CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

FRANCIS BORCEUX
GILBERTE VAN DEN BOSSCHE

Structure des topologies d'un topos

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 25, n^{o} 1 (1984), p. 37-39

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1984__25_1_37_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES — *Vol. XXV-1 (1984)*

STRUCTURE DES TOPOLOGIES D'UN TOPOS

par Francis BORCEUX et Gilberte VAN DEN BOSSCHE

Toute topologie $j: \Omega \to \Omega$ dans un topos élémentaire E classifie un sous-objet $D_j \rightarrowtail \Omega$. L'inclusion entre sous-objets de Ω fournit donc une relation d'ordre sur l'ensemble des topologies du topos E. L'objet de cette Note est démontrer que :

THÉORÈME. *Pour la relation d'ordre décrite ci-dessus, l'ensemble des topologies sur un topos élémentaire constitue une algèbre de Heyting.*

On se référera à [2] où le théorème précédent est suggéré dans l'exercice 5-9. Nous en donnons ici une démonstration constructive basée sur un résultat de Joyal permettant de construire la topologie engendrée par un sous-objet de Ω (cf. [2], 3-58). En particulier (cf. [2], 3-59), étant donné un monomorphisme $u: A \rightarrowtail B$ de E, il existe toujours une plus petite topologie pour laquelle u est dense et une plus grande topologie pour laquelle u est fermé.

Rappelons tout d'abord que, si j_1, j_2 sont deux topologies sur E, $j_1 \wedge j_2 : \Omega \to \Omega$ est le morphisme classifiant $D_{j_1} \cap D_{j_2}$ (cf. [2], Exercice 3-1) et $j_1 \vee j_2 : \Omega \to \Omega$ est la topologie engendrée par $D_{j_1} \cup D_{j_2}$ (cf. [2], 3-59-i). Nous allons prouver que $j_1 \Rightarrow j_2 : \Omega \to \Omega$ existe et est la plus grande topologie telle que $(D_{j_1} \Rightarrow D_{j_2}) \rightarrowtail \Omega$ soit fermé.

En notant $\bar{A}^j \rightarrowtail B$ la fermeture de $A \rightarrowtail B$ pour la topologie j, on a aussitôt :

LEMME 1. *Soit* j_1, j_2 *deux topologies sur* E, *alors*

$$(j_1 \leq j_2) \Leftrightarrow (\forall u: A \rightarrowtail B,\ \bar{A}^{j_1} \leq \bar{A}^{j_2}).$$

car D_j est la j-fermeture du *Vrai* dans Ω (cf. [2], 3-14). □

LEMME 2. *Soit* j_1, j_2, j_3 *trois topologies sur* E, *alors*

$$(D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3} \text{ est } j_1\text{-fermé}) \Leftrightarrow (D_{j_1} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})).$$

L'implication de gauche à droite résulte de

$$1 \leq D_{j_3} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})$$

et du fait que D_{j_1} est la j_1-fermeture de 1 dans Ω.

Réciproquement, soit $D_{j_1} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})$. La thèse se ramène à prouver que

$$\begin{aligned}(D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3} \text{ et } j_2\text{-fermé}) &\Leftrightarrow (\overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}))\\ &\Leftrightarrow (D_{j_2} \wedge \overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1} \leq D_{j_3}).\end{aligned}$$

Considérons le diagramme suivant où les carrés sont des produits fibrés

$$\begin{tikzcd}
D_{j_2} \wedge (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & D_{j_2} \wedge (\overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1}) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & D_{j_2} \arrow[d, tail] \\
D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3} \arrow[r, tail] & \overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1} \arrow[r, tail] & \Omega .
\end{tikzcd}$$

Les produits fibrés commutant avec les j_1-fermetures, il en résulte que $D_{j_2} \wedge (\overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1})$ est la j_1-fermeture de $D_{j_2} \wedge (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})$ dans D_{j_2}. Par ailleurs 1 étant j_2-dense dans D_{j_2}, D_{j_2} est la j_2-fermeture de

$$D_{j_2} \wedge (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})$$

dans D_{j_2}. Il en résulte que $D_{j_2} \wedge (\overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1})$ est la $j_1 \wedge j_2$-fermeture de

$$D_{j_2} \wedge (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}) = D_{j_2} \wedge D_{j_3}$$

dans D_{j_2}. Comme par hypothèse $j_1 \wedge j_2 \leq j_3$ et $D_{j_2} \wedge D_{j_3}$ est j_3-fermé dans D_{j_2}, nous concluons que

$$D_{j_2} \wedge (\overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1}) = D_{j_2} \wedge D_{j_3} \leq D_{j_3}. \qquad \square$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Soit donc j_1, j_2, j_3 trois topologies sur E. Notons j la plus grande topologie telle que $D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}$ soit fermé dans Ω. Il s'agit de prouver que $j = (j_2 \Rightarrow j_3)$, c'est-à-dire

$$j_1 \wedge j_2 \leq j_3 \quad \Leftrightarrow \quad j_1 \leq j.$$

En effet, grâce au Lemme 1 :

$$j_1 \wedge j_2 \leq j_3 \rightarrow D_{j_1} \cap D_{j_2} \leq D_{j_3} \rightarrow D_{j_1} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})$$
$$\rightarrow (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3} \text{ est } j_1\text{-fermé}) \rightarrow j_1 \leq j,$$

et réciproquement,

$$j_1 \leq j \rightarrow D_{j_1} \leq D_j \rightarrow D_{j_1} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}) \rightarrow D_{j_1} \cap D_{j_2} \leq D_{j_3}$$
$$\rightarrow j_1 \wedge j_2 \leq j_3 . \qquad \square$$

Signalons pour terminer que, lorsque le topos E est de Grothendieck, l'algèbre de Heyting des topologies est en fait complète (cf. [1]).

BIBLIOGRAPHIE.

1. F. BORCEUX & G. VAN DEN BOSSCHE, The structure of localizations, To appear *in Revue Roum. Math. Pures Appl.*

2. P. JOHNSTONE, *Topos Theory*, Academic Press, 1977.

Institut de Mathématique Pure et Appliquée
Université Catholique de Louvain
Chemin du Cyclotron 2
B-1348 LOUVAIN-LA-NEUVE
BELGIQUE