

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

GÉRARD BOURDAUD

Sur le théorème de complétion de Buchwalter-Pupier

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 17, n° 3 (1976), p. 327-331

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1976__17_3_327_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE THEOREME DE COMPLETION DE BUCHWALTER - PUPIER

par Gérard BOURDAUD

On propose une nouvelle démonstration de ce théorème, inspirée du théorème de complétion de Gillman - Jerison.

1. Propriétés des caractères.

Dans tout le texte, on désigne par X un espace uniforme, par $E(X)$ l'ensemble des écarts uniformément continus bornés de $X \times X$ dans \mathbf{R} et par $C_{ub}(X)$ l'algèbre des fonctions uniformément continues bornées de X dans \mathbf{R} ; on désignera par $Car(X)$ l'ensemble des caractères de l'algèbre $C_{ub}(X)$, c'est-à-dire des homomorphismes unitaires de $C_{ub}(X)$ dans \mathbf{R} ; si x est un élément de X , on note \hat{x} le caractère de Dirac $f \mapsto f(x)$; j désigne la transformation de Dirac

$$x \mapsto \hat{x} \text{ de } X \text{ dans } Car(X).$$

Il est clair que $C_{ub}(X)$ est un treillis pour les opérations usuelles; de plus (voir [1], 1.6):

PROPOSITION 1. *Tout caractère de $C_{ub}(X)$ est un homomorphisme entre treillis.*

Soit a un caractère de $C_{ub}(X)$ et f une fonction uniformément continue bornée sur X ; supposons un instant qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout élément x de X , on ait:

$$|a(f) - f(x)| \geq r;$$

ceci entraîne que la fonction $(f - a(f))^{-1}$ est uniformément continue et bornée sur X , donc que $f - a(f)$ est inversible dans $C_{ub}(X)$, ce que contredit la relation $a(f - a(f)) = 0$; d'où:

PROPOSITION 2. *Pour tout $a \in Car(X)$ et tout $f \in C_{ub}(X)$, on a:*

$$\inf_{x \in X} |a(f) - f(x)| = 0.$$

2. Prolongement des écarts.

Si $p \in E(X)$ et $x \in X$, on a $p(x, -) \in C_{ub}(X)$; on peut donc poser :

$$\forall a \in \text{Car}(X), \quad \bar{p}(x, a) = a(p(x, -)).$$

\bar{p} « prolonge » p , en ce sens que, pour $y \in X$, on a :

$$\bar{p}(x, \hat{y}) = p(x, y).$$

Par ailleurs, on montre, à l'aide de la Proposition 1, que \bar{p} est une fonction positive et bornée et que

$$(1) \quad \bar{p}(x, a) \leq \bar{p}(y, a) + p(x, y).$$

La relation (1) montre en particulier que la fonction $\bar{p}(-, a)$ est uniformément continue; pour $b \in \text{Car}(X)$, on peut donc poser ;

$$\bar{\bar{p}}(b, a) = b(\bar{p}(-, a)).$$

Il est clair que $\bar{\bar{p}}$ prolonge \bar{p} ; en utilisant de nouveau la Proposition 1 on montre que $\bar{\bar{p}}$ est une fonction positive et que

$$(2) \quad \bar{\bar{p}}(b, a) \leq \bar{\bar{p}}(c, b) + \bar{\bar{p}}(c, a).$$

Désignons par \hat{X} l'ensemble des caractères a tels que, pour tout $p \in E(X)$, on ait $\bar{\bar{p}}(a, a) = 0$; la relation (2) montre que $\bar{\bar{p}}$ est un écart sur \hat{X} ; en outre, il est clair que j applique X dans \hat{X} .

PROPOSITION 3. \hat{X} , muni de la structure uniforme déterminée par les écarts $\bar{\bar{p}}$, où p parcourt $E(X)$, est le complété séparé de X , via l'application j .

ESQUISSE DE LA DEMONSTRATION. La Proposition 2, appliquée à $a \in \hat{X}$ et à $\bar{p}(-, a)$, entraîne l'existence, pour tout $r > 0$, d'un $x \in X$ tel que l'on ait $\bar{p}(x, a) \leq r$; ceci montre que $j(X)$ est dense dans \hat{X} .

La relation $\bar{\bar{p}}(\hat{x}, \hat{y}) = p(x, y)$ montre que j est une application uniformément continue de X dans \hat{X} et même que X est l'espace uniforme initial déterminé par j et \hat{X} .

Si a et b sont deux caractères distincts, soit $f \in C_{ub}(X)$ telle que

$a(f) \neq b(f)$; si p désigne l'écart

$$p(x, y) = |f(x) - f(y)|,$$

on a (à l'aide de la Proposition 1) :

$$\bar{p}(a, b) = |a(f) - b(f)|,$$

ce qui montre que \hat{X} est séparé.

Soit \hat{F} un filtre de Cauchy sur \hat{X} ; pour $A \in \hat{F}$, $r > 0$ et $p \in E(X)$, on pose

$$T(A, p, r) = \{x \in X \mid \bar{p}(A, \hat{x}) \leq r\};$$

les $T(A, p, r)$ engendrent un filtre de Cauchy F sur X ; on peut poser, pour $f \in C_{ub}(X)$:

$$a(f) = \lim f(F).$$

On vérifie que $a \in \hat{X}$ et que $a = \lim \hat{F}$; ainsi \hat{X} est complet.

REMARQUE. Soit X un espace replet non compact. Munissons X de la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues toutes les applications continues de X dans \mathbf{R} . Alors X est un espace uniforme complet (voir [1], 15.14) et $Car(X)$ est le compactifié de Stone-Čech de X ; ceci montre qu'en général \hat{X} est strictement inclus dans $Car(X)$.

3. Ecarts et bornés uniformément équicontinus.

Soit A une partie bornée uniformément équicontinue de $C_{ub}(X)$; on définit un écart borné uniformément continu sur X en posant :

$$p_A(x, y) = \sup_{f \in A} |f(x) - f(y)|.$$

Inversement, à tout $p \in E(X)$ est associé un borné uniformément équicontinu de $C_{ub}(X)$, à savoir

$$A(p) = \{p(x, -) \mid x \in X\}.$$

On vérifie facilement que $p = p_{A(p)}$.

PROPOSITION 4. Soit A une partie bornée uniformément équicontinue de

$C_{ub}(X)$. A admet une borne supérieure dans $C_{ub}(X)$; si on adjoint à A les bornes supérieures de ses sous-ensembles, on obtient une partie bornée uniformément équicontinue stable par bornes supérieures.

En effet, si B est contenu dans A et si $g = \sup B$, on a :

$$|g(x) - g(y)| \leq p_A(x, y).$$

PROPOSITION 5. Soit A une partie bornée uniformément équicontinue de $C_{ub}(X)$ et a un caractère de $C_{ub}(X)$. Si $\bar{p}_A(a, a) = 0$, alors :

$$\inf_{x \in X} (\sup_{f \in A} |f(x) - a(f)|) = 0.$$

PREUVE. D'après la Proposition 2, si $\bar{p}_A(a, a) = 0$, c'est que, pour tout $r > 0$, il existe $x \in X$ tel que $\bar{p}_A(x, a) < r$. Si $f \in A$, on a :

$$|f(x) - a(f)| \leq \bar{p}_A(x, a),$$

ce qui achève la preuve.

4. Interprétation du complété.

PROPOSITION 6. Soit a un caractère de $C_{ub}(X)$; les énoncés suivants sont équivalents :

(i) Pour tout $p \in E(X)$, $\bar{p}(a, a) = 0$.

(ii) Pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ bornée uniformément équicontinue de $C_{ub}(X)$, on a :

$$a(\sup_{i \in I} f_i) = \sup_{i \in I} a(f_i).$$

(iii) La restriction de a à tout borné uniformément équicontinu A de $C_{ub}(X)$ est continue quand on munit A de la topologie de la convergence simple.

ESQUISSE DE LA PREUVE. Soit a un caractère vérifiant (ii) et $p \in E(X)$; soit $A = A(p)$; on obtient

$$p(x, -) = \sup_{f \in A} |f(x) - f|,$$

ce qui entraîne

$$\bar{p}(-, a) = \sup_{f \in A} |f - a(f)|,$$

d'où .

$$\bar{p}(a, a) = \sup_{f \in A} |a(f) - a(f)| = 0.$$

Soit a un caractère vérifiant (i), A un borné uniformément équicontinu de $C_{ub}(X)$, $r > 0$ et $f \in A$. Il existe (Proposition 5) $x \in X$ tel que

$$|a(g) - g(x)| \leq r/3 \text{ pour tout } g \in A ;$$

pour un élément g de A vérifiant $|f(x) - g(x)| \leq r/3$ on obtient

$$|a(f) - a(g)| \leq r,$$

ce qui prouve (iii).

Soit a un caractère vérifiant (iii) et $(f_i)_{i \in I}$ une famille bornée uniformément équicontinue de $C_{ub}(X)$. Si A est obtenu en saturant par bornes supérieures l'ensemble des f_i (Proposition 4), $\sup_{i \in I} f_i$ est la limite simple, dans A , des

$$f_J = \sup_{i \in J} f_i, \text{ où } J \text{ est une partie finie de } I.$$

D'après la Proposition 1, $a(f_J) = \sup_{i \in J} a(f_i)$; il s'ensuit

$$a(\sup_{i \in I} f_i) = \sup_{i \in I} a(f_i).$$

Si A est un borné uniformément équicontinu de $C_{ub}(X)$ et a, b deux éléments de \hat{X} , la Proposition 6 (ii) a pour conséquence

$$\bar{p}_A(a, b) = \sup_{f \in A} |a(f) - b(f)|.$$

Ceci montre que la structure uniforme de \hat{X} est celle de la convergence sur les bornés uniformément équicontinus de $C_{ub}(X)$; c'est ainsi que l'on retrouve de théorème de Buchwalter-Pupier [2].

1. GILLMAN - JERISON, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, 1960.

2. BUCHWALTER - PUPIER, *C.R.A.S. Paris* 273 (1971), 96-98.

U. E. R. de Mathématiques

Université Paris 7, Tour 45,

2 Place Jussieu, 75005 PARIS