CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

MICHEL COSTE
MARIE-FRANÇOISE COSTE-ROY

Le topos étale réel d'un anneau

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, n° 1 (1981), p. 19-24
<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_1_19_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

3e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Vol. XXII-1 (1981)

LE TOPOS ETALE REEL D'UN ANNEAU

par *Michel COSTE* et *Marie-Françoise COSTE-ROY*

Notre but est de motiver l'introduction de ce topos [1] qui fournit un analogue réel au topos étale [2].

Il s'agit ici du «petit» topos étale réel (le spectre étale réel) associé à un anneau fixé, qui généralise dans un sens que nous précisons ici une variété algébrique affine réelle (non singulière) munie de son faisceau de fonctions de Nash et non du «gros» topos étale réel (le topos classifiant des anneaux réels clos locaux).

1. LE CAS DES VARIETES.

Soit V une variété affine réelle (définie par un nombre fini d'équations $P_1, \dots, P_m$ à coefficients dans un corps réel clos k) et

$$V(k) = \{ \vec{x} \in k^n \mid P_1(\vec{x}) = \dots = P_m(\vec{x}) = 0 \}.$$

L'ordre total sur k définit sur $V(k)$ une topologie naturelle appelée topologie euclidienne.

Nous allons définir deux topologies de Grothendieck:

a) *La topologie semi-algébrique sur* $V(k)$ définie par les ouverts semi-algébriques et les recouvrements finis.

Rappelons qu'un ouvert semi-algébrique est un ensemble semi-algébrique (combinaison booléenne d'ensembles de la forme

$$\{ \vec{x} \in k^n \mid P(\vec{x}) > 0 \})$$

qui est ouvert pour la topologie euclidienne. Les ouverts semi-algébriques sont aussi les ensembles obtenus par combinaison positive (unions et intersections finies) à partir des

$$\{ \vec{x} \in k^n \mid P(\vec{x}) > 0 \}$$

(voir par exemple [1]).

b) *La topologie étale réelle sur* $V(k)$:

On considére le site formé des morphismes étales de variétés de but V avec pour recouvrements les familles $W_i \to W$ de morphismes étales telles que $W_i(k) \to W(k)$ forme une famille surjective.

Le *topos étale réel de* $V(k)$ est le topos de faisceaux pour cette topologie.

THEOREME 1. *Le topos de faisceaux pour la topologie semi-algébrique sur* $V(k)$ *est spatial. Il coïncide avec le topos étale réel de* $V(k)$.

Le topos de faisceaux pour la topologie semi-algébrique sur $V(k)$ est cohérent. Il a donc suffisamment de points et est engendré par des sous-objets de 1.

La description de l'espace topologique et la preuve de la fin du théorème se formuleront agréablement dans le contexte des anneaux généraux.

NB. Ce théorème clarifie la situation et répond à des questions posées par Brumfiel [3], Knebusch et Delfs.

2. LE SPECTRE REEL D'UN ANNEAU (COMMUTATIF ET UNITAIRE) A.

Nous cherchons à définir une notion satisfaisante de points réels de l'anneau A.

Partons d'un morphisme de A dans un corps réel clos K. A ce morphisme correspond un idéal premier réel $f^{-1}(0)$ (un idéal I est réel si

$$\Sigma x_i^2 \in I \Rightarrow x_i \in I \text{)}$$

et un ordre total sur le corps résiduel $k(f^{-1}(0))$ induit par l'ordre total de K.

Réciproquement à un tel couple $(\wp, \leq)$ formé d'un idéal premier réel $\wp$ et d'un ordre total sur le corps résiduel correspond un morphisme

$$A \longrightarrow A_\wp \longrightarrow k(\wp) \longrightarrow K,$$

où K désigne la clôture réelle de $k(\wp)$ totalement ordonné par $\leq$.

On peut encore décrire les parties de A formées des éléments qui deviendront négatifs ou nuls dans K.

Un *précone premier sur* A est la donnée d'une partie α de A vérifiant les axiomes :

1° $1 \notin \alpha$,

2° $x \in \alpha \wedge y \in \alpha \Rightarrow x+y \in \alpha$,

3° $-x^2 \in \alpha$,

4° $xy \in \alpha \Leftrightarrow (x \in \alpha \wedge -y \in \alpha) \vee (-x \in \alpha \wedge y \in \alpha)$.

La donnée d'un précone premier α de A est équivalente à la donnée d'un idéal premier réel ($\wp = \alpha \cap -\alpha$) et d'un ordre total sur le corps résiduel (les éléments négatifs ou nuls sont ceux qui proviennent de α).

NB. D'un point de vue intuitionniste la «bonne notion» à axiomatiser serait celle des éléments qui deviennent strictement positifs. Notre choix est par contre plus conforme à la tradition des idéaux premiers...

Le *spectre réel de* A , noté $Spec_R\, A$, est l'espace topologique dont les points sont les précones premiers de A et dont les ouverts sont engendrés par les ouverts élémentaires

$$D_a = \{ \alpha \mid a \notin \alpha \} .$$

Le spectre réel de A est un espace spectral et cette notion est fonctorielle : si f est un morphisme de A dans B, $Spec_R\, f$ est une application continue de $Spec_R\, B$ dans $Spec_R\, A$.

Dans le cas où $A = k[V]$ (l'anneau de coordonnées d'une variété algèbrique affine réelle V dans un corps réel clos k) on a les résultats suivants : $V(k)$ muni de la topologie euclidienne est un sous-espace dense de $Spec_R\, k[V]$ par l'application i qui à $\vec{a} \in V(k)$ associe

$$\{ P \mid P(\vec{a}) \leq 0 \} .$$

De plus i induit une bijection entre les ouverts semi-algébriques de $V(k)$ et les ouverts quasi-compacts de $Spec_R\, k[V]$ [4].

Une conséquence immédiate de ces résultats est que le topos des faisceaux pour la topologie semi-algébrique sur $V(k)$ est le topos des faisceaux sur le spectre réel de $k[V]$.

Alors que $V(k)$, dans le cas où $k \neq \mathbb{R}$, a de mauvaises propriétés topologiques, $Spec_R k[V]$ est par contre très satisfaisant; il est en particulier localement connexe et il a un nombre fini de composantes connexes [4].

L'introduction du spectre réel fournit donc l'espace topologique du Théorème 1. Nous allons donner une définition générale du topos étale réel d'un anneau pour prouver le dernier morceau du Théorème 1.

3. LE TOPOS ETALE REEL DE A.

Considérons le site dont les objets sont les A-algèbres étales et dont les recouvrements sont les familles $f_i : C \to C_i$ avec f_i étale et

$$Spec_R\, C_i \xrightarrow{Spec_R\, f_i} Spec_R\, C$$

famille surjective sur $Spec_R\, C$.

Dans le cas où $A = k[V]$ la définition coïncide avec celle de 1, b) grâce aux résultats de 2.

Le *topos étale réel de* A est le topos des faisceaux pour cette topologie.

PROPOSITION. *Les points du topos étale réel de A sont les localisations strictes réelles de A.*

Une localisation stricte réelle de A est une A-algèbre ind-étale, hensélienne, de corps résiduel réel clos. Les localisations strictes réelles correspondent bijectivement aux précones premiers: à une localisation stricte réelle de A on associe les éléments de A dont l'image dans le corps résiduel de la localisation stricte réelle est négative ou nulle. Réciproquement au précone premier α on associe l'anneau A_α ainsi construit: on localise A en $\wp = \alpha \cap -\alpha$, puis on factorise le morphisme f de $A_\wp$ dans K, la clôture réelle de $k(\wp)$ pour l'ordre induit par α, de telle sorte que l'anneau obtenu soit hensélien de corps résiduel K, et initial parmi les factorisations de f à travers un anneau hensélien de corps résiduel K.

La preuve de la proposition est très semblable à celle du fait que les points du topos étale d'un anneau A sont les localisations strictes de

A (les A-algèbres ind-étales, henséliennes, locales, de corps résiduel séparablement clos [2]) [1].

THEOREME 2. *Le topos étale réel de* A *est le topos des faisceaux sur* $Spec_R\, A$.

Montrons d'abord que le topos étale réel est spatial. On sait [1] qu'un topos cohérent est spatial si et seulement si la catégorie de ses points est un ensemble ordonné.

D'après la proposition précédente, les points du topos étale réel de A sont les localisations strictes réelles de A. Il suffit donc de montrer qu'il y a au plus un morphisme de A-algèbres entre deux localisations strictes réelles [5].

Les points du topos correspondent bijectivement aux précones premiers. Enfin les deux topologies coïncident puisque, si f est étale, $Spec_R\, f$ est ouverte et que D_a est l'image d'un morphisme étale

$$A \to A[X]/X^2 - a[2a^{-1}] \quad [1].$$

COROLLAIRE [5]. *Si* $f: A \to B$ *est étale,* $Spec_R\, B$ *est étalé sur* $Spec_R\, A$.

4. LE FAISCEAU STRUCTURAL SUR $Spec_R\, A$.

Il y a sur $Spec_R\, A$ un faisceau d'anneaux sont les fibres sont les localisations strictes réelles de A qui est la « localisation stricte réelle générique » de A.

Au point α la fibre de ce faisceau est donc la A-algèbre A_α.

Le faisceau se décrit complètement comme suit : soit U un ouvert de $Spec_R\, A$; considérons le système filtrant des (C, ϕ) avec C une A-algèbre étale et ϕ une section de l'homéomorphisme local de $Spec_R\, C$ dans $Spec_R\, A$, avec pour morphismes de transition de (C, ϕ) dans (D, ψ) les morphismes de A-algèbres

$$f: C \to D \text{ tels que } \phi = Spec_R\, f \circ \psi .$$

$\mathcal{O}_{Spec_R A}$, le faisceau structural cherché, est le faisceau associé au préfaisceau qui à U associe la limite inductive $\mathcal{A}(U)$ du système filtrant ci-dessus.

(La preuve de ce résultat sera prochainement rédigée en détails.)

Dans le cas d'une variété algébrique affine réelle sans points singuliers, on retrouve l'image directe du faisceau de fonctions de Nash sur $V(\mathrm{R})$ (ou fonctions analytiques-algébriques : analytiques et vérifiant localement une équation polynomiale à coefficients polynomiaux) grâce à la description donnée par Artin et Mazur [6].

REFERENCES.

1. M. COSTE & M.-F. COSTE-ROY, Topologies for real algebraic geometry, *Topos theoretic methods in geometry*, Various Publ. Series 30, Aarhus Univ. 1979.
2. M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.L. VERDIER, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, *Lecture Notes in Math.* 270, Springer (1972).
3. G.W. BRUMFIEL, Partially ordered rings and semi-algebraic geometry, *Lecture Notes series* 37, Cambridge Univ. Press, 1979.
4. M.-F. COSTE-ROY, *Spectre réel d'un anneau et topos étale réel*, Thèse, Univ. Paris XIII, 1980.
5. M. COSTE & M.-F. COSTE-ROY, Le spectre étale réel d'un anneau est spatial, *C. R. A. S. Paris* 290 (1980), 91-94.
6. M. ARTIN & B. MAZUR, On periodic points, *Ann. of Math.* 81 (1965), 82-99.

Département de Mathématiques
Université Paris-Nord
Avenue J. B. Clément
93430 VILLETANEUSE