CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

GEORGES REEB

La mathématique non standard vieille de soixante ans ?

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, n° 2 (1981), p. 149-154

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_2_149_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XXII-2 (1981)

3^e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

LA MATHÉMATIQUE NON STANDARD VIEILLE DE SOIXANTE ANS?

par Georges REEB

L'exposé qui suit est lié à la personnalité de Charles Ehresmann, à plus d'un titre; en particulier, mon maître avait, dès 1945, posé oralement le problème d'une théorie mathématique du moiré (et aussi, je le rappelle au passage, des cristaux liquides). Le cours des choses a fait que (les suggestions sur les cristaux liquides ont abouti selon les prévisions initiales, alors que) les résultats sur le moiré par Harthong, qui ignorait les suggestions de C. Ehresmann, sont tout à fait récents.

Notre thèse ici est de rappeler que les méthodes de l'analyse non-classique (a.n.c.) ou non standard d'une part, permettent d'attaquer efficacement des problèmes, naguère dédaignés, dont le moiré fournit un exemple remarquable, et que d'autre part, ces méthodes dérivent des interrogations qui, depuis plus de soixante ans, accompagnent l'investigation des problèmes des fondements en mathématiques. Ainsi D. Hilbert - pour nous en tenir à un seul nom - a montré clairement, dans son célèbre article sur l'infini, comment la formalisation (par exemple N, R, ...) de notions concrètes (les entiers de tout le monde, les points du continu intuitifs) introduit nécessairement, en quelque sorte contre la vigilance du formalisateur d'abondants objets idéaux, non désirés. On peut dire que la mathématique non classique consiste - au delà des immenses commodités du formalisme - à tirer parti de la distinction entre objets concrets de la mathématique intuitive qu'il s'agit de formaliser et des intrus idéaux inévitables lors de la formalisation. C'est l'insigne mérite d'A. Robinson et de ses continuateurs d'avoir sensibilisé les mathématiciens à cette distinction féconde, mais d'apparence subtile au départ.

Il est certes curieux de constater que la stérile conception très répandue d'une mathématique formelle qui capterait exactement les objets concrets dont elle entend traiter, est dénuée de tout fondement à ce jour. Cela est d'autant plus curieux que les ancêtres: Brouwer, Hilbert, Löwenheim, Skolem, Gödel, V. Neumann ... avaient clairement vu que formalisation signifiait *intrus*.

1. SUR LA THÉORIE DU MOIRÉ

Nous traitons ici de quelques points de la théorie du moiré unidimensionnel, en essayant de convaincre le lecteur que le langage de l'a. n.c. (caractérisé par l'occurence des vocables: standard, microscopique, macroscopique, infiniment petit, fini, infiniment grand) est à peu près indispensable pour parler d'une manière réaliste et cohérente du moiré.

Un *moiré sur* R est défini par la donnée d'une fonction de répartition $F(x)$ sur R vérifiant les conditions suivantes:

i) $F(0)=0$;

ii) F est une fonction non décroissante ;

iii) Pour tout couple $(a,b)\in \mathrm{R}^2$, $|F(b)-F(a)|\leq|b-a|$.

Nous confondrons dans nos discours la fonction de répartition F, la mesure qui lui est associée, et la fonction de densité (notée f) qui, éventuellement, la définit. On notera qu'une éventuelle fonction de densité f vérifie $0\leq f(x)\leq 1$, et une évidente réciproque.

L'idée de cette définition est que la mesure $F(x)$ définit une opacité variable sur R, la quantité $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$, où $b>a$, mesurant la proportion de lumière, incidente uniforme tombant sur l'intervalle $[a,b]$ que le moiré laisse filtrer. L'opacité parfaite correspond alors à $f(x)=0$ et la transparence parfaite à $f(x)=1$.

Le lecteur comprendra tout de suite que deux moirés ayant pour fonctions de densité f, g réalisent par superposition un moiré ayant pour fonction de densité le produit $f.g$.

Un moiré sera dit *macroscopique* si sa fonction de répartition F

est une fonction standard.

Un premier théorème intéressant, et qui traduit convenablement nos idées sur le moiré, s'énonce ainsi :

A un moiré G donné correspond toujours un moiré macroscopique F ayant à l'observation les mêmes propriétés optiques que G.

La locution «à l'observation» signifie que pour a, b standard, les proportions $G(b)-G(a)$, $F(b)-F(a)$ sont infiniment proches. La démonstration du théorème est évidente, il suffit de définir la fonction F, pour x standard, par

$$F(x) = \text{approximation standard de } G(x).$$

Donnons-nous maintenant deux moirés ayant les fonctions de densité f, g où :

$2f(x) = sin(\phi(x)/a) + 1$, $a > 0$ fixé et infiniment petit,

$2g(x) = sin(\psi(x)/a) + 1$,

où ϕ est standard, où $\phi(x)$, $\psi(x)$ sont, pour tout x, infiniment proches.

On comprendra en quoi ces moirés ont des structures fines, périodiques, voisines. Les moirés macroscopiques associés sont, en un sens évident, uniformément gris. Etudions le moiré résultant de la superposition de ces deux structures fines; il a pour fonction de densité :

$$4h(x) = (1 + sin(\phi/a))(1 + sin(\psi/a)).$$

Dans ce produit, après développement, les termes 1, $sin(\phi/a)$, $sin(\psi/a)$ donnent macroscopiquement de la « grisaille »; seul le terme

$$sin(\phi/a)\, sin(\psi/a)$$

est intéressant; or :

$$2\, sin(\phi/a)\, sin(\psi/a) = cos \frac{\phi(x)-\psi(x)}{a} - cos \frac{\phi(x)+\psi(x)}{a}.$$

Finalement, éliminant encore une grisaille, seul le terme :

$$cos \mu(x) = cos \frac{\phi(x)-\psi(x)}{a}$$

est intéressant et rend compte des motifs du moiré éventuellement visibles à l'oeil nu.

On voit que finalement l'hypothèse intéressante consiste à supposer qu'il existe une fonction standard $\lambda(x)$ telle que pour tout x, les valeurs $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ soient infiniment proches. La fonction $\lambda(x)$ décrit alors le motif observé.

Un cas très simple où l'hypothèse est vérifiée est celui où $\phi(x)$ est continûment dérivable et où $\psi(x) = \phi(x-ua)$, où u est standard et fixe (ce cas mérite le nom de : *moiré de translation*). Dans ce cas, on a : $\lambda(x) = u\phi'(x)$. Cette dernière égalité traduit une propriété bien connue du moiré.

2. SUR LA THÉORIE I.S.T. (NELSON) DE L'A.N.C.

Nous rappelons ici la théorie formalisée, proposée sous le sigle I.S.T. pour développer l'a.n.c. La théorie I.S.T. permet très vite de parler le langage utilisé en 1.

I.S.T. est donc la théorie formelle obtenue en adjoignant à la théorie Z.F.C. (Zermelo-Fraenkel, avec axiome du choix) un prédicat unaire, primitif *stand( )* et trois axiomes nommés précisément I, S et T. L'énoncé de ces trois axiomes demande quelque technicité et le débutant peut faire ses premiers pas dans la théorie, en substituant à I, S, T des conséquences judicieusement choisies de I, S, T. Nous proposons le choix suivant :

T' : *Soit $A(x)$ une formule interne (i. e. appartenant à Z.F.C.) contenant x comme seule variable libre, alors :*

$$\exists x\,!\,A(x) \implies stand(x)$$

(ici $\exists\,!$ signifie « $\exists$ un unique »).

Cet axiome entraîne qu'il y a beaucoup d'objets standard, par exemple $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ N, R, $\mathcal{P}$(N), $\mathcal{P}$(R), ...

I' : *Il existe un ensemble fini F tel que :*

$$stand(x) \implies x \in F\,.$$

Cet ensemble F est ni standard, ni unique ; il entraîne qu'il existe de nombreux objets non standard (ainsi tout x, $x \notin F$, est non standard), S' : *Soit A un ensemble standard et $B \subset A$ une partie éventuellement non standard de A. Alors il existe un ensemble standard B^{st}* (dont l'unicité résulte de T') tel que :

$$stand(x) \text{ et } x \in B^{st} \Longleftrightarrow stand(x) \text{ et } x \in B.$$

Cet axiome permet d'associer à des objets initialement non standard des objets standard.

Nelson explique dans un article encore inédit comment l'usage que font les mathématiciens de l'expression non formalisée «pour x fixé» lui a suggéré sa théorie formelle et les propriétés de non-contradiction relative et de conservation. Nous allons montrer rapidement en 3 comment la notion d'entier naïf, ou plus généralement d'objet Naïf, conduit à des réflexions présentant quelque analogie avec I. S. T. et dont la non-contradiction et la conservation sont évidentes.

3. ENTIERS NAÏFS, OBJETS NAÏFS

Nous appellerons *naïfs* les éléments de N déclarés tels par application des seuls principes suivants :

i) 0 est réputé naïf,

ii) si x est connu pour être naïf, alors $x+1$ est réputé naïf.

Ainsi, $0, 1, 2, 3, \dots, 10^{10}\dots$ sont naïfs. Mais rien ne nous autorise à ériger les naïfs en ensemble. Considérons un objet a, intervenant dans un texte mathématique et vérifiant $a \in$ N. Dire que cet objet a est naïf n'a de sens que si une «démonstration» montre que a est naïf, ou au contraire qu'il ne l'est pas. Mais deux mathématiciens n'auront pas de querelle sur le fait que a est naïf, ou qu'il soit non naïf, ou que, pour le moment, ils ne sont pas à même d'en décider. En ce sens, le vocable «naïf» jouit d'un statut analogue à celui du vocable «tel énoncé est un théorème».

La thèse dont nous avons parlé au début de cet article peut être énoncée ainsi :

«Il y a dans N des éléments non naïfs.»

On franchit facilement un autre pas dans l'escalade en définissant plus généralement une notion d'objet Naïf.

Un objet sera réputé *Naïf* s'il est représenté par un *terme* (au sens que Bourbaki donne à ce mot). La thèse généralisée peut alors s'exprimer ainsi :

«Il y a un ensemble fini F tel que tout objet Naïf a soit un élément de F.»

Les entiers naïfs sont évidemment des objets Naïfs, la réciproque se trouve par contre être en défaut (même pour les éléments de N).

Si A est un objet Naïf non vide, alors τA représente un élément Naïf de A (ici τ est le tau de Hilbert). Il en résulte que deux objets Naïfs, ayant les mêmes éléments Naïfs, sont égaux (on reconnait ici une propriété analogue à T).

A partir de là, il est possible de suivre d'assez près les développements habituels de l'a.n.c. avec au moins un bénéfice que nous avons dejà souligné: la non-contradiction et la conservation sont évidentes. Le prix à payer consiste dans la manipulation non formalisée de la notion concrète d'objet Naïf. En ce sens, la théorie I.S.T. formalisée est supérieure à notre considération d'objets Naïfs dont l'intérêt se réduit à l'ordre didactique ou heuristique.

BIBLIOGRAPHIE

L'ouvrage fondamental pour l'a.n.c. est toujours :

A. ROBINSON, *Non standard Analysis*, North Holland, 1974.

L'article fondamental de Nelson permet également l'accès à la bibliographie :

E. NELSON, Internal set theory, *Bull. A.M.S.* 83 (1977), 1165-1198.

Pour Hilbert, problème de l'infini, voir :

D. HILBERT, Das Unendliche, *Math. Ann.* 95 (1925), 161-190.

Les articles suivants concement des applications assez élémentaires de l'a.n.c.; des exemplaires sont disponibles sur demande adressée à :

I.R.M.A., 91 G^{al} Zimmer, 67000 STRASBOURG.

J. HARTHONG, *Le moiré* ; DIENER, CALLOT, BENOIT, *Chasse au canard;* R. LUTZ, M. GOSE, *Analyse non classique.*

Département de Mathématiques, U.L.P.,
7 rue René Descartes, 67084 STRASBOURG CEDEX.