$.

Malheureusement, il est clair que la topologie de Scott devient catastrophiquement grossière dès qu'on sort du cas des préordres. Il faudrait vraisemblablement penser en termes, hélas plus ésotériques, de sites de Grothendieck, comme dans P.Johnstone and A.Joyal, *Continuous categories and exponential toposes*, Journal of Pure and Applied Algebra 25 (1982).

Dans tout ce qui précède, toutes les esquisses ont été supposées petites. On sait depuis longtemps que certaines catégories ne sont équivalentes à la catégorie des modèles d'une esquisse que si on autorise celle-ci à être grande. Les exemples rituels sont *Top*, *Ens^{op}* et ... *Esq*. Les catégories localement petites qui sont "esquissables par une esquisse petite ou grande" sont exactement les catégories *karoubiennes* (c.-à-d. dans lesquelles tous les idempotents sont scindés). Poursuivant l'analogie topologique ci-dessus, il est tentant de dire que les catégories modelables sont aux catégories karoubiennes ce que les espaces compacts sont aux espaces complets (on sait depuis Lawvere que le complété à la Cauchy est une enveloppe karoubienne $\overline{\mathbf{R}}_+$ -enrichie).

La correspondance entre esquisses et catégories modelables ne conduit pas à une dualité au sens strict du mot. Il n'y a pas même, nous l'avons dit, de bijection naturelle entre les unes et les autres. Et un foncteur $Mod(\mathbf{E}_2) \longrightarrow Mod(\mathbf{E}_1)$ commutant aux limites inductives suffisamment filtrantes n'est pas forcément induit par un homomorphisme de \mathbf{E}_1 vers \mathbf{E}_2 . On retrouve ici le reproche qui est très régulièrement fait aux esquisses : elles ne sont pas des théories complètes (dans le sens de déductivement closes), mais seulement des *axiomatiques* pour de telles théories, ou si l'on préfère des *présentations* ou des *systèmes de générateurs et de relations* pour des catégories à limites. Naturellement, il est loisible de remplacer les esquisses par les théories complètes qu'elles engendrent. Il faut noter qu'on n'y gagnera pas pour autant de vraie dualité, car il demeure une importante difficulté technique, l'impossibilité de

contrôler correctement certains cardinaux infinis. Mais ce qu'on ne gagnera pas en élégance conceptuelle, on le perdra en souplesse de calcul.

Imaginons que l'on veuille seulement montrer qu'une certaine catégorie un peu compliquée est modelable : il faut identifier les objets présentables, ce qui risque d'être très délicat. Or c'est inutile, puisque la première esquisse venue fera l'affaire ! C'est ainsi que la méthode des esquisses a pu remporter des succès (assez) faciles et qui ont pu sembler louches à certains. Dans mon article *The logic of structures*, à paraître dans le Journal of Pure and Applied Algebra, j'ai signalé quelques applications que je trouve spectaculaires de l'algèbre (à la fois très riche et très simple) des esquisses à celle (beaucoup plus mystérieuse) des catégories modelables.

Terminons par une citation, extraite de S. Abramski, *Domain theory in logical form*, Annals of Pure and Applied Logic 51 (1991). En y remplaçant *Frame*, *Set* et *Locale* respectivement par *Esq*, *Graph* et *CATMOD*, elle résume parfaitement la philosophie que je viens de défendre.

“Note that *Frame* is a concrete category of structured sets and structure-preserving maps, and consequently convenient to deal with (for example it is monadic over *Set*). Thus we study *Locale* via *Frame* ; but it is *Locale* which is the proposed alternative or replacement for *Top*, and hence the ultimate object of study.”

Université de Caen
UFR de Sciences
Département de mathématiques
14032 Caen Cedex