CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

C. AUDERSET

Adjonctions et monades au niveau des 2-catégories

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 15, nº 1 (1974), p. 3-20

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_1_3_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol XV-1

ADJONCTIONS ET MONADES AU NIVEAU DES 2-CATEGORIES

par C. AUDERSET

INTRODUCTION

Ce travail traite des notions d'adjonction et de monade (ou triple) au niveau des 2-catégories. Comme résultat principal, on montre que les constructions d'Eilenberg-Moore ([6]) et de Kleisli ([9]) sont, à ce niveau, des extensions de Kan. Ainsi se trouve résolu, de façon définitive semble-t-il, le problème (déjà traité dans [12] et [13]) de la caractérisation universelle de ces constructions.

Une adjonction (resp. une monade) est un diagramme à deux dimensions dans la 2-catégorie $\mathcal{C}at$ des catégories et peut donc être considérée comme un 2-foncteur d'une certaine 2-catégorie petite, notée $\mathcal{A}d$ (resp. $\mathcal{T}rip$), dans $\mathcal{C}at$ (§ 1). Des descriptions explicites de ces 2-catégories sont données (§ 2), qui expliquent l'utilisation d'adjonctions et et de monades en algèbre simpliciale. Dans la même section, on présente $\mathcal{T}rip$ comme sous-2-catégorie pleine de $\mathcal{A}d$, de telle sorte que la monade induite par une adjonction s'obtient en restreignant à $\mathcal{T}rip$ le 2-foncteur donné par l'adjonction. La section suivante est consacrée aux propriétés d'autò-dualité de la 2-catégorie $\mathcal{A}d$.

L'extension de Kan à droite (resp. à gauche) pour l'inclusion de $\mathcal{T}rip$ dans $\mathcal{A}d$ associe une adjonction à une monade. Le résultat annoncé plus haut est alors le suivant: cette adjonction est donnée par la construction d'Eilenberg-Moore (resp. de Kleisli) (§ 4). A noter que l'on ne se contente pas de vérifier une propriété universelle, mais que l'on calcule effectivement l'extension de Kan, en utilisant quelques méthodes simples, rappelées dans le paragraphe 0.

0. Généralités sur les catégories enrichies et les 2-catégories.

A part quelques précisions sur la terminologie adoptée, cette section préliminaire contient certains résultats utilisés dans la suite, mais pour lesquels il a été impossible de trouver dans la littérature une référence claire. On désignera par $\mathcal{V}$ une catégorie fermée ([1] 1.9 ; «symmetric monoidal closed category» dans [5] Chap. III).

Un $\mathcal{V}$-foncteur $R : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ est dit *représentable* par l'objet A de la $\mathcal{V}$-catégorie $\mathcal{A}$ s'il existe un isomorphisme $\mathcal{V}$-naturel $\mathcal{A}(A,-) \to R$ ([1], 1.11). Nous aurons besoin de la version suivante du lemme de Yoneda ([5] Chap. I Theorem 8.6):

0.1. *Un $\mathcal{V}$-foncteur $R : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ est représentable par A si, et seulement si, il existe un élément a de l'ensemble sous-jacent à RA ([1] 1.5 ou [5] Chap. I § 7) satisfaisant à la propriété universelle: pour tout $\mathcal{V}$-foncteur $S : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ et tout élément b de l'ensemble sous-jacent à SA, il existe une et une seule transformation $\mathcal{V}$-naturelle $t : R \to S$ telle que $tA(a) = b$.*

Admettons pour la suite que $\mathcal{V}$ soit complète (comme catégorie ordinaire). On peut alors introduire la $\mathcal{V}$-catégorie $[\mathcal{M}, \mathcal{C}]$ des $\mathcal{V}$-foncteurs de la $\mathcal{V}$-catégorie petite $\mathcal{M}$ vers la $\mathcal{V}$-catégorie $\mathcal{C}$ ([2] § 4).

0.2. Des $\mathcal{V}$-foncteurs $E : \mathcal{M} \to \mathcal{V}$ et $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ étant donnés, l'objet $Hom_{\mathcal{M}}(E,F)$ de $\mathcal{C}$ est défini par l'existence d'un isomorphisme $\mathcal{V}$-naturel en C:

$$\mathcal{C}(C, Hom_{\mathcal{M}}(E,F)) \xrightarrow{\sim} [\mathcal{M}, \mathcal{V}](E, \mathcal{C}(C,F)).$$

Cette notion de *Hom* (*formel*) remplace avantageusement les concepts de complétude proposés jusqu'ici et permet en particulier une présentation commode de la formule de Kan :

0.3. *Soient $J : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ et $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ des $\mathcal{V}$-foncteurs, les $\mathcal{V}$-catégories $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ étant petites. Supposons que l'objet $Hom_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}(N,J), F)$ de $\mathcal{C}$, que nous noterons $Ran_J F(N)$, existe pour tout objet N de $\mathcal{N}$. Alors on a un isomorphisme $\mathcal{V}$-naturel en G*

$$[\mathcal{M}, \mathcal{C}](GJ, F) \xrightarrow{\sim} [\mathcal{N}, \mathcal{C}](G, Ran_J F).$$

Pour la technique de démonstration, voir [2] § 6 ou [3] I.4.2.

Quoique la réciproque ne soit pas nécessairement vraie, même pour des catégories ordinaires, nous appellerons $Ran_J F$ *l'extension de Kan à droite de* F *le long de* J. (Dans la terminologie de [3] p.54, on devrait dire «pointwise Kan extension».)

0.4. A noter que $Hom_{\mathfrak{M}}(E, F) = [\mathfrak{M}, \mathcal{V}](E, F)$, pour des $\mathcal{V}$-foncteurs $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{V}$ et $F : \mathfrak{M} \to \mathcal{V}$. Par conséquent, en utilisant les notations de 0.3, *$Ran_J F(N)$ est caractérisé par l'existence d'un isomorphisme $\mathcal{V}$-naturel en C*

$$\mathcal{C}(C, Ran_J F(N)) \xrightarrow{\sim} Ran_J \mathcal{C}(C, F)(N),$$

puisque

$$Ran_J \mathcal{C}(C, F)(N) = [\mathfrak{M}, \mathcal{V}](\mathfrak{N}(N, J), \mathcal{C}(C, F)).$$

0.5. Le $\mathcal{V}$-foncteur $J : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ est dit *pleinement fidèle* si les morphismes $\mathfrak{M}(M_1, M_2) \to \mathfrak{N}(JM_1, JM_2)$ donnés par J sont des isomorphismes de $\mathcal{V}$.

0.6. *Sous les hypothèses de 0.3, la co-unité $(Ran_J F)J \to F$ est un isomorphisme lorsque J est pleinement fidèle ([2] 6.2 ou [3] I.4.5).* On peut même choisir $Ran_J F$ de façon que la co-unité soit l'identité.

0.7. Les notions duales des précédentes sont celles de *produit tensoriel* $E \otimes_{\mathfrak{M}} F$ (où $E : \mathfrak{M}^{op} \to \mathcal{V}$, $F : \mathfrak{M} \to \mathcal{C}$) et *d'extension de Kan à gauche* $Lan_J F(N) = \mathfrak{N}(J, N) \otimes_{\mathfrak{M}} F$. On passe donc de l'extension de Kan à droite à l'extension de Kan à gauche en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^{op}$ et (ce qui est parfois perdu de vue) J par $J^{op} : \mathfrak{M}^{op} \to \mathfrak{N}^{op}$, où ^{op} désigne la $\mathcal{V}$-catégorie opposée.

Dans ce travail, nous sommes uniquement intéressés au cas où $\mathcal{V}$ est la catégorie cartésienne fermée ([5] Chap. IV § 2) $\mathcal{C}at$ des catégories. On parle alors de 2-catégories et 2-foncteurs ([4]) plutôt que de $\mathcal{C}at$-catégories et $\mathcal{C}at$-foncteurs. Il existe des descriptions explicites de ces notions en termes d'objets, de *1-flèches* et de *2-flèches* ([5] Chap. I § 2, où sont utilisés les termes «hypercategory, hyperfunctor, morphisms, hypermorphisms»). Ces descriptions explicites seront utilisées sans référence dans la suite.

0.8. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des 2-catégories, alors $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ ([2] § 4) est une 2-catégorie dont les objets sont les 2-foncteurs $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et dont les 1- et 2-flèches seront appelées *(1-)morphismes stricts* et *2-morphismes stricts.* Les 1-morphismes stricts ne sont rien d'autre que les transformations $\mathcal{C}at$-naturelles («hypernatural transformations» dans [5] Chap. I § 2) $s, t : F \to G$. Un 2-morphisme strict $\alpha : s \to t$ est une famille $\alpha A : sA \to tA$ de 2-flèches indexée par les objets de $\mathcal{A}$, telle que

$$\alpha A_2 F f = G f \alpha A_1 \quad \text{pour toute 1-flèche } f : A_1 \to A_2 ,$$

$$(\alpha A_2 F g).(s A_2 F \lambda) = (t A_2 F \lambda) \circ (\alpha A_2 F f)$$

pour toute 2-flèche $\lambda : f \to g : A_1 \to A_2$.

0.9. Une 2-catégorie $\mathcal{C}$ sera dite *2-complète* si les objets $Hom_{\mathcal{M}}(E, F)$ de $\mathcal{C}$ existent pour toute 2-catégorie petite $\mathcal{M}$ et tous les 2-foncteurs $E : \mathcal{M} \to \mathcal{C}at$, $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$. Par exemple $\mathcal{C}at$ est 2-complète.

1. Adjonctions et monades.

1.1. Une *adjonction* $(\varepsilon, \eta) : F \dashv U : B \to A$ *dans une 2-catégorie* $\mathcal{C}$ ([8]) § 2) est donnée par deux objets A, B de $\mathcal{C}$, deux 1-flèches $F : A \to B$, $U : B \to A$ et deux 2-flèches $\varepsilon : FU \to 1$ *(co-unité)*, $\eta : 1 \to UF$ *(unité)* telles que $\varepsilon F . F\eta = 1$ et $U\varepsilon . \eta U = 1$.

Par exemple, une adjonction dans $\mathcal{C}at$ est une paire de foncteurs adjoints avec unité et co-unité fixées.

Nous aimerions identifier les adjonctions dans $\mathcal{C}$ avec les 2-foncteurs d'une certaine 2-catégorie, notée $\mathcal{A}d$, dans la 2-catégorie $\mathcal{C}$. De façon plus précise :

1.2. On définit la 2-catégorie $\mathcal{A}d$, munie d'une adjonction $(\varepsilon, \eta) : F \dashv U : B \to A$, par la propriété universelle suivante : pour toute adjonction $(\varepsilon, \eta) : F \dashv U : B \to A$ dans une 2-catégorie $\mathcal{C}$ (attention à l'usage multiple des mêmes lettres $\varepsilon, \eta, F, U, A, B$), il existe un et un seul 2-foncteur $\Phi : \mathcal{A}d \to \mathcal{C}$ tel que

$$\Phi A = A,\ \Phi B = B,\ \Phi F = F,\ \Phi U = U,\ \Phi \varepsilon = \varepsilon \text{ et } \Phi \eta = \eta .$$

Cette propriété caractérise évidemment la 2-catégorie $\mathcal{A}d$ et son adjonction à des isomorphismes près. D'autre part, l'existence de $\mathcal{A}d$ devrait être claire puisque, dans la définition d'une 2-catégorie munie d'une adjonction, n'interviennent que des équations. On peut dire que la 2-catégorie $\mathcal{A}d$ est *engendrée par* A, B, F, U, ε *et* η *avec les relations*

$$\varepsilon F . F\eta = 1 \quad et \quad U\varepsilon . \eta U = 1 .$$

La construction naturelle de $\mathcal{A}d$ est, de façon esquissée, la suivante:

1.3. Les objets de $\mathcal{A}d$ sont A et B, les 1-flèches sont des «compositions formelles» formées à l'aide de F et U et les 2-flèches sont fabriquées de façon analogue à l'aide de ε, η, F et U. N'entrent en considération que les compositions bien formées (par exemple, FU et $U\varepsilon F$ sont bien formées, mais pas FF ni $U\eta F$). Enfin, deux telles compositions formelles sont identifiées comme conséquence des axiomes d'une 2-catégorie ou des relations de définition d'une adjonction.

Vu que les adjonctions dans une 2-catégorie $\mathcal{C}$ peuvent être considérées comme 2-foncteurs $\mathcal{A}d \to \mathcal{C}$, on peut parler de 1- et 2-morphismes stricts entre adjonctions (0.8):

1.4. Soient

$$(\varepsilon, \eta): F \dashv U : B \to A \quad \text{et} \quad (\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}): \bar{F} \dashv \bar{U} : \bar{B} \to \bar{A}$$

deux adjonctions dans $\mathcal{C}$. Un morphisme strict entre ces adjonctions est donné explicitement par un couple (R, S) de 1-flèches

$$R : A \to \bar{A} \quad \text{et} \quad S : B \to \bar{B} \quad \text{telles que}$$

$$SF = \bar{F}R, \quad RU = \bar{U}S, \quad S\varepsilon = \bar{\varepsilon}S \quad et \quad R\eta = \bar{\eta}R .$$

Un 2-morphisme strict entre morphismes stricts (R_1, S_1) et (R_2, S_2) est donné explicitement par un couple (α, β) de 2-flèches, $\alpha : R_1 \to R_2$, $\beta : S_1 \to S_2$ telles que

$$\beta F = \bar{F}\alpha, \; \alpha U = \bar{U}\beta, \; \beta . S_1\varepsilon = S_2\varepsilon . \beta F U \quad \text{et} \quad \alpha U F . R_1\eta = R_2\eta . \alpha .$$

La notion de monade (introduite dans [7] et souvent appelée «triple» d'après [6]), étant équationnelle, peut être traitée de façon analogue à celle d'adjonction.

1.5. Une *monade* (A, T, η, μ) *dans une 2-catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par un objet A, une 1-flèche $T: A \to A$ et deux 2-flèches $\eta: 1 \to T$ *(unité)* et $\mu: T^2 = TT \to T$ *(multiplication)* de $\mathcal{C}$ telles que

$$\mu . \eta T = \mu . T\eta = 1 \quad \text{et} \quad \mu . \mu T = \mu . T\mu .$$

1.6. La 2-catégorie $\mathcal{T}rip$, munie d'une monade (A, T, η, μ), est définie par la propriété universelle suivante: pour toute monade (A, T, η, μ) dans une 2-catégorie $\mathcal{C}$, il existe un et un seul 2-foncteur $\Psi: \mathcal{T}rip \to \mathcal{C}$ tel que

$$\Psi A = A, \ \Psi T = T, \ \Psi\eta = \eta \ \text{et} \ \Psi\mu = \mu .$$

La 2-catégorie $\mathcal{T}rip$ est construite de même façon que $\mathcal{A}d$ (1.3) et nous identifierons les monades dans $\mathcal{C}$ avec les 2-foncteurs $\mathcal{T}rip \to \mathcal{C}$.

1.7. Un morphisme strict (0.8) entre les monades (A, T, η, μ) et $(\bar{A}, \bar{T}, \bar{\eta}, \bar{\mu})$ est donné explicitement par une 1-flèche $R: A \to \bar{A}$ telle que

$$RT = \bar{T}R, \ R\eta = \bar{\eta}R \ \text{er} \ R\mu = \bar{\mu}R .$$

Un 2-morphisme strict entre morphismes stricts R_1 et R_2 est donné explicitement par une 2-flèche $\alpha: R_1 \to R_2$ telle que

$$\alpha T = \bar{T}\alpha, \ \alpha T . R_1\eta = R_2\eta . \alpha \ \text{et} \ \alpha T . R_1\mu = R_2\mu . \alpha T^2 .$$

1.8. Dans $\mathcal{A}d$, on pose $T = UF$ et $\mu = U\varepsilon F$, ce qui donne une monade (A, T, η, μ) dans $\mathcal{A}d$, c'est-à-dire un 2-foncteur $J: \mathcal{T}rip \to \mathcal{A}d$ (attention de nouveau à l'usage multiple des mêmes lettres).

Toute adjonction $\Phi: \mathcal{A}d \to \mathcal{C}$ induit donc une monade $\Phi J: \mathcal{T}rip \to \mathcal{C}$.

2. Représentations concrètes des 2-catégories $\mathcal{A}d$ et $\mathcal{T}rip$.

2.1. La *catégorie* (semi-) *simpliciale* (augmentée) Δ ([7] § 2) a pour objets les ensembles ordonnés $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ (ordinaux finis), y compris l'ensemble vide 0, et pour morphismes les fonctions croissantes au sens large.

La *face* $d_i^n: n \to n+1$ associe à l'élément k de l'ensemble n l'élément k de $n+1$ si $k < i$ et $k+1$ sinon. *La dégénérescence* s_i^n: $n+2 \to n+1$ associe à l'élément k de $n+2$ l'élément k de $n+1$ si $k \leqslant i$ et $k-1$ sinon. Les notations sont choisies de façon que, pour un entier naturel n donné, i parcoure les entiers de 0 à n.

Le résultat suivant est bien connu ([7] § 2):

2.2. PROPOSITION. *La catégorie* Δ *est engendrée par les objets* n, *les faces et les dégénérescences, avec les relations* FD*:*

$$d_i^{n+1}\, d_j^n = d_{j+1}^{n+1}\, d_i^n \qquad (0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)\,,$$

$$s_j^n\, s_i^{n+1} = s_i^n\, s_{j+1}^{n+1} \qquad (0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)\,,$$

$$d_{j+1}^{n+1}\, s_i^n = s_i^{n+1}\, d_{j+2}^{n+2} \qquad (0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)\,,$$

$$d_i^{n+1}\, s_j^n = s_{j+1}^{n+1}\, d_i^{n+2} \qquad (0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)\,,$$

$$s_i^n\, d_i^{n+1} = s_i^n\, d_{i+1}^{n+1} = 1 \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)\,.$$

2.3. La *catégorie simpliciale contractile* $*\Delta$ a pour objets les ensembles ordonnés $*n = \{*, 0, 1, \ldots, n-1\}$ (dans l'ordre indiqué) et pour morphismes les fonctions croissantes au sens large qui préservent le «$*$».

On définit le foncteur $F : \Delta \to *\Delta$ en prolongeant, de la seule façon possible, les morphismes $m \to n$ de Δ en des morphismes $*m \to *n$ de $*\Delta$. D'un autre côté, si l'on identifie l'ensemble ordonné $*n$ de $*\Delta$ avec l'ensemble ordonné $n+1$ de Δ, la catégorie $*\Delta$ se trouve plongée dans Δ par un foncteur $U : *\Delta \to \Delta$.

Dans $*\Delta$, les *faces* et les *dégénérescences* sont définies par

$$d_i^n = F d_i^n : *n \to *n+1 \quad \text{et} \quad s_i^n = F s_i^n : *n+2 \to *n+1\,.$$

La *contraction* $h^n : *n+1 \to *n$ laisse $*$ fixe, associe $*$ à 0 et $k-1$ à k lorsque $k > 0$.

2.4. PROPOSITION. *La catégorie* $*\Delta$ *est engendrée par les objets* $*n$, *les faces, les dégénérescences et les contractions avec les relations* FD *(2.2), plus les relations* C*:*

$$h^{n+1}\, d_{i+1}^{n+1} = d_i^n\, h^n \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)\,,$$

$$h^{n+1}\, s_{i+1}^{n+1} = s_i^n\, h^{n+2} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)\,,$$

$$h^n\, d_0^n = 1\,,$$

$$h^n\, h^{n+1} = h^n\, s_0^n\,.$$

Les relations FD+C données ne sont que la traduction, par l'inclusion $U:{}^*\Delta \to \Delta$, des relations FD dans Δ, car

$$UFd_i^n = d_{i+1}^{n+1}, \quad UFs_i^n = s_{i+1}^{n+1} \quad \text{et} \quad Uh^n = s_0^n .$$

A elle seule, cette remarque ne suffit pas à prouver la proposition. Elle permet cependant d'imiter, presque mot à mot, la démonstration de la proposition 2.2.

2.5. PROPOSITION. *Le foncteur $F:\Delta \to {}^*\Delta$ est adjoint à gauche du foncteur $U:{}^*\Delta \to \Delta$. La co-unité est donnée par*

$$\varepsilon{}^*n = h^n : FU{}^*n = {}^*n+1 \to {}^*n,$$

et l'unité par $\eta n = d_0^n : n \to UFn = n+1$.

En effet, les relations qui expriment que ε et η sont des transformations naturelles telles que $\varepsilon F . F\eta = 1$ et $U\varepsilon . \eta U = 1$ sont des relations FD+C particulières.

2.6. Etant donnée une monade (A, T, η, μ) dans une 2-catégorie $\mathcal{C}$, *les faces* $T^i \eta T^{n-i} : T^n \to T^{n+1}$ et les dégénérescences $T^i \mu T^{n-i}: T^{n+2} \to T^{n+1}$ satisfont aux relations FD (2.2).

De même, pour une adjonction $(\varepsilon, \eta): F \dashv U : B \to A$ dans $\mathcal{C}$, les *contractions* $\varepsilon F T^n : F T^{n+1} \to F T^n$ satisfont aux relations C (2.4), avec $F T^i \eta T^{n-i}$ et $F T^i \mu T^{n-i}$ comme faces et dégénérescences (où l'on a posé $T = UF$ et $\mu = U \varepsilon F$).

2.7. THEOREME. *L'adjonction $(\varepsilon, \eta): F \dashv U:{}^*\Delta \to \Delta$ (2.5), considérée comme 2-foncteur $\Phi : \mathcal{A}d \to \mathcal{C}at$ (1.2) est représentable par l'objet A de $\mathcal{A}d$. Autrement dit, ce 2-foncteur est isomorphe à $\mathcal{A}d(A,-)$: $\mathcal{A}d \to \mathcal{C}at$.*

DEMONSTRATION. Nous allons vérifier que $\Phi: \mathcal{A}d \to \mathcal{C}at$ satisfait au lemme de Yoneda (0.1), dont l'énoncé dans ce cas est le suivant: pour toute adjonction $(\varepsilon, \eta): F \dashv U: \underline{B} \to \underline{A}$ dans $\mathcal{C}at$ et tout objet A_0 de la catégorie $\underline{A}$, il existe un et un seul morphisme strict (R, S) (1.4) de l'adjonction $(\varepsilon, \eta): F \dashv U:{}^*\Delta \to \Delta$ vers l'adjonction donnée (ε, η): $F \dashv U: \underline{B} \to \underline{A}$ tel que $R0 = A_0$.

Remarquons d'abord que, si l'on pose $T = UF : \Delta \to \Delta$ et $\mu =$

$U \varepsilon F : T^2 \to T$, alors

$$n = T^n 0, \quad d_i^n = T^i \eta T^{n-i} 0, \quad s_i^n = T^i \mu T^{n-i} 0$$

dans Δ et

$$* n = F n = F T^n 0, \quad b^n = \varepsilon F T^n 0 \quad \text{dans} \quad * \Delta .$$

Si (R, S) est un morphisme strict tel que $R 0 = A_0$, on a les égalités

$$R n = T^n A_0, \qquad S^* n = F T^n A_0,$$

$$R d_i^n = T^i \eta T^{n-i} A_0, \qquad S d_i^n = F T^i \eta T^{n-i} A_0,$$

$$R s_i^n = T^i \mu T^{n-i} A_0, \qquad S s_i^n = F T^i \mu T^{n-i} A_0,$$

$$S b^n = \varepsilon F T^n A_0 .$$

Ces relations se démontrent à l'aide de la remarque précédente et des propriétés de commutation pour R et S (1.4); par exemple pour la dernière relation :

$$S b^n = S \varepsilon F T^n 0 = \varepsilon S F T^n 0 = \varepsilon F R T^n 0 = \varepsilon F T^n R 0 = \varepsilon F T^n A_0 .$$

Inversement, si ces égalités sont vérifiées par des foncteurs $R : \Delta \to \underline{A}$ et $S : * \Delta \to \underline{B}$, alors (R, S) est un morphisme strict tel que $R 0 = A_0$. En effet, $R 0 = A_0$ est un cas particulier de la première relation et les propriétés 1.7 de commutation se vérifient, par exemple pour $R U = U S$, de la façon suivante : pour les objets :

$$R U^* n = R n + 1 = T^{n+1} A_0 = U F T^n A_0 = U S^* n,$$

pour les faces :

$$R U d_i^n = R d_{i+1}^{n+1} = T^{i+1} \eta T^{n-i} A_0 = U F T^i \eta T^{n-i} A_0 = U S d_i^n ,$$

et de même pour les dégénérescences; enfin pour les contractions :

$$R U b^n = R s_0^n = \mu T^n A_0 = U \varepsilon F T^n A_0 = U S b^n .$$

Tout revient donc à montrer l'existence de foncteurs uniques, $R : \Delta \to \underline{A}$ et $S : * \Delta \to \underline{B}$ vérifiant les égalités précédentes. Ceci est clair, si l'on se réfère aux propositions 2.2 et 2.4 d'une part et à 2.6 d'autre part.

2.8. COROLLAIRE. *Les foncteurs donnés par*

$$\begin{array}{ccl} \Delta & \longrightarrow & \mathcal{A}d(A,A) \\ n & \longmapsto & T^n \\ d_i^n & \longmapsto & T^i \eta T^{n-i} \\ s_i^n & \longmapsto & T^i \mu T^{n-i} \end{array} \qquad \begin{array}{ccl} *\Delta & \longrightarrow & \mathcal{A}d(A,B) \\ *n & \longmapsto & FT^n \\ d_i^n & \longmapsto & FT^i \eta T^{n-i} \\ s_i^n & \longmapsto & FT^i \mu T^{n-i} \\ h^n & \longmapsto & \varepsilon F T^n \end{array}$$

sont des isomorphismes.

L'adjonction $(\varepsilon, \eta) : F \dashv U : *\Delta \to \Delta$ induit une monade (Δ, T, η, μ) dans $\mathcal{C}at$ (1.8).

2.9. THEOREME. *La monade (Δ, T, η, μ), considérée comme 2-foncteur $\mathcal{T}rip \to \mathcal{C}at$, est représentable par l'objet A de $\mathcal{T}rip$. Autrement dit, ce 2-foncteur est isomorphe à $\mathcal{T}rip(A, \cdot) : \mathcal{T}rip \to \mathcal{C}at$.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 2.7.

2.10. COROLLAIRE. *Le foncteur suivant est un isomorphisme :*

$$\begin{array}{ccl} \Delta & \longrightarrow & \mathcal{T}rip(A,A) \\ n & \longmapsto & T^n \\ d_i^n & \longmapsto & T^i \eta T^{n-i} \\ s_i^n & \longmapsto & T^i \mu T^{n-i} \end{array}$$

Ce dernier résultat est loin d'être nouveau (voir par exemple [10], p. 149) et remonte même dans un certain sens à Godement [7]. L'idée originale des relations de définition pour une monade était en effet de fournir les relations FD et, si possible, *rien de plus.* Le corollaire précédent précise et démontre ce «rien de plus».

2.11. *Le 2-foncteur $J : \mathcal{T}rip \to \mathcal{A}d$ (1.8) est pleinement fidèle (0.5). Autrement dit, la 2-catégorie $\mathcal{T}rip$ est la sous-2-catégorie pleine de $\mathcal{A}d$ ayant A pour unique objet.*

C'est une conséquence immédiate des corollaires 2.8 et 2.10.

3. Dualité dans $\mathcal{A}d$.

A partir d'une 2-catégorie $\mathcal{C}$, on forme la *2-catégorie (fortement) opposée* $\mathcal{C}^{op}$ en posant $\mathcal{C}^{op}(C_1, C_2) = \mathcal{C}(C_2, C_1)$ et on définit la *2-catégorie faiblement opposée* ${}^{op}\mathcal{C}$ par ${}^{op}\mathcal{C}(C_1, C_2) = \mathcal{C}(C_1, C_2)^{op}$, où le dernier ^{op} désigne la catégorie opposée. Les compositions sont définies de façon évidente.

Dans la 2-catégorie $\mathcal{A}d^{op}$, $(\varepsilon, \eta): U \dashv F: B \to A$ est une adjonction, car les relations $\varepsilon U . U\eta = 1$ et $F\varepsilon . \eta F = 1$ sont les relations de définition de $\mathcal{A}d$ (1.2), écrites dans $\mathcal{A}d^{op}$. Cette adjonction donne un 2-foncteur $r: \mathcal{A}d \to \mathcal{A}d^{op}$. De même, un 2-foncteur $s: \mathcal{A}d \to {}^{op}\mathcal{A}d$ est donné par l'adjonction $(\eta, \varepsilon): U \dashv F: A \to B$ dans ${}^{op}\mathcal{A}d$.

3.1. PROPOSITION. *Les 2-foncteurs* $r: \mathcal{A}d \to \mathcal{A}d^{op}$ *et* $s: \mathcal{A}d \to {}^{op}\mathcal{A}d$ *sont des isomorphismes.*

En effet, l'inverse de r est $r^{op}: \mathcal{A}d^{op} \to \mathcal{A}d$ et celui de s est ${}^{op}s: {}^{op}\mathcal{A}d \to \mathcal{A}d$.

Si l'on se rappelle que $\mathcal{T}rip$ est une sous-2-catégorie pleine de $\mathcal{A}d$ (2.11) et si l'on note $\mathcal{C}otr$ l'autre sous-2-catégorie pleine de $\mathcal{A}d$, on obtient par restriction :

3.2. COROLLAIRE. *Il existe des isomorphismes*

$$\mathcal{T}rip \xrightarrow{r} \mathcal{T}rip^{op}, \qquad \mathcal{T}rip \xrightarrow{s} {}^{op}\mathcal{C}otr,$$
$$\mathcal{C}otr \xrightarrow{r} \mathcal{C}otr^{op}, \qquad \mathcal{C}otr \xrightarrow{s} {}^{op}\mathcal{T}rip.$$

Ces résultats ne font que préciser les deux manières, souvent utilisées en pratique, de dualiser les notions d'adjonction et de monade. Pour le cas des catégories ordinaires, la situation est simplifiée par la présence de l'isomorphisme $\mathcal{C}at \to {}^{op}\mathcal{C}at$ (qui, à une catégorie donnée, associe sa catégorie opposée).

En combinant r et s avec les isomorphismes de 2.8, on trouve une involution $\Delta \to \Delta$ bien connue en algèbre simpliciale et une auto-dualité $*\Delta \to *\Delta^{op}$ déjà observée dans [10] (p. 150).

3.3. On trouve aussi l'isomorphisme suivant dont nous aurons besoin plus tard :

$$\begin{array}{rcl} *\Delta & \longrightarrow & \mathcal{A}d(B,A) \\ *n & & T^{n}U \\ d_i^n & & T^{n-i}\eta T^{i}U \\ & \longmapsto & \\ s_i^n & & T^{n-i}\mu\, T^{i}U \\ h^n & & T^{n}U\varepsilon . \end{array}$$

4. La construction d'Eilenberg-Moore.

Cette section est consacrée au calcul des extensions de Kan (0.8) le long du 2-foncteur $J:\mathcal{T}rip \to \mathcal{A}d$ (1.8).

4.1. Pour une monade (A, T, η, μ) dans une 2-catégorie $\mathcal{C}$, donnée par un 2-foncteur $\Psi:\mathcal{T}rip \to \mathcal{C}$, l'extension de Kan $Ran_J\Psi:\mathcal{A}d \to \mathcal{C}$ vérifie l'égalité $(Ran_J\Psi)J=\Psi$, car J est pleinement fidèle (2.11 et 0.6). Autrement dit, l'adjonction $Ran_J\Psi$ redonne (à la manière de 1.8) la monade initiale et est en conséquence de la forme

$$(\varepsilon^{\Psi}, \eta): F^{\Psi} \dashv U^{\Psi}: A^{\Psi} \to A, \text{ avec } T=U^{\Psi}F^{\Psi} \text{ et } \mu=U^{\Psi}\varepsilon^{\Psi}F^{\Psi}.$$

En particulier, on a montré, avant tout calcul explicite, le résultat suivant, classique dans le cas $\mathcal{C}=\mathcal{C}at$ ([6] , [9]):

4.2. THEOREME. *Si la 2-catégorie $\mathcal{C}$ est (suffisamment) 2-complète ou 2-cocomplète, alors toute monade dans $\mathcal{C}$ est induite par une adjonction.*

Partant d'une monade $(\underline{A}, T, \eta, \mu)$ dans $\mathcal{C}at$ donnée par le 2-foncteur $\Psi:\mathcal{T}rip \to \mathcal{C}at$, nous allons maintenant expliciter à l'aide de 0.3 l'adjonction $(\varepsilon^{\Psi}, \eta): F^{\Psi} \dashv U^{\Psi}: \underline{A}^{\Psi} \to \underline{A}$ donnée par $Ran_J\Psi$.

$$\underline{A}^{\Psi} = Ran_J\Psi(B) = [\mathcal{T}rip, \mathcal{C}at]\ (\mathcal{A}d(B,J), \Psi).$$

Un objet de $\underline{A}^{\Psi}$ est un morphisme strict (0.8) $\mathcal{A}d(B,J) \to \Psi$ et est donné explicitement (1.7) par un foncteur $R:\mathcal{A}d(B,A) \to \underline{A}$ tel que:

(I) $R\,\mathcal{A}d(B,T)=TR$, $R\,\mathcal{A}d(B,\eta)=\eta R$, $R\,\mathcal{A}d(B,\mu)=\mu R$.

Mais comme la catégorie $\mathcal{A}d(B,A)$ est isomorphe à $*\Delta$ (3.3), la donnée d'un foncteur $R:\mathcal{A}d(B,A) \to \underline{A}$ est équivalente à celle d'objets A^n et de morphismes d_i^n, s_i^n, h^n de $\underline{A}$,

$$\text{(II)}\qquad \begin{array}{l} A^n = R(T^n),\quad d_i^n = R(T^{n-i}\eta T^i U), \\ s_i^n = R(T^{n-i}\mu\, T^i U),\quad h^n = R(T^n U\varepsilon) \end{array}$$

qui satisfont aux relations FD+C (2.4).

Si les propriétés (I) de commutation sont vérifiées, on a

$$\text{(III)}\qquad \begin{array}{l} A^n = T^n A^0,\quad d_i^n = T^{n-i}\eta T^i A^0, \\ s_i^n = T^{n-i}\mu\, T^i A^0,\quad h^n = T^n h^0\ , \end{array}$$

et les relations C particulières $h^0 d_0^0 = 1$ et $h^0 h^1 = h^0 s_0^0$ s'écrivent

$$\text{(IV)}\qquad h^0.\eta A^0 = 1 \ \text{ et } \ h^0.Th^0 = h^0.\mu A^0.$$

Inversement, donnons-nous un objet A^0 et un morphisme h^0: $TA^0 \to A^0$ satisfaisant aux équations (IV) et définissons A^n, d_i^n, s_i^n, h^n par (III). Il est immédiat de vérifier les relations FD+C. Il existe donc un unique foncteur $R: \mathcal{A}d(B,A) \to \underline{A}$ vérifiant (II). Ce foncteur satisfait aux propriétés (I) de commutation et définit donc un morphisme strict $\mathcal{A}d(B,J) \to \Psi$.

En résumé et en changeant un peu les notations $(A = A^0,\ \xi = h^0)$, on peut dire qu'un objet de la catégorie $\underline{A}^\Psi$ est un couple (A,ξ), où A est un objet de $\underline{A}$ et $\xi: TA \to A$ un morphisme tel que

$$\varepsilon.\eta A = 1,\quad \xi.T\xi = \xi.\mu A.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter (à l'aide de 1.7) les morphismes de $\underline{A}^\Psi$.

Pour le calcul du foncteur $F^\Psi: \underline{A} \to \underline{A}^\Psi$, il faut observer que, dans la définition de F^Ψ par

$$F^\Psi = Ran_J\,\Psi(F) = [\mathcal{T}rip, \mathcal{C}at]\,(\mathcal{A}d(F-,J),\Psi),$$

le domaine de ce dernier foncteur est identifié à $\underline{A}$ par l'isomorphisme de Yoneda qui associe à l'objet A de $\underline{A}$ le morphisme strict donné par le foncteur

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A}d(A,A) & \longrightarrow & \Psi A = \underline{A} \\ T^n & \Big| & T^n A \\ T^i \eta T^{n-i} & \longmapsto & T^i \eta T^{n-i} A \\ T^i \mu T^{n-i} & \Big| & T^i \mu T^{n-i} A \end{array}$$

Ainsi, le morphisme strict $F^{\Psi}A : \mathcal{A}d(B, J) \to \Psi$ est donné par le foncteur composé

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}d(B,A) & \xrightarrow{\mathcal{A}d(F,A)} & \mathcal{A}d(A,A) & \longrightarrow & \Psi A = \underline{A}. \\
U & \longmapsto & UF = T & \longmapsto & TA \\
U\varepsilon & & U\varepsilon F = \mu & & \mu A
\end{array}$$

Il s'agit donc de l'objet $F^{\Psi}A = (TA, \mu A)$ de $\underline{A}$.

Les calculs de $U^{\Psi} : \underline{A}^{\Psi} \to \underline{A}$ et $\varepsilon^{\Psi} : F^{\Psi}U^{\Psi} \to 1$ se font par des méthodes analogues et l'on trouve en définitive :

4.3. THEOREME. *L'extension de Kan à droite*

$$Ran_J : [\mathcal{T}rip, \mathcal{C}at] \longrightarrow [\mathcal{A}d, \mathcal{C}at]$$

associe à une monade $(\underline{A}, T, \eta, \mu)$ *l'adjonction* $(\varepsilon^{\Psi}, \eta) : F^{\Psi} \dashv U^{\Psi} : \underline{A}^{\Psi} \to \underline{A}$ *donnée par la construction d'Eilenberg-Moore ([5] p. 385).*

A noter que nous avons effectué un véritable calcul qui ne supposait aucunement le résultat connu par avance.

Pour le cas général d'une monade (A, T, η, μ) dans une 2-catégorie $\mathcal{C}$, donnée par un 2-foncteur $\Psi : \mathcal{T}rip \to \mathcal{C}$, l'extension de Kan est une adjonction $(\varepsilon^{\Psi}, \eta) : F^{\Psi} \dashv U^{\Psi} : A^{\Psi} \to A$ (4.1), caractérisée par l'existence d'un isomorphisme strict en C (0.4):

$$\mathcal{C}(C, A^{\Psi}) \longrightarrow Ran_J\, \mathcal{C}(C, \Psi)(B) = \mathcal{C}(C, A)^{\mathcal{C}(C, \Psi)},$$

où la catégorie $\mathcal{C}(C, A^{\Psi})^{\mathcal{C}(C, \Psi)}$ est donnée par la construction d'Eilenberg-Moore pour la monade $\mathcal{C}(C, \Psi) : \mathcal{T}rip \to \mathcal{C}at$.

On vérifie aisément que cet isomorphisme est déterminé, via l'isomorphisme de Yoneda, par l'objet $(U^{\Psi}, U^{\Psi}\varepsilon^{\Psi})$ de $\mathcal{C}(A^{\Psi}, A)^{\mathcal{C}(A^{\Psi}, \Psi)}$, c'est-à-dire :

4.4. THEOREME. *L'extension de Kan à droite, le long du 2-foncteur* $J : \mathcal{T}rip \to \mathcal{A}d$, *associe à une monade* (A, T, η, μ) *dans une 2-catégorie* $\mathcal{C}$ *(donnée par un 2-foncteur* $\Psi : \mathcal{T}rip \to \mathcal{C}$*) une adjonction* $(\varepsilon^{\Psi}, \eta) : F^{\Psi} \dashv U^{\Psi} : A^{\Psi} \to A$ *caractérisée par la propriété suivante : pour tout objet* C *de* $\mathcal{C}$, *le foncteur*

$$\mathcal{C}(C, A^{\Psi}) \longrightarrow \mathcal{C}(C, A)^{\mathcal{C}(C, \Psi)}$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{tikzcd} C \arrow[r, "H_1"] & A^{\Psi} \arrow[d, "\alpha"] \\ C \arrow[r, "H_2"'] & A^{\Psi} \end{tikzcd} & \longmapsto \quad \begin{tikzcd} (U^{\Psi} H_1, U^{\Psi} \varepsilon^{\Psi} H_1) \arrow[d, "U^{\Psi}\alpha"'] \\ (U^{\Psi} H_2, U^{\Psi} \varepsilon^{\Psi} H_2) \end{tikzcd} \end{array}$$

est un isomorphisme.

Il s'agit là bien sûr d'une propriété (2-) universelle.

Par exemple, dans le cas où $\mathcal{C}$ est la 2-catégorie $\mathcal{V}$-$\mathcal{C}at$ des catégories enrichies sur une catégorie fermée $\mathcal{V}$ à noyaux, il existe une généralisation évidente de la construction d'Eilenberg-Moore ([1] 2.2) qui remplit les conditions du théorème ([3] II.1.1).

Pour déterminer l'extension de Kan à gauche

$$Lan_J : [\mathcal{T}rip, \mathcal{C}at] \longrightarrow [\mathcal{A}d, \mathcal{C}at]$$

on pourrait utiliser 0.7, car il existe des formules explicites pour le produit tensoriel. Il est cependant plus simple de démontrer directement le résultat :

4.5. THEOREME. *L'extension de Kan à gauche*

$$Lan_J : [\mathcal{T}rip, \mathcal{C}at] \longrightarrow [\mathcal{A}d, \mathcal{C}at]$$

associe à une monade $(\underline{A}, T, \eta, \mu)$ *(donnée par un 2-foncteur* $\Psi : \mathcal{T}rip \to \mathcal{C}at$*) l'adjonction* $(\varepsilon_{\Psi}, \eta) : F_{\Psi} \dashv U_{\Psi} : \underline{A}_{\Psi} \to \underline{A}$ *donnée par la construction de Kleisli ([8]).*

La preuve est basée sur le théorème 4.4. Pour cela, il faut ramener l'extension de Kan à gauche le long de J à une extension de Kan à droite le long du même 2-foncteur, ce qui nécessite (voir la remarque en 0.7) un petit tour de passe-passe: on identifie à J le 2-foncteur J^{op}, grâce au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}rip \arrow[r, "J"] \arrow[d, "r"'] & \mathcal{A}d \arrow[d, "r"] \\ \mathcal{T}rip^{op} \arrow[r, "J^{op}"] & \mathcal{A}d^{op} \end{tikzcd}$$

Partant de la monade $(\underline{A}, T, \eta, \mu)$ dans la 2-catégorie $\mathcal{C} = \mathcal{C}at^{op}$ (ou dans $\mathcal{C}at$, ce qui revient au même), nous appliquons le critère du théorème 4.4 à l'adjonction

$$(\varepsilon_\Psi, \eta) : U_\Psi \dashv F_\Psi : \underline{A}_\Psi \to \underline{A} \quad (\text{sic}) \text{ dans } \mathcal{C} = \mathcal{C}at^{op} :$$

pour toute catégorie $\underline{C}$, le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}at(\underline{A}_\Psi, \underline{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}at(\underline{A}, \underline{C})^{\mathcal{C}at(\Psi, \underline{C})} \\ \begin{array}{c} \underline{A}_\Psi \xrightarrow{H_1} \underline{C} \\ \downarrow \alpha \\ \underline{A}_\Psi \xrightarrow[H_2]{} \underline{C} \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} (H_1 F_\Psi, H_1 \varepsilon_\Psi F_\Psi) \\ \downarrow \alpha F_\Psi \\ (H_2 F_\Psi, H_2 \varepsilon_\Psi F_\Psi) \end{array} \end{array}$$

est un isomorphisme.

En effet, l'isomorphisme réciproque associe à un objet (K, ξ) de $\mathcal{C}at(\underline{A}, \underline{C})^{\mathcal{C}at(\Psi, \underline{C})}$ le foncteur $H : \underline{A}_\Psi \to \underline{C}$ défini de la façon suivante: pour un objet A de $\underline{A}_\Psi$, i.e. de $\underline{A}$, $HA = KA$ et pour un morphisme $f : A_1 \to A_2$ de $\underline{A}_\Psi$, donc un morphisme $f : A_1 \to TA_2$ de $\underline{A}$,

$$Hf = \xi Kf : HA_1 \to HA_2 .$$

A un morphisme $\beta : (K_1, \xi_1) \to (K_2, \xi_2)$ de $\mathcal{C}at(\underline{A}, \underline{C})^{\mathcal{C}at(\Psi, \underline{C})}$, i.e. une transformation naturelle $\beta : K_1 \to K_2$, l'isomorphisme réciproque associe la transformation naturelle

$$\alpha : H_1 \to H_2 : \underline{A}_\Psi \to \underline{C} \quad \text{donnée par} \quad \alpha A = \beta A : H_1 A \to H_2 A .$$

Malgré la symétrie, évidente d'après les théorèmes 4.3 et 4.5, entre les constructions d'Eilenberg-Moore et de Kleisli, la première possède sur la seconde le même genre de priorité qu'un produit cartésien sur une réunion disjointe: on peut caractériser la construction de Kleisli par la construction d'Eilenberg-Moore (ce qui, d'ailleurs, ne semble pas avoir été observé jusqu'ici), mais non inversement.

Il existe bien entendu des résultats analogues pour les co-monades dans $\mathcal{C}at$, i.e. les 2-foncteurs $\mathcal{C}otr \to \mathcal{C}at$ (3.2). L'inclusion J' de $\mathcal{C}otr$ dans $\mathcal{A}d$ peut être identifiée au 2-foncteur ${}^{op}J : {}^{op}\mathcal{T}rip \to {}^{op}\mathcal{A}d$, à l'isomorphisme $s : \mathcal{A}d \to {}^{op}\mathcal{A}d$ (3.1) près. Alors, en utilisant l'isomorphisme entre $\mathcal{C}at$ et ${}^{op}\mathcal{C}at$ dont il est fait mention après 3.2, on peut ramener

$Ran_{J'}$ et $Lan_{J'}$ aux constructions d'Eilenberg-Moore et de Kleisli.

En composant les paires de foncteurs adjoints

$$\begin{tikzcd}[\mathcal{C}otr, \mathcal{C}at] \arrow[r, shift left, "Lan_{J'}"] & {[\mathcal{A}d, \mathcal{C}at]} \arrow[l, shift left, "{[J', \mathcal{C}at]}"] \arrow[r, shift left, "{[J, \mathcal{C}at]}"] & {[\mathcal{T}rip, \mathcal{C}at]} \arrow[l, shift left, "Ran_J"]\end{tikzcd},$$

on trouve aussitôt une situation adjointe déjà observée par Lawvere ([10] p. 151 et [11] § 3).