

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

PAUL VER EECKE

À propos d'un théorème de Charles Ehresmann sur les feuilletages

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
22, n° 4 (1981), p. 453-455

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_4_453_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**À PROPOS D'UN THÉORÈME DE CHARLES EHRESMANN
SUR LES FEUILLETAGES**

par Paul VER EECKE

Une submersion surjective $f: V \rightarrow W$ de variétés séparées connexes de classe C^2 est une fibration pourvu que V soit compacte, ou que les $f^{-1}(x)$, $x \in W$, soient compacts et connexes. Tel est l'énoncé donné par C. Ehresmann [2, 3, 4]. Ces deux hypothèses alternatives peuvent être réunies en une seule, formulée dans le Théorème 2 ci-dessous, dont le Corollaire contient le résultat d'Ehresmann.

Etant donnée une variété V de dimension finie et de classe C^2 , munie d'un feuilletage F définissant sur V la relation d'équivalence ouverte ρ , on sait que l'espace quotient V/ρ est une variété telle que l'application canonique $\psi: V \rightarrow V/\rho$ soit une submersion, pourvu qu'il existe une submersion f de V sur une variété W telle que les feuilles de F soient les composantes connexes des $f^{-1}(x)$, $x \in W$. On dit alors que F est simple [5]. On dira que F est une fibration si, en outre, $\psi: V \rightarrow V/\rho$ est une fibration. Au moyen du théorème de stabilité locale [7], et compte tenu de ce qu'un feuilletage simple est sans holonomie, on obtient aisément [8] le résultat classique suivant :

THEOREME 1. *Soit V une variété feuilletée séparée de classe C^r , $r \geq 2$, dont les feuilles sont supposées compactes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) F est simple ;*
- ii) F est sans holonomie ;*
- iii) F est une fibration.*

On peut alors énoncer :

THEOREME 2. Soit $f: V \rightarrow W$ une submersion surjective de variétés connexes séparées de classe C^r , $r \geq 2$, telle que les $f^{-1}(x)$, $x \in W$, soient compacts. Alors f est une fibration si et seulement si f est fermée.

Il est aisé de voir que la condition est nécessaire ; montrons qu'elle est suffisante. Le feuilletage F défini par f étant simple, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \psi \searrow & & \nearrow \bar{f} \\ & V/\rho & \end{array}$$

où ψ est une fibration de variétés d'après le théorème précédent et où \bar{f} est un morphisme étale tel que les $\bar{f}^{-1}(x)$, $x \in W$, soient finis. D'autre part \bar{f} est fermée parce que ψ est surjective et f fermée. Donc \bar{f} est un revêtement de type fini [1, page 82]. Il en résulte que $f = \bar{f} \circ \psi$ est une fibration.

COROLLAIRE. Pour qu'une surjection surjective $f: V \rightarrow W$ de variétés connexes séparées de classe C^r , $r \geq 2$, soit une fibration, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

- i) V est compacte ;
- ii) les $f^{-1}(x)$, $x \in W$, sont compacts connexes ;
- iii) f est propre.

On remarque, en effet, que (ii) entraîne que le morphisme étale $\bar{f}: V/\rho \rightarrow W$ est un difféomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE.

1. J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'Analyse, Tome 3*, Gauthier-Villars, 1970.
2. C. EHRESMANN, Sur les espaces fibrés différentiables, *C.R.A.S. Paris* 224 (1947), 1611-1612.
3. C. EHRESMANN, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Colloque de Topologie Bruxelles*, C. B. R. M. (1950), 29-55.
4. C. EHRESMANN, Sur la théorie des variétés feuilletées, *Rend. Mat. e Appl. Ser. V, X-1-2*, Rome (1951), 64-83.
5. A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) 16 (1962) 367-379.
6. H. B. LAWSON, The quantitative theory of foliations, *C. B. M. S. regional conference*, 1977.
7. R. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, A. S. I. 1183, Hermann, Paris, 1952.
8. P. VEREECKE, *Variétés feuilletées*, Monographies de l'Inst. de Math. Univ. Catholique de Louvain (à paraître).

U. E. R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS CEDEX