

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

JEAN PRADINES

## **Échelles et faisceaux sur les quotients de feuilletages**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 22, n° 1 (1981), p. 73-83

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1981\\_\\_22\\_1\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_1_73_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## EHELLES ET FAISCEAUX SUR LES QUOTIENTS DE FEUILLETAGES

par Jean PRADINES

### 0. INTRODUCTION.

Le travail que nous présentons sera développé dans la thèse de troisième cycle de C. Cumenge [C]. Il utilise des idées et des résultats développés dans la thèse de doctorat d'Etat de J. Wouafo Kanga [W] et résumés dans [PW<sub>1</sub>], [PW<sub>2</sub>].

L'origine de ce travail est dans la thèse de Raymond Barre [B] dans laquelle les méthodes de la cohomologie étale sont étendues à des variétés généralisées, appelées Q-variétés. En fait, la définition des Q-variétés est précisément une définition ad hoc pour se prêter à une telle généralisation.

En revanche, les exemples connus de Q-variétés sont peu nombreux. L'un des plus importants est le quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe immergé non nécessairement fermé. Un autre est constitué des espaces quotients de certains feuilletages.

En fait, il résulte de ce qui suit que toutes les Q-variétés à topologie séparable peuvent s'interpréter comme des espaces quotients de feuilletages. Mais ceux-ci ne sont pas quelconques. Ils doivent en particulier être sans holonomie (ce qui est une condition très restrictive), mais cette condition n'est même pas suffisante, comme le prouve un contre-exemple dans [P<sub>1</sub>], et on ne connaît pas actuellement de caractérisation simple de ces feuilletages.

*Notre but est d'étendre les constructions de Barre à des variétés plus générales, qui contiennent tous les quotients de feuilletages.*

Notre méthode illustre l'utilisation de divers concepts «catégo-

riques» en Géométrie Différentielle concrète, et c'est pourquoi ce thème nous a paru particulièrement approprié pour rendre hommage à la mémoire de Charles Ehresmann dans ce colloque qui lui est dédié.

Nous résumerons d'abord la méthode de Barre  $[\bar{B}]$ .

**1. RAPPELS SUR LA COHOMOLOGIE DES Q-VARIETES.**

Un *Q-atlas* de l'ensemble  $S$  est un triplet

$$\underline{X} = ( X \overset{q}{\dashrightarrow} S ),$$

où  $q$  est une surjection de la variété  $X$  sur l'ensemble  $S$ , satisfaisant aux deux conditions suivantes, dans lesquelles  $R = X \times_S X$  est le graphe de la relation d'équivalence définie dans  $X$  par  $q$  :

(i)  $R$  possède une structure de variété (nécessairement unique) telle que l'injection canonique  $i: R \rightarrow X \times X$  soit une immersion « stricte », c'est-à-dire définissant  $R$  comme sous-objet de  $X \times X$ . (Rappelons, à titre d'exemple, qu'une feuille d'un feuilletage d'une variété paracompacte est toujours strictement immergée dans la variété, mais non nécessairement plongée, comme le montre l'exemple des géodésiques du tore de pente irrationnelle).

(ii) Les projections canoniques  $\alpha, \beta: R \rightarrow X$  sont étales.

REMARQUE 1.1. Le «théorème de Godement» exprime que la relation  $R$  est régulière (c'est-à-dire  $S$  est une variété, éventuellement non séparée, et  $q$  une submersion) ssi  $i$  est un plongement (regular embedding).

Une structure de *Q-variété* sur l'ensemble  $S$  est définie par une classe de *Q-atlas* équivalents pour la relation suivante :

$\underline{X}_1$  et  $\underline{X}_2$  sont équivalents s'il existe une variété  $Z$  et des étalements  $f_i$  rendant commutatif le carré :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow q_2 \\ X_1 & \overset{q_1}{\dashrightarrow} & S \end{array}$$

(Cette définition équivaut à celle donnée dans  $[\bar{B}]$ .)

On peut définir de façon naturelle les Q-morphismes, ainsi que les Q-submersions, Q-immersions et Q-étalements, et on obtient une catégorie  $\mathcal{Q}$  qui contient la sous-catégorie  $\mathcal{D} = \text{Dif}$  comme sous-catégorie pleine.

Dans cette identification, les Q-atlas s'identifient aux Q-morphismes étales surjectifs de but  $S$  dont la source est une variété.

REMARQUE 1.2. Il est démontré dans  $[\bar{B}]$  que le théorème de Godement est vrai dans la catégorie  $\mathcal{Q}$ . De façon plus précise, elle possède une structure de «diptyque de Godement»  $[P_0]$  qui est précisément celle obtenue par complétion de la catégorie  $\mathcal{D}$  munie de la structure de «diptyque» définie par les immersions strictes et les surmersions (problème étudié lors du précédent colloque d'Amiens).

Les deux outils fondamentaux introduits par Barre sont alors les échelles et les faisceaux.

Commençons par un des principaux exemples. L'échelle de Koszul d'un Q-atlas  $\underline{X}$  est le complexe semi-simplicial défini par

$$K_n(\underline{X}) = \times_S^{n+1} X$$

muni des projections canoniques  $\partial_k^n$  sur  $K_{n-1}(\underline{X})$ , qui sont des étalements appartenant à  $\mathcal{D}$ , et de l'augmentation  $q$ .

En particulier, si  $S$  est une variété et  $X = \bigsqcup_i U_i$  un recouvrement de  $S$ , on obtient ainsi l'échelle de Čech du recouvrement constituée des recouvrements fournis par les intersections

$$U_{i_0 \dots i_n} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}.$$

Plus généralement, on veut admettre la possibilité de recouvrir à son tour chaque  $U_{i_0 \dots i_n}$ , ce qui conduit à la notion générale d'échelle  $E$ , définie comme étant un complexe semi-simplicial

$$\partial_k^n : E_n \rightarrow E_{n-1} \quad (0 \leq k \leq n),$$

formé d'étalements surjectifs, augmenté d'une surjection  $q: E_0 \dashrightarrow S$ , avec la condition supplémentaire que les factorisations canoniques  $E_{n+1} \rightarrow E'_{n+1}$

où  $E_{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} E_n$  est le «noyau simplicial» des  $\partial_k^n$ , soient des étalements surjectifs.

D'autre part on définit un *Q-préfaisceau*  $P$  comme étant un foncteur contravariant défini dans la catégorie dont les objets sont les variétés  $Q$ -étalées dans  $S$  et dont les morphismes sont les étalements, à valeurs dans  $Ab$ . Un *Q-faisceau* est défini en imposant une condition supplémentaire d'exactitude que nous n'explicitons pas ici.

A toute échelle  $E$  est alors associé un complexe  $C^*(E, P)$  dont la différentielle est donnée par

$$d_n = \sum_k (-1)^k P(\partial_k^{n+1})$$

et par suite des groupes d'homologie  $H^*(E, P)$ .

Introduisant un ensemble cofinal d'échelles convenable, et passant à la limite inductive, on définit la cohomologie  $H^*(S, P)$  de la  $Q$ -variété  $S$  à coefficients dans le préfaisceau  $P$ .

Cette cohomologie, qui généralise la cohomologie de Čech des variétés, a de bonnes propriétés. Notamment elle ne dépend que du faisceau engendré par le préfaisceau  $P$ , et associe aux suites exactes courtes de  $Q$ -faisceaux une suite exacte illimitée de cohomologie.

De plus, considérant le  $Q$ -faisceau  $\Omega^*$  des germes de formes différentielles, on a un théorème de de Rham selon lequel la cohomologie réelle  $H^*(S, \mathbb{R})$  s'obtient comme cohomologie totale du bicomplexe  $C^*(E, \Omega^*)$ .

Elle s'identifie aussi à la cohomologie définie par la méthode de Godbillon [G] à partir de la cohomologie singulière d'un  $Q$ -atlas par passage au quotient.

## 2. INTRODUCTION DES QF-VARIETES.

Pour les raisons annoncées, nous sommes conduits à généraliser la notion de  $Q$ -variété.

Nous introduisons la notion de *QF-atlas* (étale), et par suite de *QF-variété*, en remplaçant les conditions des  $Q$ -atlas par les suivantes :

- (i) (Homogénéité) La relation d'équivalence définie par  $q$  est «homo-

gène», c'est-à-dire que, pour tout couple  $(a, b)$  de points équivalents, il existe un difféomorphisme local  $h$  d'un voisinage de  $a$  sur un voisinage de  $b$  tel que  $h(x)$  soit équivalent à  $x$  pour tout  $x$ .

(ii) Les classes d'équivalence sont «totalemt discontinues» en ce sens que tout morphisme de variétés à valeurs dans une telle classe est localement constant.

Il résulte de [B] que tout Q-atlas est un QF-atlas, et que la catégorie  $\mathcal{Q}$  est une sous-catégorie pleine de la catégorie  $\mathcal{QF}$  des QF-variétés.

Notons que la condition (i) implique que les classes d'équivalence définies par un QF-atlas  $X$  peuvent être obtenues comme classes d'intransitivité d'un pseudo-groupe, que l'on peut considérer (en passant aux germes) comme un groupoïde différentiable  $[E_1]$ , étalé sur  $X$  par ses projections source et but  $\alpha, \beta$ . Nous l'appelons pseudo-groupe d'holonomie de  $X$  et le noterons  $K_1(X)$ , pour des raisons qui apparaîtront. Sa topologie n'est en général ni séparée ni séparable, même si celle de  $X$  l'est. L'immersion

$$i = (\beta, \alpha): K_1(X) \rightarrow X \times X$$

est en général non injective.

REMARQUE 2.1. On démontre [P<sub>3</sub>] que  $\mathcal{QF}$  contient aussi comme sous-catégorie pleine la catégorie des *V-variétés* de Satake [S], [B], qui sont localement des quotients de variétés par l'action d'un groupe fini de difféomorphismes. On peut les caractériser par la propriété d'admettre un QF-atlas  $X$  tel que  $K_1(X)$  soit séparé et que l'immersion  $i$  soit propre. Les *V-variétés* sont localement compactes.

### 3. RELATION AVEC LES FEUILLETAGES.

Suivant une idée de P. Molino [M], nous dirons que deux feuilletages  $(X_i, F_i)$  sont QF-équivalents, ou ont même structure transverse, s'il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{p_2} & X_2 \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow q_2 \\
 X_1 & \xrightarrow{q_1} & S
 \end{array}$$

où les  $p_i$  sont des surmersions et les  $q_i$  des surjections.

Une telle classe d'équivalence définit sur l'ensemble  $S$  une structure de *feuillage* ou *F-variété*.

REMARQUE 3.1. En réalité P. Molino définit une notion plus restrictive, en imposant que les  $p_i$  soient de plus «rétro-connexes», c'est-à-dire aient la propriété que l'image réciproque de tout point soit connexe. Cette notion équivaut, non trivialement  $[P_3]$ , à celle d'une classe d'équivalence de schémas de Van Est [VE] de type dénombrable. Ces notions comportent une information plus riche, mais sont plus délicates à manier. En outre, pour des raisons que nous exposons ailleurs  $[P_3]$ , elles conduisent aux mêmes invariants continus que celle qui est introduite ici.

A tout feuillage est associé (non canoniquement) un QF-atlas défini par l'équivalence induite sur une sous-variété transverse coupant toutes les feuilles. La QF-variété définie par ce QF-atlas ne dépend que du feuillage et, mieux, que de la F-variété qu'il définit.

Plus précisément la catégorie des F-variétés (au sens faible utilisé ici) s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie des QF-variétés.

REMARQUE 3.2. En utilisant une idée de G. Hector, on peut caractériser complètement les F-variétés parmi les QF-variétés  $[P_3]$ , problème laissé en suspens dans [W]: ce sont celles qui possèdent un QF-atlas dont la relation d'équivalence sous-jacente peut être engendrée par une famille *dénombrable* de difféomorphismes locaux.

REMARQUE 3.3. Dans ce même contexte, les V-variétés sont étroitement liées aux feuilletages ayant la propriété de stabilité de Reeb [R],  $[E_2]$ . Différentes caractérisations sont données dans  $[P_3]$ . On trouvera dans  $[P_2]$  des exemples de V-variétés qui peuvent s'interpréter comme des variétés à bords et à coins, munies d'une sorte de G-structure à groupe variable le long du bord. D'autres types de singularités des V-variétés peuvent être vus comme des points coniques.

L'exemple le plus simple de QF-variété qui n'est ni une Q-variété,

ni une  $V$ -variété est associé au feuilletage de Reeb de  $S_1 \times S_2$  ; il admet pour QF-atlas le quotient de  $R$  par le groupe des homothéties de rapport  $2^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

#### 4. ECHELLES ET PREFAISCEAUX POUR LES QF-VARIETES.

La propriété fondamentale sur laquelle repose l'extension des méthodes de Barre aux QF-variétés est l'existence de *produits fibrés* pour les couples de flèches (et plus généralement de limites finies) dans la catégorie  $\mathcal{QFE}$  des QF-étalements. Cette existence est non triviale et résulte des démonstrations, exposées dans [W], de l'existence de certains produits «pseudo-fibrés» dans  $\mathcal{QF}$ . Elle est beaucoup plus facile à établir dans le cas particulier où les sources des deux flèches sont des variétés, mais, même dans ce cas, il est intéressant de noter que l'ensemble sous-jacent au produit fibré *n'est pas en général le produit fibré ensembliste*, circonstance inhabituelle en Géométrie Différentielle.

Il en résulte que les catégories  $\mathcal{DE}/S$  (resp.  $\mathcal{QFE}/S$ ) des QF-étalement entre variétés (resp. QF-variétés) QF-étalées dans la QF-variété  $S$  possèdent des produits (notés  $\overset{*}{S}$  ou  $*$ ) et produits fibrés finis. On en déduit l'existence de *noyaux simpliciaux*.

En remplaçant alors le produit fibré ensembliste par le produit  $\overset{*}{S}$ , on peut étendre la définition des échelles et QF-échelles, construire le produit de deux QF-échelles, l'image réciproque d'une QF-échelle, et un ensemble cofinal d'échelles.

Notons une interprétation remarquable des premiers termes de l'échelle de Koszul d'un QF-atlas  $\underline{X}$  (considéré comme un objet de  $\mathcal{DE}/S$ ) définie par

$$K_n(\underline{X}) = \overset{n+1}{*} \underline{X}.$$

$K_1(\underline{X}) = \underline{X} * \underline{X}$  s'identifie au groupoïde d'holonomie de  $\underline{X}$  (déjà ainsi noté pour cette raison),  $\partial_0^1, \partial_1^1$  à  $\alpha, \beta: \underline{X} * \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ ,

$$K_2(\underline{X}) = \underline{X} * \underline{X} * \underline{X}$$

à l'ensemble des couples composables, et la loi de composition à



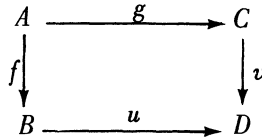
$$\partial_1^2: \mathcal{X} * \mathcal{X} * \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} * \mathcal{X}.$$

Ainsi, bien que le groupoïde ne soit plus ensemblistement «banal», comme dans le cas des Q-variétés, il demeure «banal» en un sens catégorique.

**5. DEFINITION DES QF-FAISCEAUX.**

Nous devons introduire une notion d'exactitude, que nous n'avons pas explicitée pour les Q-variétés.

Un carré commutatif



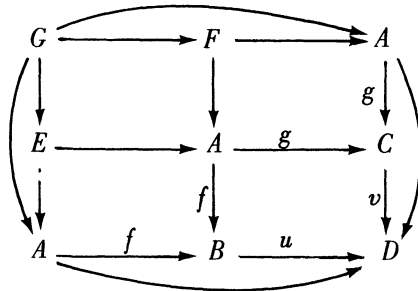
de  $\mathcal{DE}/S$  ou  $\mathcal{QF}/S$  sera dit un *E-carré* si ses côtés sont surjectifs ainsi que la flèche canonique  $A \rightarrow B \times_D C$ , et une *E-fourche* si de plus  $u = v$  (noter que la surjectivité de  $f$  et  $g$  est une conséquence).

On peut montrer que ceci entraîne que le carré est *cocartésien*, et par suite, dans le cas  $u = v$ , que  $u$  est le *conoyau* de  $f, g$ .

Les réciproques sont fausses en général. Toutefois, dans *Ens* et *Ab*, les *E\*-carrés*, définis par la propriété duale, s'identifient aux carrés cartésiens à côtés injectifs.

On définit alors un *QF-faisceau* comme un QF-préfaisceau transformant les sommes en produits et les E-fourches en E\*-fourches.

On peut en déduire qu'il transforme tout E-carré en un E\*-carré. On se sert pour cela du fait que tout E-carré se plonge dans une E-fourche comme suit :



A partir de ce point, la construction du QF-faisceau engendré par un QF-préfaisceau diverge notablement de la méthode suivie par Barre dans le cas des Q-faisceaux, car on peut montrer qu'il n'est pas en général possible de représenter un QF-faisceau par un objet de  $\mathcal{QFE}/S$ .

On utilise les étapes suivantes :

a) Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{DE}/S$ , on considère la restriction  $P_X$  du QF-préfaisceau  $P$  à la catégorie des sous-variétés ouvertes de  $X$  et des morphismes d'inclusion, d'où un préfaisceau au sens ordinaire sur la variété  $X$ , lequel engendre un faisceau de base  $X$ , représenté par une variété  $\tilde{P}X$  étalée sur  $X$ .

b) On étend  $\tilde{P}$  en un foncteur covariant, qui est tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{P}X & \xrightarrow{\tilde{P}h} & \tilde{P}Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

soient cartésiens.

c) On définit alors un nouveau préfaisceau  $\hat{P}$  en associant à  $X$  les sections de  $\tilde{P}X$  et en étendant  $\tilde{P}$  aux morphismes à l'aide de la propriété précédente.

De plus  $\hat{P}$  est muni d'une transformation naturelle  $\gamma: P \rightarrow \hat{P}$ . On démontre alors que  $\hat{P}$  est un QF-faisceau et que  $\gamma$  est un isomorphisme ssi  $P$  est un QF-faisceau, ou encore ssi les préfaisceaux  $P_X$  sont des faisceaux.

On dira que  $\hat{P}$  est le QF-faisceau engendré par  $P$ .

On démontre aussi, sans utiliser de représentation, que  $\hat{P}$  se prolonge en un foncteur contravariant exact (en général non représentable) défini sur  $\mathcal{QFE}/S$ .

On peut aussi associer à tout QF-préfaisceau un QF-faisceau représentable de la façon suivante : à partir d'un QF-atlas  $\mathcal{X}$  de  $S$ , on fait agir le groupoïde d'holonomie  $K_1(\mathcal{X})$  sur  $\tilde{P}X$ , et on montre que le quotient de cette action est une QF-variété  $B$ , que l'on peut munir, lorsque la catégorie des valeurs est  $Ab$ , d'une structure de groupe dans la catégo-

rie  $\mathcal{QF}\mathcal{E}/S$ . On peut alors considérer le foncteur  $\cdot *_3 B$ , qui est isomorphe au foncteur  $Hom(\cdot, B)$ , noté  $\bar{P}$ ; il peut être non isomorphe à  $\tilde{P}$ , mais l'est toutefois dans des cas étendus.

On trouvera dans [C] des critères de représentabilité ainsi que des exemples et contre-exemples, et l'étude des propriétés de la cohomologie ainsi introduite, notamment le théorème de de Rham pour les QF-variétés.

On notera qu'un des traits de la théorie est qu'elle apporte une information plus fine que la « cohomologie basique » des feuilletages, qui, dans le cadre présenté ici, s'obtiendrait comme cohomologie des formes (globales) invariantes par le pseudo-groupe d'holonomie.

Dans le cas des V-variétés, la confrontation avec la cohomologie étudiée par Satake [S] n'a pas encore été faite.

U. E. R. de Mathématiques  
 Université Paul Sabatier  
 31062 TOULOUSE CEDEX.

- B. W. BAILY, The decomposition theorem for V-manifolds, *Am. J. Maths.* 78 (1956), 862-888.
- $\bar{B}$ . R. BARRE, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 23 (1973), 227-312.
- C. C. CUMENGE, Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Univ. P. Sabatier, Toulouse, à paraître.
- E<sub>1</sub>. C. EHRESMANN, Coll. Géom. Diff. Globale Bruxelles, CBRM (1958), 137-150.
- E<sub>2</sub>. C. EHRESMANN, Structures feuilletées, *Proc. Fifth Canadian Math. Congress* (1961), 109-172.
- G. C. GODBILLON, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 17 (1967), 219-260.
- M. P. MOLINO, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 25 (1975), 279-284.
- P<sub>0</sub>. J. PRADINES, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XVI-3 (1975), 301-306.
- P<sub>1</sub>. J. PRADINES, *C. R. A. S. Paris* 288 (1979), 245-248.
- P<sub>2</sub>. J. PRADINES, *C. R. A. S. Paris* 286 (1978), 255-258.
- P<sub>3</sub>. J. PRADINES, Journée de Géométrie Transverse, Nov. 79, Paris 7, à paraître.
- PW<sub>1</sub>. J. PRADINES & J. WOUAFO KAMGA, *C. R. A. S. Paris* 283 (1976), 25-28.
- PW<sub>2</sub>. J. PRADINES & J. WOUAFO KAMGA, *C. R. A. S. Paris* 288 (1979), 717-720.
- R. G. REEB, *Variétés feuilletées*, Hermann, 1952, Paris.
- S. I. SATAKE, *Proc. N. A. S.* 42 (1956), 359-363.
- VE. BOUMA & VAN EST, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.* 81 (1978), 313-347.
- W. J. WOUAFO KAMGA, Thèse, 1979, Univ. P. Sabatier, Toulouse, à paraître dans *Esquisses Math.*, Amiens.