CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JACQUES PENON

Catégories à sommes commutables

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 14, nº 3 (1973), p. 227-289

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_3_227_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE Vol. XIV-3
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

CATEGORIES A SOMMES COMMUTABLES

par Jacques PENON

INTRODUCTION.

Le but de cet article est l'étude de catégories dans lesquelles il existe d'aussi «bonnes» commutations entre sommes et limites projectives que dans la catégorie des ensembles. Pour cela, on définit les «catégories à sommes commutables» par un système d'axiomes simple (i.e. facile à vérifier dans les exemples) et on en déduit des résultats moins immédiats, tels le théorème de commutation entre sommes et limites projectives connexes (§ 8) ou la compatibilité du foncteur ∂ avec les limites projectives ~~finies~~ (§ 9). L'introduction de ces catégories est justifiée par le nombre d'exemples qu'on en trouve, essentiellement en Topologie (catégories des espaces topologiques, des espaces quasi-topologiques, des espaces de Kelley, ...).

- Le § 1, un peu en marge du sujet principal, contient des théorèmes de commutation entre limites de types différents (commutation entre produits finis et limites inductives filtrantes). Les limites projectives connexes (très utiles dans la suite) sont étudiées au § 2.

- Les § 3 et 4 servent d'introduction au § 5, dans lequel les catégories à sommes commutables sont définies à l'aide de plusieurs systèmes d'axiomes équivalents.

- Les critères d'existence de telles catégories prouvés dans le § 6 permettent, au § 7, d'obtenir de nombreux exemples, dont les topos et les quasi-topos [8].

- Le § 8 (qui s'appuie sur les résultats du §2) est entièrement consacré à la démonstration du théorème de commutation entre sommes et limites projectives connexes.

- Au § 9, la catégorie des ensembles est «plongée» (par le foncteur ∂) dans une catégorie à sommes commutables, avec conservation des limites projectives finies et des petites limites inductives. Le terme «plongement» n'est pas tout-à-fait exact, le foncteur ∂ n'étant pleinement fidèle que sous certaines conditions de connexité de l'objet final (voir le § 12).

- L'étude des objets séparés (au sens de [6]) est prolongée, au § 10, dans le cadre des catégories à sommes commutables. On obtient des conditions pour que les objets séparés soient stables par petites sommes. En particulier, on insiste sur les cas particuliers des objets moniques et des objets discrets, dont on donne des exemples.

- Dans le § 11, on adopte le «point de vue du Logicien» pour regarder les catégories à sommes commutables (ainsi qu'on le fait pour les Topos). Les connecteurs logiques «et», «non», «implique», «vrai», «faux» apparaissent comme des morphismes dans ces catégories et l'objet 2 peut être muni d'une structure d'algèbre de Boole.

- Dans une optique voisine de celle du § 10, le § 12 contient une étude des objets connexes. Cette notion est voisine de celle de Z-objet considérée par Hoffmann [2] (dans des catégories différentes). Diverses caractérisations des objets connexes conduisent à des exemples variés (topologies connexes, catégories connexes, foncteurs représentables,...).

SOMMAIRE.

0. Notations. Rappels.

I. NOTATIONS GENERALES.

1° Une catégorie est notée $C^\cdot$, où C désigne l'ensemble de ses morphismes (ou flèches) et «.» le symbole de sa loi de composition. Si $C^\cdot$ est une catégorie :

- $C^\cdot_0$ désigne l'ensemble de ses unités (ou objets).
- α et β ses applications source et but (nous écrirons souvent αx et βx au lieu de $\alpha(x)$ et $\beta(x)$).
- $C^{\cdot *}$ sa catégorie duale.
- Pour tout couple (e', e) d'objets de $C^\cdot$ on note $e'.C$ (resp. $C.e$, $e'.C.e$ ou $Hom_{C^\cdot}(e', e)$) l'ensemble des morphismes de $C^\cdot$ de but e' (resp. de source e, de but e' et de source e).

Nous écrirons souvent en abrégé «$f : e \to e'$ est un morphisme de $C^\cdot$» au lieu de «e et e' sont des objets de $C^\cdot$ et f est un morphisme de $C^\cdot$ de source e et de but e'».

En général une catégorie est définie par l'ensemble de ses objets et celui de ses morphismes, la composition des flèches n'étant pas indiquée quand il n'y a pas d'ambiguïté.

2° $A^\cdot$ et $B^\cdot$ étant des catégories, on note $\mathfrak{N}(B^\cdot, A^\cdot)^{\square\square}$ la catégorie ayant pour objets les foncteurs de source $A^\cdot$ et de but $B^\cdot$ et pour morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs.

On écrit en abrégé «$t : F \to F' : A^\cdot \to B^\cdot$ est une transformation naturelle» pour signifier que «$A^\cdot$ et $B^\cdot$ sont des catégories, $F : A^\cdot \to B^\cdot$ et $F' : A^\cdot \to B^\cdot$ des foncteurs et $t : F \to F'$ est un morphisme de $\mathfrak{N}(B^\cdot, A^\cdot)^{\square\square}$».

Si $t : F \to F' : A^\cdot \to B^\cdot$ est une transformation naturelle et a un objet de $A^\cdot$, $t(a)$ désigne le morphisme canonique de source $F(a)$ et de but $F'(a)$.

$t : F \to \bar{F} : A^\cdot \to A'^\cdot$ et $t' : F' \to \bar{F}' : A'^\cdot \to A''^\cdot$ étant deux transformations naturelles, on écrit $t'.t : F'.F \to \bar{F}'.\bar{F} : A^\cdot \to A''^\cdot$ leur composé latéral (i.e. la transformation naturelle définie sur chaque objet a de $A^\cdot$ par :

$$(t'.t)(a) = \bar{F}'(t(a)).t'(F(a)) = t'(\bar{F}(a)).F'(t(a)).$$

$A^{\cdot}$ et $I^{\cdot}$ étant deux catégories, soit a un objet de $A^{\cdot}$; on note $\overline{a}: I^{\cdot} \to A^{\cdot}$ le foncteur constant sur a. Si $F: I^{\cdot} \to A^{\cdot}$ est un foncteur et si $t: \overline{a} \to F$ (resp. $t: F \to \overline{a}$) est une transformation naturelle, on dit que t est un cône projectif (resp. inductif).

3° Un quatuor (ou carré) de $C^{\cdot}$ est un quadruplet $(f', \bar{g}, g, f)$ d'éléments de C tels que $f' . g = \bar{g} . f$.

Les deux lois de composition définies par :

$$(f'_1, \bar{g}_1, g_1, f_1) \,\square\!\square\, (f', \bar{g}, g, f) = (f'_1, \bar{g}_1 . \bar{g}, g_1 . g, f)$$

si, et seulement si $f_1 = f'$,

$$(f'_1, \bar{g}_1, g_1, f_1) \boxminus (f', \bar{g}, g, f) = (f'_1 . f', \bar{g}_1, g, f_1 . f)$$

si, et seulement si $g_1 = \bar{g}$,

munissent l'ensemble des quatuors de $C^{\cdot}$ d'une structure de catégorie double $(\square\!\square\, C^{\cdot}, \boxminus C^{\cdot})$.

Rappelons qu'un quatuor $(f', \bar{g}, g, f)$ est dit cartésien dans le cas où $((f', g), (\bar{g}, f))$ est un produit fibré naturalisé.

II. CONVENTIONS, RAPPELS.

1° Pour tout ce qui va suivre on choisit une fois pour toutes un pré-univers $\mathfrak{U}$ (i.e. on ne lui impose pas nécessairement l'axiome de l'infini) et on note Λ la borne supérieure des cardinaux des éléments de $\mathfrak{U}$. Soit E un ensemble; on dit que E est un *petit ensemble* si E est équipotent à un élément de $\mathfrak{U}$. Souvent l'adjectif «petit» prend un sens plus large : il signifie que l'ensemble sous-jacent à la «structure» considérée est petit. Exemples : petite catégorie, petite topologie, ...Si une transformation naturelle l entre $C^{\cdot}$ et $K^{\cdot}$ est une limite projective naturalisée (resp. limite inductive naturalisée), on dit que l est une *petite limite projective* (resp. *petite limite inductive*) *naturalisée* si $C^{\cdot}$ est une petite catégorie; on parle ainsi de petites sommes naturalisées ou de petits produits fibrés naturalisés. Une famille indexée par un petit ensemble est appelée : *une petite famille*.

2° Tout au long de cet exposé, dès qu'on se donne une catégorie $H^{\cdot}$

à petits produits ou à petites sommes, on choisit pour toute petite famille d'objets une somme naturalisée dite *canonique* (resp. un produit naturalisé). Soit $(g_i)_{i\in I}$ une petite famille de morphismes. On note $\sum_{i\in I} g_i$ (resp. $\prod_{i\in I} g_i$) le morphisme somme (resp. produit) correspondant. Si $g_i : e_i \to e$, on note $]g_i[_{i\in I}$ l'unique g tel que $g.\sigma_i = g_i$ pour tout $i \in I$, où $\sigma_i : e_i \to \sum_{i\in I} e_i$ est l'éjection canonique. Si $g_i : e \to e'_i$, on note $[g_i]_{i\in I}$ l'unique g' tel que $p'_i . g' = g_i$ pour tout $i \in I$, où $p'_i : \prod_{i\in I} e'_i \to e'_i$ est la projection canonique.

3° $K^\cdot$ étant une catégorie et e un objet de $K^\cdot$, notons $K^\cdot/e$ la catégorie «des objets au-dessus de e» (i.e. la catégorie ayant pour objets les éléments de $e.K$ et pour morphismes les triplets (f', k, f), où f et f' sont des objets de $K^\cdot/e$ et k est un morphisme de $K^\cdot$ tel que $f'.k = f$) et $\alpha_e : K^\cdot/e \to K^\cdot$ (s'il n'y a pas de confusion possible avec α) son foncteur d'oubli canonique. A chaque morphisme $h : e \to e'$ de $K^\cdot$ est associé un foncteur $K^\cdot/h : K^\cdot/e \to K^\cdot/e'$ défini sur le morphisme (f', k, f) de $K^\cdot/e$ par :

$$K^\cdot/h(f', k, f) = (h.f', k, h.f).$$

On rappelle que, si la catégorie $K^\cdot$ est à produits fibrés finis, le foncteur $K^\cdot/h$ admet un coadjoint que l'on appelle *foncteur changement de base le long de* h. Dans ces conditions on dit qu'une partie E de K est *stable par changement de base* si, pour tout morphisme $h : e \to e'$ de $K^\cdot$, un morphisme $g : u' \to e'$ de E admet une $K^\cdot/h$-structure co-libre dans E. D'une manière analogue on dit que dans $K^\cdot$ les $A^\cdot$-limites inductives sont stables par changement de base si, $\Delta : K^\cdot \to \mathcal{F}(K^\cdot, A^\cdot)^{\square\square}$ désignant le foncteur «diagonal» ou «canonique» et $h : e' \to e$ étant un morphisme quelconque de $K^\cdot$, toute $\mathcal{F}(K^\cdot, A^\cdot)/\Delta(h)$-structure co-libre $l' : F' \to \overleftarrow{e'}$ d'une limite inductive naturalisée $l : F \to \overleftarrow{e}$ est une limite inductive naturalisée. On dit alors que l' est une limite inductive naturalisée déduite de l par un *changement de base le long de* h.

4° $A^\cdot$ étant une catégorie et λ un cardinal, on dira que $A^\cdot$ est *λ-filtrante* si, pour toute catégorie $C^\cdot$ telle que C ait un cardinal strictement inférieur à λ et pour tout foncteur $F : C^\cdot \to A^\cdot$, il existe un cône inductif $t : F \to \overleftarrow{a}$.

1. Foncteur bi-compatible avec les limites.

DEFINITION 1. Soit $\Phi : A^{\cdot} \times B^{\cdot} \to K^{\cdot}$ un foncteur. On dira que Φ *est bi-compatible avec les $C^{\cdot}$-limites inductives* (resp. *projectives*) si, pour tout couple (e, e'), objet de $A^{\cdot} \times B^{\cdot}$, les foncteurs $\Phi(e, -) : B^{\cdot} \to K^{\cdot}$ et $\Phi(-, e') : A^{\cdot} \to K^{\cdot}$ sont compatibles avec les $C^{\cdot}$-limites inductives (resp. projectives).

EXEMPLES. 1° $A^{\cdot}$ étant une $\mathfrak{U}$-catégorie, le foncteur $Hom_{A^{\cdot}} : A^{\cdot} \times A^{\cdot *} \to \mathfrak{M}$ est bi-compatible avec les petites limites projectives.

2° Soient $\mathbf{V}$ une catégorie monoïdale fermée, $V^{\cdot}$ sa catégorie sous-jacente et $\otimes$ son produit tensoriel. Alors $\otimes : V^{\cdot} \times V^{\cdot} \to V^{\cdot}$ est un foncteur bi-compatible avec les limites inductives.

PROPOSITION 1. *Soit $\Phi : A^{\cdot}_1 \times A^{\cdot}_2 \to K^{\cdot}$ un foncteur bi-compatible avec les $C^{\cdot}$-limites inductives. Alors étant donné les limites inductives naturalisées $l_1 : F_1 \to \vec{a}_1 : C^{\cdot} \to A^{\cdot}_1$ et $l_2 : F_2 \to \vec{a}_2 : C^{\cdot} \to A^{\cdot}_2$, la transformation naturelle*

$$\Phi . l_1 \times l_2 : \Phi . F_1 \times F_2 \to \overrightarrow{\Phi(a_1, a_2)} : C^{\cdot} \times C^{\cdot} \to K^{\cdot}$$

est une limite inductive (naturalisée).

Δ Soit $\theta : \Phi . F_1 \times F_2 \to \vec{s}' : C^{\cdot} \times C^{\cdot} \to K^{\cdot}$ un cône inductif. Alors, si e_2 est un objet de $C^{\cdot}$, on peut considérer le cône inductif $t_{e_2} = \theta . [Id_{C^{\cdot}}, \vec{e}_2]$.

$$\begin{tikzcd} K^{\cdot} & C^{\cdot} \times C^{\cdot} \arrow[l, bend right, "\vec{s}'"'] \arrow[l, bend left, "\Phi . F_1 \times F_2"] \arrow[l, phantom, "\theta \Uparrow"] & C^{\cdot} \arrow[l, "{[Id_{C^{\cdot}}, \vec{e}_2]}"'] \end{tikzcd} .$$

Si on pose

$$l_1^{e_2} = \Phi . l_1 \times Id_{F_2} . [Id_{C^{\cdot}}, \vec{e}_2] = \Phi . [l_1, \overrightarrow{F_2(e_2)}]$$
$$= \Phi(-, F_2(e_2)) . l_1 ,$$

$$\begin{tikzcd} K^{\cdot} & A^{\cdot}_1 \times A^{\cdot}_2 \arrow[l, "\Phi"'] & C^{\cdot} \times C^{\cdot} \arrow[l, bend right, "\vec{a}_1 \times F_2"'] \arrow[l, bend left, "F_1 \times F_2"] \arrow[l, phantom, "l_1 \times Id_{F_2} \Uparrow"] & C^{\cdot} \arrow[l, "{[Id_{C^{\cdot}}, \vec{e}_2]}"'] \end{tikzcd}$$

$l_1^{e_2}$ est une limite inductive naturalisée. Donc il existe un unique morphisme $k_{e_2} : \Phi(a_1, F_2(e_2)) \to s'$ dans $K^{\cdot}$ tel que :

$$k_{e_2}.\Phi(l_1(e_1), F_2(e_2)) = t_{e_2}(e_1) = \theta(e_1, e_2),$$

pour tout objet e_1 de $C^{\cdot}$. L'application $e_2 \mapsto k_{e_2}$ définit un cône inductif $\tilde{k}:\Phi.[\overline{a_1}, F_2] \to \overline{s'}: C^{\cdot} \to K^{\cdot}$. Si on pose

$$l_2^{a_1} = \Phi.[Id_{\overline{a_1}}, l_2] = \Phi(a_1, -).l_2\,,$$

$$\begin{tikzcd} K^{\cdot} & A_1^{\cdot} \times A_2^{\cdot} \arrow[l, "\Phi"'] & & C^{\cdot} \arrow[ll, bend right, "{[\overline{a}_1, \overline{a}_2]}"'] \arrow[ll, bend left, "{[\overline{a}_1, F_2]}"] \arrow[ll, phantom, "\Uparrow {[Id_{\overline{a}_1}, l_2]}"] \end{tikzcd}$$

$l_2^{a_1}$ est une limite inductive naturalisée. Donc il existe un unique élément $k: \Phi(a_1, a_2) \to s'$ tel que:

$$k.\Phi(a_1, l_2(e_2)) = k_{e_2}, \text{ pour tout } e_2 \in C^{\cdot}_0.$$

Pour tout couple (e_1, e_2) d'objets de $C^{\cdot}$ on a :

$$\begin{aligned} k.\Phi(l_1(e_1), l_2(e_2)) &= k.\Phi(a_1, l_2(e_2)).\Phi(l_1(e_1), F_2(e_2)) = \\ &= k_{e_2}.\Phi(l_1(e_1), F_2(e_2)) = \theta(e_1, e_2). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \Phi(F_1(e_1), F_2(e_2)) \arrow[d, "\theta(e_1, e_2)"'] \arrow[r, "{\Phi(l_1(e_1), l_2(e_2))}"] & \Phi(a_1, a_2) \arrow[dl, "k"] \\ s' & \end{tikzcd}$$

k est unique : En effet, soit $k': \Phi(a_1, a_2) \to s'$ un morphisme tel que, pour tout $(e_1, e_2) \in C^{\cdot}_0 \times C^{\cdot}_0$, on ait $k'.\Phi(l_1(e_1), l_2(e_2)) = \theta(e_1, e_2)$. Pour chaque objet e_2 de $C^{\cdot}$ posons $k'_{e_2} = k'.\Phi(a_1, l_2(e_2))$. Comme, pour tout $e_1 \in C^{\cdot}_0$,

$$\begin{aligned} k'_{e_1}.\Phi(l_1(e_1), F_2(e_2)) &= k'.\Phi(a_1, l_2(e_2)).\Phi(l_1(e_1), F_2(e_2)) = \\ &= k'.\Phi(l_1(e_1), l_2(e_2)) = \theta(e_1, e_2), \end{aligned}$$

on tire $k'_{e_2} = k_{e_2}$, ou encore $k'.\Phi(a_1, l_2(e_2)) = k_{e_2}$, pour tout $e_2 \in C^{\cdot}_0$. D'où $k = k'$. ∇

Soit $p: A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ un foncteur et e un objet de $B^{\cdot}$. Si $\alpha_e: B^{\cdot}/e \to B^{\cdot}$ est le foncteur canonique, notons p/e le produit fibré de (p, α_e).

DEFINITION 2. On dira que le foncteur p est

- *cofinal* si p/e, pour tout objet e de $B^{\cdot}$, est une catégorie connexe non vide (voir § 2 pour la définition de catégorie connexe),

- *final* si le foncteur dual $p^*: A^{\cdot *} \to B^{\cdot *}$ est cofinal (i.e. si pour tout objet e de $B^{\cdot}$ la catégorie $e/p = (p^*/e)^*$ est connexe et non vide).

On a la proposition suivante, démontrée dans [5].

PROPOSITION 2. *Soit $p: A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ un foncteur final et $K^{\cdot}$ une catégorie. Alors:*

1° Si $G: B^{\cdot} \to K^{\cdot}$ est un foncteur et $t: G.p \to \overset{\sqcap}{s}$ un cône inductif, il existe un unique cône $\theta: G \to \overset{\sqcap}{s}$ tel que : $\theta.p = t$,

2° t est une limite inductive naturalisée si et seulement si θ en est une.

PROPOSITION 3. *Soit $I^{\cdot}$ une catégorie non-vide et λ un cardinal infini tel que $\mathrm{Card}\, I < \lambda$. Alors, si $C^{\cdot}$ est une catégorie λ-filtrante, le foncteur «diagonal» $\Delta: C^{\cdot} \to \mathfrak{N}(C^{\cdot}, I^{\cdot})^{\square\square}$ est final.*

Δ Soit ϕ un foncteur de $I^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$. Comme $C^{\cdot}$ est λ-filtrante, il existe un cône inductif $t: \phi \to \Delta(e)$; donc la catégorie ϕ/Δ est non-vide. Soit maintenant $t': \phi \to \Delta(e')$ un autre cône. $C^{\cdot}$ étant λ-filtrante, il existe un objet u de $C^{\cdot}$ et un morphisme $(x, x'): (e, e') \to (u, u)$ dans $C^{\cdot} \times C^{\cdot}$. De plus pour chaque objet i de $I^{\cdot}$ il existe un morphisme $x_i: u \to u_i$ tel que $x_i.x.t(i) = x_i.x'.t'(i)$. Enfin, soit le morphisme $z: u \to u'$ et la famille $(x'_i)_{i \in I_0^{\cdot}}: (u_i)_{i \in I_0^{\cdot}} \to (u')_{i \in I_0^{\cdot}}$ telle que $z = x'_i.x_i$ pour tout objet i de $I^{\cdot}$.

$$\begin{tikzcd}
 & e \arrow[dr, "x"] & & u_i \arrow[dr, "x'_i"] & \\
\phi(i) \arrow[ur, "t(i)"] \arrow[dr, "t'(i)"'] & & u \arrow[ur, "x_i"] \arrow[rr, dashed, "z"'] & & u' \\
 & e' \arrow[ur, "x'"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Comme $z.x.t(i) = z.x'.t'(i)$, pour tout objet i de $I_0^{\cdot}$, on a:

$$\Delta(z.x) \square\square\, t = \Delta(z.x') \square\square\, t'.$$

Par suite, la catégorie ϕ/Δ est connexe et non-vide. Donc Δ est final. ∇

PROPOSITION 4. *Soit* $\Phi : A^\cdot_1 \times A^\cdot_2 \to K^\cdot$ *un foncteur bi-compatible avec les* $C^\cdot$*-limites inductives, où* $A^\cdot_1$ *et* $A^\cdot_2$ *sont des catégories à* $C^\cdot$*-limites inductives. Si* $C^\cdot$ *est filtrante,* Φ *est compatible avec les* $C^\cdot$*-limites inductives.*

Δ Notons $\Delta : C^\cdot \to C^\cdot \times C^\cdot$ la diagonale de $C^\cdot$, $p_i : A^\cdot_1 \times A^\cdot_2 \to A^\cdot_i$, $i \in \{1, 2\}$ la $i^{\text{ème}}$ projection canonique du produit de $(A^\cdot_1, A^\cdot_2)$. Considérons un foncteur $F : C^\cdot \to A^\cdot_1 \times A^\cdot_2$ admettant une limite inductive $l : F \to \overline{[a_1, a_2]}$.

$$\begin{tikzcd}
K^\cdot & & C^\cdot \times C^\cdot \arrow[dll] \arrow[dll, bend right=40] \arrow[dll, phantom, bend right=20, "\Uparrow l_1 \times l_2"] \\
A^\cdot_1 \times A^\cdot_2 \arrow[u, "\Phi"] & & C^\cdot \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ll] \arrow[ll, bend left=40, "F"] \arrow[ll, phantom, bend left=20, "\Uparrow l"]
\end{tikzcd}$$

Posons successivement:

$l_i = p_i . l$ et $F_i = l_i . F$ pour chaque $i \in \{1, 2\}$.

$l_1 : F_1 \to \overline{a}_1$ et $l_2 : F_2 \to \overline{a}_2$ sont des limites inductives naturalisées, car p_1 et p_2 sont compatibles avec les $C^\cdot$-limites inductives. On obtient: $\Phi . l_1 \times l_2 . \Delta = \Phi . l$. Comme Φ est bi-compatible avec les $C^\cdot$-limites inductives et que l_1 et l_2 sont des limites inductives, $\Phi . l_1 \times l_2$ est une limite inductive (prop. 1) ainsi que $\Phi . l_1 \times l_2 . \Delta$, car Δ est final (prop. 2 et 3). Ainsi, $\Phi . l$ étant une limite inductive pour tout l, Φ est compatible avec les $C^\cdot$-limites inductives. ∇

COROLLAIRE. *Soit* **V** *une catégorie monoïdale fermée,* $V^\cdot$ *sa catégorie sous-jacente et* $\otimes$ *son produit tensoriel. Si* $V^\cdot$ *est à petites limites inductives,* $\otimes$ *est compatible avec les petites limites inductives filtrantes.*

2. Catégories connexes.

Soient $C^\cdot$ une catégorie et λ un cardinal infini strictement supérieur à celui de C.

DEFINITION 1. 1) n étant un entier naturel, soit $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant 2n+1}$ une famille de morphismes de $C^\cdot$; on dira que c'est un «*zigzag*» de source e et de but e' si :

a) $\beta x_0 = e$ et $\beta x_{2n+1} = e'$.

b) Pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$, $\alpha x_{2i} = \alpha x_{2i+1}$ et, si $i \neq n$, $\beta x_{2i+1} = \beta x_{2i+2}$.

$$\begin{tikzcd} e' & & \cdots\cdots\cdots & & e \\ & \bullet \arrow[ul, "x_{2n+1}"'] \arrow[ur, "x_{2n}"'] & & \bullet \arrow[ul, "x_1"] \arrow[ur, "x_0"'] \end{tikzcd}$$

2) Nous dirons que $C^\cdot$ est une catégorie *connexe* si, pour tout couple (e, e') d'objets de $C^\cdot$, il existe un zigzag de source e et de but e'.

3) $A^\cdot$ étant une catégorie, soit $F : C^\cdot \to A^\cdot$ un foncteur et $l : s \to F$ une limite projective naturalisée de F. On dira que l est une *limite projective connexe* si $C^\cdot$ est une catégorie connexe non-vide.

Soit R la relation définie sur $C^\cdot_0$ par :

$e R e'$ si, et seulement si, il existe un zigzag de source e et de but e'.

R est une relation d'équivalence sur $C^\cdot_0$; la classe d'équivalence d'un objet e est appelée la composante connexe de e dans $C^\cdot$.

PROPOSITION 1. *$C^\cdot$ étant non-vide, c'est une catégorie connexe si, et seulement si, pour toute catégorie $A^\cdot$ le foncteur «diagonal» $\Delta_{C^\cdot}$, de $A^\cdot$ vers $\mathcal{N}(A^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$, est pleinement fidèle.*

Δ 1° Notons $1^\cdot$ la catégorie discrète sur un singleton et $1_{C^\cdot} : C^\cdot \to 1^\cdot$ le foncteur canonique. Si $C^\cdot$ est connexe, $1_{C^\cdot}$ est un foncteur final, donc $\mathcal{N}(A^\cdot, 1_{C^\cdot}) : \mathcal{N}(A^\cdot, 1^\cdot)^{\square\square} \to \mathcal{N}(A^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$ est un foncteur pleinement fidèle (voir prop. 2 § 1). Or $\Delta_{C^\cdot} = \mathcal{N}(A^\cdot, 1_{C^\cdot}).\Delta_{1^\cdot}$ et $\Delta_{1^\cdot}$ est un isomorphisme de $A^\cdot$ vers $\mathcal{N}(A^\cdot, 1^\cdot)^{\square\square}$, donc $\Delta_{C^\cdot}$ est pleinement fidèle.

2° Inversement, considérons maintenant le monoïde additif $\mathbf{N}^+$ et soit $\Delta : \mathbf{N}^+ \to \mathcal{N}(\mathbf{N}^+, C^\cdot)^{\square\square}$ le foncteur diagonal. Il existe un objet e de $C^\cdot$; soit $\tilde{e}$ sa composante connexe et $t : \Delta(0) \to \Delta(0)$ la transformation naturelle définie par :

$$t(u) = 0 \text{ si } u \in \tilde{e}, \; t(u) = 1 \text{ sinon}.$$

Comme Δ est un foncteur plein, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\Delta(n) = t$; en particulier $n = \Delta(n)(e) = t(e) = 0$. Ainsi, pour tout objet u de $C^\cdot$, on a $t(u) = 0$, c'est-à-dire $C^\cdot_0 \subset \tilde{e}$, ce qui signifie que $C^\cdot$ est connexe. ∇

COROLLAIRE 1. *$C^\cdot$ étant une catégorie connexe non-vide, soit $A^\cdot$ une catégorie et soit s un objet de $A^\cdot$. Alors la transformation naturelle identité $Id_{\vec{s}} : \vec{s} \to \vec{s} : C^\cdot \to A^\cdot$ est une limite projective naturalisée.*

COROLLAIRE 2. *$A^\cdot$ étant une catégorie, les objets initiaux dans $A^\cdot$ commutent avec les limites projectives connexes.*

PROPOSITION 2. *Soit $A^\cdot$ une catégorie et $C^\cdot$ une catégorie connexe non-vide. Considérons la catégorie $\hat{C}^\cdot$ obtenue en ajoutant un élément final à la catégorie $C^\cdot$. Si $A^\cdot$ est λ-filtrante, $A^\cdot$ est à $C^\cdot$-limites projectives si, et seulement si, elle est à $\hat{C}^\cdot$-limites projectives.*

Δ Nous utiliserons les deux lemmes suivants, où $\iota : C^\cdot \to \hat{C}^\cdot$ est le foncteur injection.

LEMME 1. *Le foncteur $\iota : C^\cdot \to \hat{C}^\cdot$ est cofinal.*

LEMME 2. *Soit $K^\cdot$ une catégorie λ-filtrante et soit $F : C^\cdot \to K^\cdot$ un foncteur. Alors il existe un foncteur $\hat{F} : \hat{C}^\cdot \to K^\cdot$ tel que $\hat{F} . \iota = F$.*

Δ Notons 1 l'élément final de $\hat{C}^\cdot$ et 1_e l'unique morphisme de $\hat{C}^\cdot$ allant de e vers 1.

Puisque $K^\cdot$ est λ-filtrante, il existe un cône inductif $t : F \to \vec{a}$. On en déduit le foncteur $\hat{F} : \hat{C}^\cdot \to K^\cdot$ défini par :

$$\hat{F}(f) = F(f) \text{ si } f \in C,\ \hat{F}(1) = a,\ \hat{F}(1_e) = t(e) \text{ si } e \in C_0,$$

qui vérifie $\hat{F} . \iota = F$. ∇

Démontrons maintenant la proposition.

a) Supposons que la catégorie $A^\cdot$ soit à $C^\cdot$-limites projectives et soit $G : \hat{C}^\cdot \to A^\cdot$ un foncteur. Alors le foncteur $G . \iota$ admet une limite projective naturalisée $l : \vec{s} \to G . \iota$. D'après la prop. 2 du § 1, comme ι est cofinal (Lemme 1), nous savons que son relèvement $\hat{l} : \vec{s} \to G$ est une limite projective naturalisée de G.

b) Inversement supposons que la catégorie $A^\cdot$ soit à $\hat{C}^\cdot$-limites projectives et soit $F : C^\cdot \to A^\cdot$ un foncteur. Alors d'après le lemme 2 il existe un foncteur $\hat{F} : \hat{C}^\cdot \to A^\cdot$ tel que $\hat{F} . \iota = F$. Si $\hat{l} : \vec{s} \to \hat{F}$ est une limite projective naturalisée de $\hat{F}$, en vertu de la prop. 2 du § 1, $l = \hat{l} . \iota : \vec{s} \to F$ est une limite projective naturalisée. ∇

PROPOSITION 3. *Soit $A^{\cdot}$ une catégorie λ-filtrante et $p : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ un foncteur. D'autre part soit $C^{\cdot}$ une catégorie connexe non-vide et $\hat{C}^{\cdot}$ la catégorie obtenue en ajoutant un élément final à $C^{\cdot}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) p est compatible avec les $C^{\cdot}$-limites projectives.

(ii) p est compatible avec les $\hat{C}^{\cdot}$-limites projectives.

Δ Utilisons les notations et les lemmes de la proposition précédente.
a) Montrons d'abord que (i) entraîne (ii). Soit $G : \hat{C}^{\cdot} \to A^{\cdot}$ un foncteur admettant une limite projective naturalisée $\hat{l} : \overline{s} \to G$. Alors $l = \hat{l} . \iota$ est une limite projective naturalisée de $F = G . \iota$. Mais, p étant compatible avec les $C^{\cdot}$-limites projectives, $p . l$ est une limite projective naturalisée de $p . F$. Or $p . \hat{l} : \overline{p(s)} \to p . G$ étant l'unique cône tel que $(p . \hat{l}) . \iota = p . l$, c'est une limite projective naturalisée de $p . G$.
b) Montrons que (ii) entraîne (i). Soit $F : C^{\cdot} \to A^{\cdot}$ un foncteur et $l : \overline{s} \to F$ une limite projective naturalisée de F. Considérons tout d'abord un foncteur $\hat{F} : C^{\cdot} \to A^{\cdot}$ tel que $\hat{F} . \iota = F$ (ce qui est possible puisque $A^{\cdot}$ est λ-filtrante) et l'unique cône $\hat{l} : \overline{s} \to \hat{F}$ tel que $\hat{l} . \iota = l$. Alors $\hat{l}$ est une limite projective naturalisée de $\hat{F}$ (prop. 2 § 1). Mais, p étant compatible avec les $\hat{C}^{\cdot}$-limites projectives, $p . \hat{l}$ est une limite projective naturalisée de $p . \hat{F}$, donc $p . \hat{l} . \iota$ est une limite projective naturalisée de $p . \hat{F} . \iota$, ou encore $p . l$ est une limite projective naturalisée de $p . F$. ∇

PROPOSITION 4. *Soit $A^{\cdot}$ une catégorie Λ-filtrante. Alors $A^{\cdot}$ est à petites limites projectives connexes si et seulement si $A^{\cdot}$ est à noyaux et à petits produits fibrés.*

Δ Si $A^{\cdot}$ est à petites limites projectives connexes, il est, en particulier, à noyaux et à petits produits fibrés.
Réciproquement soit $C^{\cdot}$ une petite catégorie connexe non-vide et soit $\hat{C}^{\cdot}$ la catégorie obtenue en rajoutant un élément final à $C^{\cdot}$; notons 1 l'élément final de $\hat{C}^{\cdot}$ et 1_e l'unique morphisme allant de l'objet e vers 1. Pour montrer que $A^{\cdot}$ est à $C^{\cdot}$-limites projectives, il suffit de montrer, d'après la proposition 2, que $A^{\cdot}$ est à $\hat{C}^{\cdot}$-limites projectives. Supposons que $F : \hat{C}^{\cdot} \to A^{\cdot}$ soit un foncteur. Considérons le produit fibré naturalisé

$((F(1_e), v_e))_{e \in \hat{C}_0}$, et posons $s = \alpha v_1$. D'autre part $x : e \to e'$ étant un morphisme de $\hat{C}^{\cdot}$, soit n_x un noyau de $(F(x).v_e, v_{e'})$, et enfin soit $((n_x, w_x))_{x \in \hat{C}}$ un produit fibré naturalisé. Posons

$$w = n_x . w_x, \; l_e = v_e . w \text{ et } a = \alpha w.$$

L'application $e \mapsto l_e$ de $C_0^{\cdot}$ dans A définit une transformation naturelle l, $l : \overline{a} \to F$. Montrons que l est une limite projective naturalisée de F.

$$\begin{tikzcd}
& F(e') \arrow[dl, "F(1_{e'})"'] & & \bullet \arrow[dl, "n_x"'] & \\
F(1) & & s \arrow[ul, "v_{e'}"'] \arrow[dl, "v_e"] & & a \arrow[ll, "w"] \arrow[ul, "w_x"'] \\
& F(e) \arrow[ul, "F(1_e)"] \arrow[uu, "F(x)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Soit $l' : \overline{a'} \to F$ une transformation naturelle. Comme $F(1_e).l'(e) = l'(1)$, pour tout $e \in \hat{C}_0^{\cdot}$, il existe un unique $k : a' \to s$ tel que $v_e . k = l'(e)$, pour tout $e \in \hat{C}_0^{\cdot}$. Pour tout morphisme $x : e \to e'$ de $\hat{C}^{\cdot}$, on a :

$$F(x).v_e . k = F(x).l'(e) = l'(e') = v_{e'} . k ,$$

de sorte qu'il existe un unique morphisme k_x tel que $n_x . k_x = k$. Par suite, il existe un unique $h : a' \to a$ tel que, pour tout morphisme x de $C^{\cdot}$, on ait $w_x . h = k_x$. De plus :

$$l(e).h = v_e . w . h = v_e . n_x . w_x . h = v_e . n_x . k_x = v_e . k = l'(e).$$

Enfin, h est unique : en effet, soit $h' : a' \to a$ un morphisme tel que

$$l(e).h' = l'(e)$$

pour tout $e \in \hat{C}_0^{\cdot}$. Alors $v_e . w. h' = l'(e)$, donc $w.h' = k$; ou encore, $n_x . w_x . h' = k$ pour tout morphisme $x : e \to e'$ de $\hat{C}^{\cdot}$, d'où $w_x . h' = k_x$. Il en résulte $h' = h$. ∇

PROPOSITION 5. *Soit $p : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ un foncteur, où $A^{\cdot}$ est une catégorie Λ-filtrante à petites limites projectives connexes. Alors p est compatible avec les petites limites projectives connexes si, et seulement si, p est compatible avec les noyaux et les petits produits fibrés.*

Donnons maintenant quelques exemples de foncteurs compatibles avec les petites limites projectives connexes.

PROPOSITION 6. *$A^\cdot$ étant une catégorie, soit s un objet de $A^\cdot$. Alors le foncteur d'oubli $\alpha_s : A^\cdot/s \to A^\cdot$ est compatible avec les petites limites projectives connexes.*

Δ En vertu de la proposition 3, il suffit de montrer que α_s est compatible avec les $C^\cdot$-limites projectives, quelle que soit la petite catégorie $C^\cdot$ possédant un élément final, car $A^\cdot/s$ est Λ-filtrante, puisqu'elle admet un élément final.

$C^\cdot$ étant une catégorie possédant un élément final 1, soit $F: C^\cdot \to A^\cdot/s$ un foncteur admettant une limite projective naturalisée $l : \overline{f} \to F$. Posons

$$\underline{F} = \alpha_s . F, \quad \underline{l} = \alpha_s . l \quad \text{et} \quad e = \alpha f.$$

$$\begin{tikzcd}
A^\cdot/s \arrow[d, "\alpha_s"'] & & C^\cdot \arrow[ll, bend right, "F"'] \arrow[ll, bend left, "\overline{f}"] \arrow[ll, phantom, "\Uparrow l"] \arrow[dll, "\underline{F}"'] \arrow[dll, bend left=50, "\overline{e}"] \arrow[dll, phantom, shift left=3ex, "\Nwarrow \underline{l}"] \\
A^\cdot & &
\end{tikzcd}$$

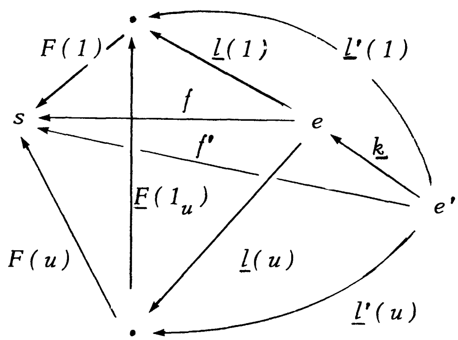
Il faut donc montrer que $\underline{l} : \overline{e} \to \underline{F}$ est une limite projective naturalisée de $\underline{F}$. Soit $\underline{l}' : \overline{e}' \to \underline{F}$ un cône projectif. Nous allons tout d'abord prolonger $\underline{l}'$ en une transformation naturelle $l' : \overline{f'} \to F$, où $f' = F(1).\underline{l}'(1)$. Pour toute unité u de $C^\cdot$, on a:

$$F(u).\underline{l}'(u) = F(1).\underline{F}(1_u).\underline{l}'(u) = F(1).\underline{l}'(1) = f'.$$

L'application $u \mapsto (F(u), \underline{l}'(u), f')$ de $C^\cdot_0$ dans $A^\cdot/s$ définit une transformation naturelle $l' : \overline{f'} \to F$. Comme l est une limite projective naturalisée, il existe un unique $k = (f, \underline{k}, f')$ de $A^\cdot/s$ tel que $l(u).k = l'(u)$, pour toute unité u de $C^\cdot$. Par suite $\underline{l}(u).\underline{k} = \underline{l}'(u)$, pour toute unité u de $C^\cdot$. $\underline{k}$ est unique, car, s'il existait une flèche $\underline{k}'$ de $A^\cdot$ telle que, pour tout u de $C^\cdot_0$, $\underline{l}(u).\underline{k}' = \underline{l}'(u)$, on aurait

$$f.\underline{k}' = F(1).\underline{l}(1).\underline{k}' = F(1).\underline{l}'(1) = f',$$

et ainsi $l(u).k' = l'(u)$, en posant $k' = (f, \underline{k}', f')$.



Donc $\underline{l}$ est une limite projective naturalisée de $\underline{F}$ dans $A^{\cdot}$. ∇

PROPOSITION 7. *$A^{\cdot}$ étant une catégorie à produits finis, soit s un objet de $A^{\cdot}$. Alors le foncteur $(\cdot)\times s : f \mapsto f \times s$ de $A^{\cdot}$ dans $A^{\cdot}$ est compatible avec les limites projectives connexes.*

Δ Soit $X : A^{\cdot} \times A^{\cdot} \to A^{\cdot}$ un foncteur «produit» et $C^{\cdot}$ une catégorie connexe. Soit $l : \overline{u} \to F$ une limite projective naturalisée. $[\,l, Id_{\overline{s}}\,] : [\,\overline{u}, \overline{s}\,] \to [\,F, \overline{s}\,]$ est alors aussi une limite projective naturalisée, car $Id\overline{s}$ est une limite projective naturalisée (proposition 1).

$$\begin{tikzcd} A^{\cdot} & \\ A^{\cdot}\times A^{\cdot} \arrow[u, "X"] & C^{\cdot} \arrow[l, bend right, "{[F,\overline{s}]}"', ""{name=U, below}] \arrow[l, bend left, "{[\overline{u},\overline{s}]}", ""{name=D, above}] \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "{[l, Id_{\overline{s}}]}"] \end{tikzcd}$$

Mais comme X est un foncteur compatible avec les limites projectives, $X.[\,l, Id_{\overline{s}}\,]$ est une limite projective naturalisée. Or $X.[\,l, Id_{\overline{s}}\,] = (\cdot)\times s . l$. Donc $(\cdot)\times s$ est un foncteur compatible avec les limites projectives connexes. ∇

3. Stabilité par changement de base.

Soient $K^{\cdot}$ et $C^{\cdot}$ deux catégories.

PROPOSITION 1. *Supposons $K^{\cdot}$ à $C^{\cdot}$-limites inductives et à produits fibrés finis. Alors dans $K^{\cdot}$ les $C^{\cdot}$-limites inductives sont stables par chan-*

gement de base si, et seulement si, $K^{\cdot}$ *vérifie la propriété suivante :*

(P) Soit $F : C^{\cdot} \to \square\square K^{\cdot}$ un foncteur, $l : F \to \vec{f}$ une limite inductive naturalisée, $l' : F \to \vec{f'} : C^{\cdot} \to \square\square K^{\cdot}$ un cône inductif; soit $Q : f \to f'$ l'unique morphisme de $\square\square K^{\cdot}$ tel que, pour tout $e \in C^{\cdot}_0$, on ait $Q.\, l(e) = l'(e)$. Si, pour tout objet e de $C^{\cdot}$, $l'(e)$ est cartésien, Q est cartésien.

$\triangle$ Notons $\alpha^{\boxminus} : \square\square K^{\cdot} \to K^{\cdot}$ (resp. $\beta^{\boxminus} : \square\square K^{\cdot} \to K^{\cdot}$) le foncteur source (resp. but) latéral.

1) Supposons, tout d'abord, que dans $K^{\cdot}$ les $C^{\cdot}$-limites inductives soient stables par changement de base, et après avoir repris les notations de la propriété (P) montrons que Q est cartésien. Posons :

$$l_1 = \alpha^{\boxminus}.\, l,\ \ l_2 = \beta^{\boxminus}.\, l,\ \ e_1 = \alpha f,\ \ e_2 = \beta f,$$

$$l'_1 = \alpha^{\boxminus}.\, l',\ \ l'_2 = \beta^{\boxminus}.\, l',\ \ e'_1 = \alpha f',\ \ e'_2 = \beta f',$$

$$F_1 = \alpha^{\boxminus}.\, F,\ \ F_2 = \beta^{\boxminus}.\, F,\ \ k_1 = \alpha^{\boxminus} Q,\ \ k_2 = \beta^{\boxminus} Q.$$

Comme $K^{\cdot}$ est à $C^{\cdot}$-limites inductives, les foncteurs $\alpha^{\boxminus}$ et $\beta^{\boxminus}$ sont compatibles avec les $C^{\cdot}$-limites inductives. Par suite l_1 et l_2 sont des $C^{\cdot}$-limites inductives.

Considérons le produit fibré naturalisé $((f', \bar{k}_1), (k_2, \bar{f}))$ de (f', k_2) dans $K^{\cdot}$. Comme pour chaque objet e de $C^{\cdot}$ on a :

$$f'.\, l'_1(e) = l'_2(e).\, F(e) = k_2.\, l_2(e).\, F(e),$$

il existe un unique morphisme $\bar{l}_1(e) : F_1(e) \to \bar{e}_1$ (où $\bar{e}_1 = \alpha \bar{k}_1$) tel que :

$$\bar{k}_1.\, \bar{l}_1(e) = l'_1(e) \quad \text{et} \quad \bar{f}.\, \bar{l}_1(e) = l_2(e).\, F(e).$$

$$\begin{tikzcd}
e'_2 & & e'_1 \arrow[ll, "f'"'] & & \\
& e_2 \arrow[ul, "k_2"] & & e_1 \arrow[ll, "f"] \arrow[ul, "k_1"'] & \\
& & & & \bar{e}_1 \arrow[uull, bend right, "\bar{k}_1"'] \arrow[ulll, bend left, "\bar{f}"] \\
F_2(e) \arrow[uuu, "l'_2(e)"] \arrow[uur, "l_2(e)"] & & F_1(e) \arrow[ll, "F(e)"] \arrow[uuu, "l'_1(e)"] \arrow[uur, "l_1(e)"] \arrow[urr, bend right, "\bar{l}_1(e)"'] & &
\end{tikzcd}$$

L'application $e \mapsto \bar{l}_1(e)$ de $C_0^\cdot$ dans K définit un cône inductif $\bar{l}_1$, $\bar{l}_1 : F_1 \to \widehat{\bar{e}_1}$. Posons

$$\bar{l}(e) = (\bar{f}, l_2(e), \bar{l}_1(e), F(e)) \quad \text{et} \quad \bar{Q} = (f', k_2, \bar{k}_1, \bar{f}).$$

Comme $l'(e) = \bar{Q} \,\square\square\, \bar{l}(e)$ et que $l'(e)$ et $\bar{Q}$ sont cartésiens, on en déduit que $\bar{l}(e)$ est cartésien, et ceci pour tout objet e de $C^\cdot$. Or l_2 étant une limite inductive naturalisée, on en déduit que $\bar{l}_1$ est une limite inductive naturalisée déduite de l_2 par un changement de base le long de $\bar{f}$. Mais l_1 et $\bar{l}_1$ étant deux limites inductives naturalisées de F_1, il existe un inversible $\gamma : e_1 \to \bar{e}_1$ tel que $\gamma . l_1(e) = \bar{l}_1(e)$ pour tout $e \in C_0^\cdot$. Donc

$$\bar{k}_1 . \gamma . l_1(e) = \bar{k}_1 . \bar{l}_1(e) = l'_1(e) = k_1 . l_1(e),$$
$$\bar{f} . \gamma . l_1(e) = \bar{f} . \bar{l}_1(e) = l_2(e) . F(e) = f . l_1(e),$$

ceci pour tout $e \in C_0^\cdot$. D'où $\bar{k}_1 . \gamma = k_1$ et $\bar{f} . \gamma = f$. Il s'ensuit, $\bar{Q}$ étant cartésien, que Q est cartésien.

2) Démontrons maintenant la réciproque. Soit $F_2 : C^\cdot \to K^\cdot$ un foncteur admettant une limite inductive $l_2 : F_2 \to \widehat{e_2}$ et $f : e_1 \to e_2$ un morphisme de $K^\cdot$. $K^\cdot$ étant à produits fibrés finis, il en est de même de $\mathcal{N}(K^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$. Si on a $((l_2, F), (\widehat{f}, l_1))$ un produit fibré naturalisé dans $\mathcal{N}(K^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$, il reste encore à démontrer que l_1 est une limite inductive naturalisée. Posons $F_1 = \alpha F = \alpha l_1$ et soit $l'_1 : F_1 \to \widehat{e'_1}$ une limite inductive naturalisée de F_1. Comme l_1 est un cône inductif, il existe un seul $k : e'_1 \to e_1$ tel que $\widehat{k} \,\square\square\, l'_1 = l_1$.

$$\begin{tikzcd}
e_2 & e_1 \arrow[l, "f"'] & e'_1 \arrow[l, "k"'] \arrow[ll, bend left] \\
F_2(e) \arrow[u, "l_2(e)"] & F_1(e) \arrow[l, "F(e)"] \arrow[u, "l_1(e)"'] \arrow[ur, "l'_1(e)"']
\end{tikzcd}$$

Pour chaque objet e de $C^\cdot$, posons

$$l(e) = (f, l_2(e), l_1(e), F(e)), \quad l'(e) = (f . k, l_2(e), l'_1(e), F(e))$$

et $Q = (f, e_2, k, f . k)$; pour chaque morphisme $x : e \to e'$ de $C^\cdot$, soit

$$F(x) = (F(e'), F_2(x), F_1(x), F(e)).$$

L'application $x \mapsto F(x)$ définit un foncteur $\widetilde{F}: C^{\cdot} \to \square\square K^{\cdot}$ De plus l'application $e \mapsto l(e)$ (resp. l'application $e \mapsto l'(e)$) définit un cône inductif $l: \widetilde{F} \to \overline{f}$ (resp. $l': \widetilde{F} \to \overline{f.k}$). On a $Q \,\square\square\, l'(e) = l(e)$ pour tout objet e de $C^{\cdot}$; d'autre part l' est une limite inductive naturalisée, car $\alpha^{\boxminus}.\,l$ et $\beta^{\boxminus}.\,l'$ en sont. Enfin $l(e)$ est cartésien pour tout objet e de $C^{\cdot}$. On en conclut (d'après la propriété (P)) que Q est cartésien; ainsi k est inversible. Par suite l_1 est une limite inductive naturalisée. ∇

PROPOSITION 2. *Supposons que la catégorie $K^{\cdot}$ est cartésienne et que dans $K^{\cdot}$ les $C^{\cdot}$-limites inductives sont stables par changement de base. Alors le produit est bi-compatible avec les $C^{\cdot}$-limites inductives.*

Δ $\Delta: K^{\cdot} \to K^{\cdot} \times K^{\cdot}$ étant le foncteur diagonal de $K^{\cdot}$, il existe une adjonction $(\delta, \pi): \Delta \vdash X$, où $X: K^{\cdot} \times K^{\cdot} \to K^{\cdot}$ est le foncteur «produit» de la catégorie cartésienne.

Soit alors u un objet de $K^{\cdot}$ et $F: C^{\cdot} \to K^{\cdot}$ un foncteur admettant une limite inductive naturalisée $l: F \to \overline{s}$. Montrons que $(\cdot) X u.\, l$ est une limite inductive naturalisée. Soit e un objet de $C^{\cdot}$; posons:

$$(P_e, P'_e) = \pi(F(e), u) \quad \text{et} \quad (P, P') = \pi(s, u).$$

$$\begin{tikzcd}
s & s X u \arrow[l, "P"'] \\
F(e) \arrow[u, "l(e)"] & F(e) X u \arrow[l, "P_e"] \arrow[u, "l(e) X u"']
\end{tikzcd}$$

Le quatuor $(l(e), P, P_e, l(e) X u)$ étant cartésien, il en résulte que $(\cdot) X u.\, l$ est une limite inductive déduite de l par un changement de base le long de p. ∇

4. Ejections.

Soit $K^{\cdot}$ une catégorie à petites sommes. Notons 0 un des éléments initiaux.

DEFINITIONS. 1) On dira qu'un morphisme f de $K^{\cdot}$ est une *éjection* s'il existe un morphisme f' de même but que f pour lequel $(\beta f, (f, f'))$ est une somme naturalisée.

2) On dira qu'une flèche f de $K^{\cdot}$ est *initiale* si αf est un objet initial (ou encore si f est un objet initial dans $K^{\cdot}/\beta f$). On notera souvent les flèches initiales 0_e (si 0 en est la source et e le but).

PROPOSITION 1. *1) Toute flèche initiale est une éjection.*

2) Toute éjection de $K^{\cdot}$ est somme d'une flèche initiale et d'un objet.

Δ 1) Une flèche initiale 0_e de but e est une éjection, car $(e,(e,0_e))$ est une somme naturalisée.

2) Soit σ une éjection de but s; il existe donc σ' tel que $(s,(\sigma,\sigma'))$ soit une somme naturalisée. Notons $e=\alpha\sigma$ et $e'=\alpha\sigma'$. Comme on a les sommes naturalisées $(s,(\sigma,\sigma'))$ et $(e,(e,0_e))$ et que $\sigma.e=\sigma.e$ et $\sigma'.0_{e'}=\sigma.0_e$, on en déduit que σ est un morphisme somme de $(e,0_{e'})$. ∇

PROPOSITION 2. *Soient I un petit ensemble, $\mathcal{J}$ une partition de I et $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $K^{\cdot}$ indexée par I. Considérons une somme naturalisée $(e,(\sigma_i)_{i\in I})$ de $(e_i)_{i\in I}$ et pour chaque J de $\mathcal{J}$ une somme naturalisée $(e^J,(\sigma_i^J)_{i\in J})$ de $(e_i)_{i\in J}$. Soit $\sigma^J: e^J\to e$ le cocrochet de $(\sigma_i)_{i\in J}$, Alors $(e,(\sigma^J)_{J\in\mathcal{J}})$ est une somme naturalisée.*

Δ Cette proposition résulte de l'associativité des sommes. ∇

COROLLAIRE 1. *Soient $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $K^{\cdot}$ et $J\subset I$. Considérons les sommes naturalisées $(e,(\sigma_i)_{i\in I})$ et $(e',(\sigma_i')_{i\in J})$ respectivement des familles $(e_i)_{i\in I}$ et $(e_i)_{i\in J}$. Alors le cocrochet $\sigma: e'\to e$ de $(\sigma_i)_{i\in J}$ est une éjection.*

Δ Ce corollaire se déduit de la proposition précédente en considérant la partition $\mathcal{J}=\{J, I-J\}$ de I. ∇

COROLLAIRE 2. *Soit $(e,(\sigma_i)_{i\in I})$ une somme naturalisée. Alors σ_i est une éjection, pour tout i de I.*

Δ Le corollaire 1 entraîne le corollaire 2 en posant $J=\{i\}$. ∇

PROPOSITION 3. *L'ensemble $Ejec(K^{\cdot})$ des éjections de $K^{\cdot}$ définit une sous-catégorie saturée de $K^{\cdot}$ stable par petites sommes et par co-*

changement de base (i.e. stable par changement de base dans K^*).

$\triangle$ 1) Soient e'', e' et e trois objets de $K^\cdot$, et $\sigma : e \to e'$ et $\sigma' : e' \to e''$ deux éjections. Montrons alors que $\sigma'.\sigma$ est une éjection. Or il existe des morphismes σ_1 et σ_1' tels que $(e', (\sigma, \sigma_1))$ et $(e'', (\sigma', \sigma_1'))$ soient des sommes naturalisées. Il s'ensuit que $(e'', (\sigma'.\sigma, \sigma'.\sigma_1, \sigma_1'))$ est une somme naturalisée (vue l'associativité des sommes); par suite $\sigma'.\sigma$ est une éjection. D'autre part, tout inversible $\gamma : e \to e'$ de $K^\cdot$ est une éjection, car $(e', (0_{e'}, \gamma))$ est une somme naturalisée. Ainsi $Ejec(K^\cdot)$ définit une sous-catégorie saturée de $K^\cdot$.

2) Le fait que $Ejec(K^\cdot)$ soit stable par petites sommes résulte de la commutation des limites inductives.

3) Soit $\sigma : e \to \bar{e}$ une éjection et $f : e \to e'$ un morphisme. Comme σ est une éjection, il existe $\sigma_1 : e_1 \to \bar{e}$ tel que $(\bar{e}, (\sigma, \sigma_1))$ soit une somme naturalisée. Soit $(\bar{e}', (\sigma', \sigma_1'))$ une somme naturalisée de (e', e_1) et $\bar{f} : \bar{e} \to \bar{e}'$ le morphisme somme de (f, e_1).

$$\begin{tikzcd}
 & e_1 \arrow[dl, "\sigma_1'"'] \arrow[dr, "\sigma_1"] & \\
\bar{e}' & & \bar{e} \arrow[ll, "\bar{f}"'] \\
e' \arrow[u, "\sigma'"] & & e \arrow[ll, "f"] \arrow[u, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Alors $(\sigma', \bar{f}, f, \sigma)$ est un quatuor co-cartésien (i.e. un quatuor cartésien dans $K^{\cdot *}$), et σ' est une éjection. ∇

5. Catégories à sommes commutables.

Soit $H^\cdot$ une catégorie à petites limites projectives et à petites sommes.

Considérons les axiomes suivants :

(SC1) Les petites sommes, dans $H^\cdot$, sont stables par changement de base.

(SC2) Si un morphisme somme de deux morphismes de $H^\cdot$ est inversible, chacun de ces morphismes est inversible.

(SC'2) Dans la catégorie $\square\square H^{\cdot}$ des quatuors de $H^{\cdot}$, les éjections sont des quatuors cartésiens.

(SC"2) Les éjections de $H^{\cdot}$ sont des monomorphismes effectifs (i.e. des noyaux de deux flèches).

PROPOSITION 1. *Il y a équivalence entre les trois systèmes d'axiomes suivants :*

(i) (SC1) et (SC2);

(ii) (SC1) et (SC'2);

(iii) (SC1) et (SC"2).

Δ 1) (i) entraîne (ii). Soit $f_1 : e_1 \to e'_1$ et $f_2 : e_2 \to e'_2$ deux morphismes de $H^{\cdot}$. Notons $(e_1 + e_2, (\sigma_1, \sigma_2))$ et $(e'_1 + e'_2, (\sigma'_1, \sigma'_2))$ des sommes naturalisées de (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2). Soit les produits fibrés naturalisés: $((\sigma'_i, f''_i), (f_1 + f_2, \sigma''_i))$, $i \in \{1, 2\}$, et soit k_i l'unique flèche telle que:

$$f''_i . k_i = f_i \quad \text{et} \quad \sigma''_i . k_i = \sigma_i \qquad (1).$$

$$\begin{tikzcd}
e'_1 + e'_2 & & e_1 + e_2 \arrow[ll, "f_1 + f_2"'] \\
& \cdot \arrow[ur, "\sigma''_i"] \arrow[dl, "f''_i"'] & \\
e'_i \arrow[uu, "\sigma'_i"] & & e_i \arrow[ll, "f_i"] \arrow[ul, "k_i"'] \arrow[uu, "\sigma_i"']
\end{tikzcd}$$

Alors $(e_1 + e_2, (\sigma''_1, \sigma''_2))$ est une somme naturalisée déduite de $(e'_1 + e'_2, (\sigma'_1, \sigma'_2))$ par changement de base le long de $f_1 + f_2$. Mais l'égalité (1) prouve que $e_1 + e_2$ peut être considéré comme un morphisme somme de (k_1, k_2). Ceci entraîne d'après (SC2) que k_1 et k_2 sont inversibles. Ainsi, pour tout i de $\{1, 2\}$, $(f_1 + f_2, \sigma'_i, \sigma_i, f_i)$ est un quatuor cartésien.

2) (ii) entraîne (iii). Soit $\sigma_1 : e_1 \to e$ une éjection. Montrons que σ_1 est un monomorphisme effectif. Notons $(2, (V, F))$ une somme naturalisée de $(1, 1)$. Il existe $\sigma_2 : e_2 \to e$ tel que $(e, (\sigma_1, \sigma_2))$ soit une somme naturalisée. Soit $f : e \to 2$ l'unique flèche telle que :

$$f.\sigma_2 = F.1_{e_2} \quad \text{et} \quad f.\sigma_1 = V.1_{e_1}.$$

Posons $\Sigma_1 = (f, V, \sigma_1, 1_{e_1})$ et $\Sigma_2 = (f, F, \sigma_2, 1_{e_2})$. $(f^{\square\square}, (\Sigma_1, \Sigma_2))$ est alors une somme naturalisée dans $\square\square H^{\cdot}$. Donc Σ_1 est une éjection dans $\square\square H^{\cdot}$. Or d'après (ii) ceci entraîne que Σ_1 est cartésien, ou encore que σ_1 est un noyau de $(V, 1_e, f)$. Ainsi σ_1 est un monomorphisme effectif.

3) (iii) entraîne (i). Soient $f_1 : e_1 \to e'_1$ et $f_2 : e_2 \to e'_2$ deux morphismes de $K^{\cdot}$. Notons $(e, (\sigma_1, \sigma_2))$ et $(e', (\sigma'_1, \sigma'_2))$ des sommes naturalisées de (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2); soit $f = f_1 + f_2 : e \to e'$ la somme correspondante. Supposons f inversible. Montrons que f_1 et f_2 sont des monomorphismes effectifs. Comme f est inversible, $f.\sigma_i$ est un monomorphisme effectif,

$$\begin{tikzcd}
& e'_i \arrow[dl, "\sigma'_i"'] & \\
e' & & e_i \arrow[ul, "f_i"'] \arrow[ll, "f.\sigma_i"]
\end{tikzcd}$$

où $i \in \{1, 2\}$. Mais σ'_i étant un monomorphisme, f_i est un monomorphisme effectif, car les monomorphismes effectifs sont stables par changement de base.

Montrons maintenant que f_1 et f_2 sont des épimorphismes. Soit e''_1 une unité de $H^{\cdot}$, h_1 et h'_1 des morphismes de source e'_1 et de but e''_1, tels que $h_1.f_1 = h'_1.f_1$. Notons $e'' = e''_1 + e'_2$, $h = h_1 + e'_2$ et $h' = h'_1 + e'_2$. On a $h.f = h'.f$; d'où, f étant inversible, $h = h'$. Donc, $\sigma''_1 : e''_1 \to e''$ étant l'éjection,

$$\sigma''_1 . h_1 = h.\sigma'_1 = h'.\sigma'_1 = \sigma''_1 . h'_1 .$$

Ainsi $h_1 = h'_1$, puisque σ''_1 est un monomorphisme. Par suite f_1 est un épimorphisme. On montrerait de même que f_2 est un épimorphisme. En conclusion, f_1 et f_2, étant des monomorphismes effectifs et des épimorphismes, sont inversibles. ∇

DEFINITION. On dira que la catégorie $H^{\cdot}$ *est à sommes commutables* si $H^{\cdot}$ vérifie l'un des trois systèmes d'axiomes (i), (ii) ou (iii).

PROPOSITION 2. *Si $H^{\cdot}$ est une catégorie à sommes commutables,*

1) les petites sommes sont disjointes (i.e. si $(e, (\sigma_i)_{i \in I})$ est une som-

me naturalisée d'une petite famille $(e_i)_{i\in I}$ *d'unités de* $H^{\cdot}$, *et si* i *et* j *sont des éléments de* I *distincts,* $((\sigma_i, 0_{e_i}), (\sigma_j, 0_{e_j}))$ *est un produit fibré naturalisé).*

2) 0 *est initial strict (i.e. toute flèche de but* 0 *est un inversible).*

3) Quel que soit le morphisme $f: e \to e'$, *on a le quatuor cartésien:*

$$(f,]e', e'[,]e, e[, f+f).$$

Δ 1) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une petite famille d'unités de $H^{\cdot}$ et $(e, (\sigma_i))_{i\in I})$ une somme naturalisée de cette famille. Soit $j \in I$ et $I' = I - \{j\}$. Notons par $(\hat{e}_j, (\sigma_k^j)_{k\in I'})$ une somme naturalisée de $(e_k)_{k\in I'}$ et $\hat{\sigma}_j =]\sigma_i[_{i\in I'}$. Soit maintenant un indice $i \neq j$. Alors $(e, (\sigma_j, \hat{\sigma}_j))$ et $(e_i, (0_{e_i}, e_i))$ sont des sommes naturalisées. Par suite $(\sigma_i^{\square\square}, (\sigma, \sigma'))$ est une somme naturalisée dans $\square\square H^{\cdot}$, où $\sigma = (\sigma_i, \sigma_j, 0_{e_i}, 0_{e_j})$ et $\sigma' = (\sigma_i, \hat{\sigma}_j, e_i, \sigma_i^j)$.

$$\begin{tikzcd}
\hat{e}_j \arrow[d, "\hat{\sigma}_j"'] & & e_i \arrow[ll, dashed, "\sigma_i^j"'] \arrow[d, "e_i"] \arrow[dll, phantom, "\sigma'"] \\
e & & e_i \arrow[ll, "\sigma_i"'] \\
e_j \arrow[u, "\sigma_j"] & & 0 \arrow[ll, "0_{e_j}"] \arrow[u, "0_{e_i}"'] \arrow[ull, phantom, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

Ainsi, d'après la proposition 1, σ est un quatuor cartésien.

2) Soit $f: e \to 0$ une flèche de $H^{\cdot}$. Comme $(e, \emptyset)$ est une $\emptyset$-somme déduite de $(0, \emptyset)$ par changement de base le long de f, l'objet e est initial et f est donc inversible.

3) Pour tout $f: e \to e'$ le quatuor $f^{\square\square}$ est cartésien; on en déduit d'après la prop. 1.3 que le quatuor $]f^{\square\square}, f^{\square\square}[= (f,]e', e'[,]e, e[, f+f)$ est cartésien. ∇

REMARQUE. La proposition 2 prouve que, si la catégorie $H^{\cdot}$ a un objet nul, elle est équivalente à la catégorie $\mathbf{1}^{\cdot}$ (la catégorie discrète avec un seul objet).

6. Construction de catégories à sommes commutables.

Soit $K^\cdot$ une catégorie à petites limites projectives et à petites sommes. Soit $U^\cdot$ une sous-catégorie de $K^\cdot$. Considérons les axiomes suivants :

(OU1) Tout inversible appartient à U,

(OU2) U est stable par changement de base,

(OU3) U est stable par petites sommes,

(OU4) Tout morphisme initial appartient à U,

(OU5) Toutes les I-codiagonales appartiennent à U, quel que soit le petit ensemble I (un morphisme δ est une I-codiagonale s'il existe une somme naturalisée $(e,(\sigma_i)_{i\in I})$ vérifiant $\delta.\sigma_i = \alpha\sigma_i$, pour tout i de I).

LEMME. *Soit $U^\cdot$ une sous-catégorie de $K^\cdot$ vérifiant les axiomes (OU1), (OU3), (OU4) et (OU5); alors:*

1) Toute éjection appartient à U.

2) Tout co-crochet d'une petite famille de morphismes de $K^\cdot$, ayant même but, appartient à U.

$\triangle$ 1) Une éjection étant la somme d'une flèche initiale et d'un objet, elle appartient à U.

2) Si $(f_i)_{i\in I}$ est une petite famille d'éléments de U de même but e, on a $]f_i[_{i\in I} =]e[_{i\in I}.\sum_{i\in I} f_i \in U.U \subset U$. ∇

PROPOSITION 1. *Soit $p: K^\cdot \to H^\cdot$ un foncteur fidèle compatible avec les petites sommes et les produits fibrés finis, où $H^\cdot$ est une catégorie à sommes commutables. Soit $U^\cdot$ une sous-catégorie de $K^\cdot$ vérifiant les axiomes (OU1) à (OU5) et telle que $U \cap p^{-1}(H^\cdot_\gamma) = K^\cdot_\gamma$ (où $K^\cdot_\gamma$ et $H^\cdot_\gamma$ désignent les ensembles des inversibles de $K^\cdot$ et $H^\cdot$). Alors $K^\cdot$ est une catégorie à sommes commutables.*

$\triangle$ 1) *Axiome* (SC1): Soit $(e',(\sigma_i')_{i\in I})$ une somme naturalisée d'une petite famille $(e_i')_{i\in I}$ d'unités de $K^\cdot$. Soit f un morphisme de $K^\cdot$ de but e' et e sa source. Considérons, de plus, le produit fibré naturalisé $((\sigma_i', f_i),(f, g_i))$ dans $K^\cdot$ et notons $(s,(\sigma_i)_{i\in I})$ la somme naturalisée de $(e_i)_{i\in I}$, où $e_i = \alpha g_i$, et $g =]g_i[_{i\in I}$. L'axiome (SC1) sera établi

$$\begin{tikzcd}
 & & s \arrow[dll, "\sum_{i \in I} f_i"'] \arrow[dl, "g"] \\
e' & e \arrow[l, "f"] & \\
e_i \arrow[u, "\sigma_i'"] & e_i \arrow[l, "f_i"] \arrow[u, "g_i"'] \arrow[uur, "\sigma_i"'] &
\end{tikzcd}$$

lorsqu'on aura démontré que g est inversible.

a) Comme p est compatible avec les petites sommes et les produits fibrés finis, $(p(e),(p(g_i))_{i\in I})$ est une somme naturalisée dans $H^{\cdot}$ déduite de $(p(e'),(p(\sigma_i'))_{i\in I})$ par un changement de base le long de $p(f)$. Par suite, $p(g)$ est inversible, car $(p(s),(p(\sigma_i))_{i\in I})$ est aussi une somme naturalisée de $(p(e_i))_{i\in I}$.

b) Il reste donc à prouver que $g\in U$. Or, U étant stable par changement de base et σ_i' appartenant à U (lemme), on en déduit que $g_i\in U$, pour tout i de I. Donc le morphisme $g =]\, g_i\, [_{i\in I}$ appartient aussi à U (lemme) de sorte que $(e,(g_i)_{i\in I})$ est une somme naturalisée dans $K^{\cdot}$.

2) *Axiome* (SC2). Soit $f_1 : e_1 \to e_1'$ et $f_2 : e_2 \to e_2'$ deux morphismes de $K^{\cdot}$. Soit $(e,(\sigma_1,\sigma_2))$ et $(e',(\sigma_1',\sigma_2'))$ des sommes naturalisées de (e_1,e_2) et (e_1',e_2'), et notons $f = f_1 + f_2$. Supposons f inversible.

a) Comme $(p(e'),(p(\sigma_1'),p(\sigma_2')))$ et $(p(e),(p(\sigma_1),p(\sigma_2)))$ sont des sommes naturalisées dans $H^{\cdot}$ et que $p(f)$ est inversible, $p(f_1)$ et $p(f_2)$ sont inversibles, puisque $H^{\cdot}$ est à sommes commutables.

b) D'autre part, $f.\sigma_i = \sigma_i'.f_i$ pour $i=1$ et 2. Mais $f.\sigma_i$ appartient à U, car f est un inversible et σ_i une éjection (lemme); et σ_i' est un monomorphisme, $p(\sigma_i')$ en étant un et p étant fidèle. Donc f_1 et f_2 sont des éléments de U se projetant par p sur des inversibles; ce sont des inversibles de $K^{\cdot}$. ∇

COROLLAIRE 1: *Soit $p : K^{\cdot} \to H^{\cdot}$ un foncteur fidèle, compatible avec les petites sommes et les produits fibrés finis et tel que $p^{-1}(H^{\cdot}_{\gamma}) = K^{\cdot}_{\gamma}$. Alors, si $H^{\cdot}$ est une catégorie à sommes commutables, $K^{\cdot}$ l'est aussi.*

$\triangle$ Il suffit de prendre $U = K$ dans la proposition précédente. $\triangledown$

COROLLAIRE 2. *$H^\cdot$ étant une categorie à sommes commutables, pour tout objet e de $H^\cdot$, la catégorie $H^\cdot/e$ des «objets au-dessus de e» est une catégorie à sommes commutables.*

$\triangle$ La catégorie $H^\cdot$ étant à petites limites projectives et à petites sommes, il en est de même de $H^\cdot/e$. D'autre part le foncteur $\alpha_e : H^\cdot/e \to H^\cdot$ est un foncteur fidèle, compatible avec les petites sommes (puisqu'il admet un co-adjoint) et compatible avec les produits fibrés finis (prop. 6.2). Enfin, $\alpha_e^{-1}(H^\cdot_\gamma) = (H^\cdot/e)_\gamma$. Donc, $H^\cdot$ étant une catégorie à sommes commutables, il en est de même de $H^\cdot/e$. $\triangledown$

PROPOSITION 2. *$C^\cdot$ étant une petite catégorie et $H^\cdot$ étant une catégorie à sommes commutables, $\mathfrak{N}(H^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$ est une catégorie à sommes commutables.*

$\triangle$ 0) $H^\cdot$ étant une catégorie à petites limites projectives et à petites sommes, il en est de même de $\mathfrak{N}(H^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$.

1) Soit $(A'_i)_{i \in I}$ une petite famille de foncteurs de $C^\cdot$ vers $H^\cdot$ et soit $(A', (\sigma'_i)_{i\in I})$ une somme naturalisée de $(A'_i)_{i \in I}$ dans $\mathfrak{N}(H^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$. Soit $f : A \to A'$ une transformation naturelle. Pour chaque indice i de I, considérons un produit fibré naturalisé $((\sigma'_i, f_i), (f, \sigma_i))$. Soit e un objet. Comme $H^\cdot$ est à petites sommes et à produits fibrés finis, $(A'(e), (\sigma'_i(e))_{i \in I})$ est une somme naturalisée, $((\sigma'_i(e), f_i(e)), (f(e), \sigma_i(e)))$ un produit fibré naturalisé. Il en résulte donc que $(A(e), (\sigma_i(e))_{i\in I})$ est une somme naturalisée déduite de $(A'(e), (\sigma'_i(e))_{i \in I})$ par un changement de base le long de $f(e)$. Ceci étant vrai pour tout objet e de $C^\cdot$, alors $(A, (\sigma_i)_{i \in I})$ est une somme naturalisée dans $\mathfrak{N}(H^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$.

2) Soit maintenant $f_1 : B_1 \to B'_1$ et $f_2 : B_2 \to B'_2$ deux morphismes de $\mathfrak{N}(H^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$. Considérons les sommes naturalisées $(B', (\sigma'_1, \sigma'_2))$ et $(B, (\sigma_1, \sigma_2))$ respectivement de (B'_1, B'_2) et (B_1, B_2) et soit $f : B \to B'$ la transformation naturelle somme de (f_1, f_2). Si f est un inversible de $\mathfrak{N}(H^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$, i.e. une équivalence, $f(e)$ est inversible dans $H^\cdot$. Or

$(B'(e),(\sigma_1'(e),\sigma_2'(e)))$ et $(B(e),(\sigma_1(e),\sigma_2(e)))$ étant des sommes naturalisées dans $H^{\cdot}$ et $H^{\cdot}$ étant à sommes commutables, si $f(e)$ est un inversible, il en est de même de $f_1(e)$ et $f_2(e)$. Par suite f_1 et f_2 sont des inversibles de $\mathfrak{N}(H^{\cdot}, C^{\cdot})^{\square\square}$. ∇

Rappelons qu'un *quasi-topos* est une catégorie $H^{\cdot}$ qui vérifie les trois axiomes suivants :

1° $H^{\cdot}$ est à limites projectives et inductives finies.

2° $H^{\cdot}$ est cartésienne fermée.

3° Il existe une sous-catégorie M de $H^{\cdot}$ stable par changement de base telle que :

a) $Monoef(H^{\cdot}) \subset M \subset Mono(H^{\cdot})$, où $Mono(H^{\cdot})$ désigne la classe des monomorphismes de $H^{\cdot}$ et $Monoef(H^{\cdot})$ celle des monomorphismes effectifs, ou noyaux.

b) Le foncteur insertion $J_M : H^{\cdot} \to H^{\cdot}_M$ admet un co-adjoint, où $H^{\cdot}_M$ désigne la catégorie «des morphismes partiels pour M» (un morphisme partiel pour M est un span $B \xleftarrow{i} A \xrightarrow{f} B'$, où i appartient à M).

PROPOSITION 3. *Si $H^{\cdot}$ est un quasi-topos dans lequel $0_1 : 0 \to 1$ est un monomorphisme effectif, et si $H^{\cdot}$ est à petites limites projectives et petites sommes, $H^{\cdot}$ est aussi une catégorie à sommes commutables.*

Δ *Axiome* (SC1). Comme pour tout morphisme $f : e \to e'$ de $H^{\cdot}$ le foncteur changement de base $f^* : H^{\cdot}/e' \to H^{\cdot}/e$ admet un co-adjoint, f^* est compatible avec les petites sommes. C'est dire que dans $H^{\cdot}$ les petites sommes sont stables par changement de base.

Axiome (SC"2).

a) Montrons tout d'abord que le quatuor $(0_1, 1_e, 0, 0_e)$ est cartésien, pour tout objet e de $H^{\cdot}$. En effet, considérons le produit fibré naturalisé $((0_1, v),(1_e, v'))$ dans $H^{\cdot}$. Comme 0 est un objet initial strict, v est un inversible. On a $v'.v^{-1} = 0_e$ et $v.v^{-1} = 0$. v^{-1} étant l'unique morphisme qui vérifie ces deux égalités, $(0_1, 1_e, 0, 0_e)$ est cartésien. Par suite, comme 0_1 est un monomorphisme effectif, il en est de même de 0_e, pour tout objet e.

$$\begin{tikzcd}
1 & & 0 \arrow[ll, "0_1"'] \\
& u \arrow[ur, "v"] \arrow[dl, "v'"'] & \\
e \arrow[uu, "1_e"] & & 0 \arrow[ll, "0_e"] \arrow[uu, "0"'] \arrow[ul, "v^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

b) Soit maintenant $\sigma : u \to e$ une éjection, il existe donc un morphisme $\sigma' : u' \to e$ tel que $(e, (\sigma, \sigma'))$ soit une somme naturalisée ou encore tel que $((\sigma, 0_u), (\sigma', 0_{u'}))$ soit une somme fibrée naturalisée. Mais dans ce cas, comme $0_{u'}$ est un monomorphisme effectif, σ en est encore un.

Ainsi $H^{\cdot}$ vérifiant les axiomes (SC1) et (SC"2) est une catégorie à sommes commutables. ∇

COROLLAIRE. *Si $H^{\cdot}$ est un topos élémentaire à petites limites projectives et à petites sommes, c'est une catégorie à sommes commutables.*

REMARQUE. On peut se demander si la condition: 0_1 monomorphisme effectif n'est pas superflue pour montrer que $H^{\cdot}$ est une catégorie à sommes commutables. En fait, il n'en est rien. Il suffit pour cela de considérer la catégorie $P^{\cdot}_E$ associée à la relation d'ordre sur l'ensemble des parties d'un ensemble E non vide. C'est un quasi-topos mais ce n'est pas une catégorie à sommes commutables, car $0_1 : 0 \to 1$ n'est pas un monomorphisme effectif. En particulier une catégorie cartésienne fermée n'est pas nécessairement une catégorie à sommes commutables.

7. Exemples de catégories à sommes commutables.

I) $C^{\cdot}$ étant une petite catégorie, la catégorie $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, C^{\cdot *})^{\square\square}$ «des préfaisceaux» associée à $C^{\cdot}$ est un topos à petites limites projectives et à petites sommes; c'est donc une catégorie à sommes commutables. En particulier la catégorie $\mathfrak{M}$ «des ensembles» est une catégorie à sommes commutables.

II) Soit $\mathfrak{F}$ la catégorie ayant pour objets les catégories dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathfrak{U}$ et pour morphismes, les foncteurs entre ces catégories. En vertu du Cor. 1 de la prop. 1 du §6, $\mathcal{F}$ est une catégorie à sommes commutables, car :

1) $\mathcal{F}$ est à petites limites projectives et à petites sommes.

2) Le foncteur d'oubli fidèle canonique $p_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathfrak{M}$ est compatible avec les produits fibrés et les petites sommes.

3) Si l'image, par $p_{\mathcal{F}}$, d'un morphisme de $\mathcal{F}$ est inversible dans $\mathfrak{M}$, celui-ci est inversible dans $\mathcal{F}$.

III) Soit $\mathcal{P}$ la catégorie ayant pour objets les quasi-topologies (i. e. les Limesraüme [3]) dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathfrak{U}$ et pour morphismes, les applications continues entre ces espaces quasi-topologiques. Notons $\hat{\theta} : \mathcal{P} \to \mathfrak{M}$ son foncteur d'oubli canonique. On vérifie que $\mathcal{P}$ est un quasi-topos [8] à petites sommes et à petites limites projectives. D'autre part 0_1 est un monomorphisme effectif, car c'est un $\hat{\theta}$-monomorphisme. Donc $\mathcal{P}$ est une catégorie à sommes commutables.

IV) Soit $\mathcal{T}$ la catégorie ayant pour objets les espaces topologiques dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathfrak{U}$, et pour morphismes, les applications continues entre ces espaces topologiques; soit $\hat{\pi} : \mathcal{T} \to \mathcal{P}$ le foncteur pleinement fidèle canonique de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{P}$. Comme $\hat{\pi}$ est à petites sommes et à produits fibrés finis (puisqu'il admet un adjoint), $\mathcal{T}$ est aussi une catégorie à sommes commutables.

REMARQUE. On aurait pu le vérifier directement à l'aide de la prop. 1.6, en prenant pour U' la sous-catégorie de $\mathcal{T}$ formée des applications continues ouvertes.

V) Soit $\mathcal{T}_S$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ ayant pour objets les espaces topologiques séparés et $i_S : \mathcal{T}_S \to \mathcal{T}$ son foncteur injection canonique. Comme i_S est un foncteur à petites sommes et à petits produits fibrés, $\mathcal{T}_S$ est une catégorie à sommes commutables.

VI) Soit $\mathcal{K}e$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}_S$ ayant pour objets les espaces topologiques de Kelley et $i_{\mathcal{K}} : \mathcal{K}e \to \mathcal{T}_S$ son foncteur injection canonique. $\mathcal{K}e$ est une catégorie à petites sommes et à petites limites projectives. De plus le foncteur $i_{\mathcal{K}}$ étant à petites sommes (car il admet un co-adjoint), $\mathcal{K}e$ vérifie l'axiome (SC2). Il reste donc à montrer que

$\mathcal{K}e$ vérifie l'axiome (SC1).

Soient $(T', (\sigma_i')_{i \in I})$ une somme naturalisée d'une petite famille $(T_i')_{i \in I}$ dans $\mathcal{K}e$ (donc dans $\mathcal{T}$, puisque $i_S . i_{\mathcal{K}}$ est à petites sommes) et $f : T \to T'$ un morphisme de $\mathcal{K}e$. Pour chaque indice i de I formons le produit fibré naturalisé $((\sigma_i', f_i), (f, \sigma_i))$ dans $\mathcal{T}$ et notons T_i la source de σ_i. Comme σ_i' est une éjection dans $\mathcal{T}$, il en est de même de σ_i qui de ce fait est une application injective continue ouverte. Par suite, T étant un espace de Kelley il en est de même de T_i. Et il en résulte que $((\sigma_i', f_i), (f, \sigma_i))$ est un produit fibré naturalisé dans $\mathcal{K}e$. Enfin comme $(T, (\sigma_i)_{i \in I})$ est une somme naturalisée dans $\mathcal{T}$, c'est aussi une somme naturalisée dans $\mathcal{K}e$.

8. Théorème de commutation.

Soient $B^{\cdot}$ une catégorie à produits fibrés finis et $A^{\cdot}$ une sous-catégorie de $B^{\cdot}$ vérifiant les axiomes suivants :

1) L'injection canonique $I : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ admet un adjoint $J : B^{\cdot} \to A^{\cdot}$. Nous noterons η un morphisme d'adjonction associé à la paire d'adjoints $I \dashv J$.

2) Pour tout morphisme $f : e \to e'$ de $B^{\cdot}$ le quatuor $(\eta_{e'}, J(f), f, \eta_e)$ est cartésien.

3) (b', ϕ, f, b) étant un quatuor cartésien où $\phi \in A$, si b' est un I-projecteur, il en est de même de b.

PROPOSITION 1. *$B^{\cdot}$ étant une catégorie à limites projectives finies, soit $A^{\cdot}$ une sous-catégorie de $B^{\cdot}$, à petites limites projectives vérifiant les axiomes (1), (2) et (3). Alors le foncteur $J : B^{\cdot} \to A^{\cdot}$ est compatible avec les petites limites projectives connexes.*

Δ Pour démontrer cette proposition utilisons la prop. 3.2. $B^{\cdot}$ admettant un élément final, c'est une catégorie Λ-filtrante. Par suite, il suffit de démontrer que J est compatible avec les $C^{\cdot}$-limites projectives, pour toute petite catégorie $C^{\cdot}$ à élément final.

Notons 1 un élément final de $C^{\cdot}$ et 1_e l'unique morphisme de $C^{\cdot}$ allant de l'objet e vers 1. Soit $F : C^{\cdot} \to B^{\cdot}$ un foncteur admettant une limite projective naturalisée $l : \overleftarrow{u} \to F$. Il s'agit de démontrer que $J . l : \overleftarrow{J . u} \to J . F$ est une limite projective naturalisée.

$$\begin{tikzcd} A^\cdot \arrow[d, shift right, "I"'] & & \\ B^\cdot \arrow[u, shift right, "J"'] \arrow[loop below, "\Downarrow\eta"] & & C^\cdot \arrow[ll, "F"] \arrow[ll, bend right=50, "\overline{u}"'] \arrow[ll, phantom, bend right=25, "\Downarrow l"] \end{tikzcd}$$

$$I.J$$

Soit $\lambda : \overline{s} \to J.F$ une limite naturalisée et $((\lambda(1), c), (\eta.F(1), \mu_1))$ un produit fibré naturalisé. Notons $a = \alpha c$. Comme on a, pour tout objet e de $C^\cdot$, $(J.F)(1_e).\lambda(e).c = \lambda(1).c = (\eta.F)(1).\mu_1$ et que le quatuor $(\eta.F(1), J.F(1_e), F(1_e), \eta.F(e))$ est cartésien (axiome (2)), on en déduit qu'il existe un unique morphisme $\mu_e : a \to F(e)$ tel que

$$(\eta.F)(e).\mu_e = \lambda(e).c \quad \text{et} \quad F(1_e).\mu_e = \mu_1$$

pour tout e de $C^\cdot_0$.

$$\begin{tikzcd} s \arrow[rr, "\lambda(e)"] \arrow[dr, "\lambda(1)"'] & & J.F(e) \arrow[dl, "J.F(1_e)"'] \\ & J.F(1) & \\ a \arrow[uu, "c"] \arrow[rr, "\mu_e"] \arrow[dr, "\mu_1"'] & & F(e) \arrow[uu, "\eta.F(e)"'] \arrow[dl, "F(1_e)"] \\ & F(1) \arrow[uu, "\eta.F(1)"'] & \end{tikzcd}$$

L'application $e \mapsto \mu_e$ de $C^\cdot_0$ dans B définit un cône projectif $\mu : \overline{a} \to F$. Montrons que μ est une limite projective naturalisée. Soit $\mu' : \overline{a'} \to F$ un cône projectif. Comme $(\eta.F) \square\square \mu' : \overline{a'} \to I.J.F$ est un cône projectif et que $I.\lambda$ est une limite projective naturalisée (puisque I admet un adjoint), il existe donc un unique $k : a' \to s$ dans $B^\cdot$ tel que $(I.\lambda) \square\square \overline{k} = (\eta.F) \square\square \mu'$. Mais $((\eta.F, \mu), (I.\lambda, \overline{c}))$ étant un produit fibré naturalisé, il existe aussi un unique morphisme $t : \overline{a'} \to \overline{a}$ de $\mathfrak{N}(A^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$ tel que $\overline{c} \square\square t = \overline{k}$ et $\mu \square\square t = \mu'$. Or $C^\cdot$ étant connexe, le foncteur diagonal $\Delta : A^\cdot \to \mathfrak{N}(A^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$ est pleinement fidèle; par suite il existe un seul $h : a' \to a$ dans $A^\cdot$ tel que $\Delta(h) = \overline{h} = t$. Ce h est l'unique mor-

phisme cherché; en effet, soit $b' : a' \to a$ un morphisme et $\mu' = \mu \square\square \overline{b'}$
Alors

$$(I.\lambda) \square\square \overline{c} \square\square \overline{b'} = (\eta.F) \square\square \mu \square\square \overline{b'} = (\eta.F) \square\square \mu' = (I.\lambda) \square\square \overline{k}.$$

$$\begin{tikzcd}
I.J.F & & F \arrow[ll, "\eta.F"'] & \\
\overline{s} \arrow[u, "I.\lambda"] & & \overline{a} \arrow[ll, "\overline{c}"'] \arrow[u, "\mu"'] & \\
& & & \overline{a'} \arrow[ul, "t"'] \arrow[uul, "\mu'"'] \arrow[ulll, "\overline{k}"]
\end{tikzcd}$$

D'où $\overline{c} \square\square \overline{b'} = \overline{k}$; mais, comme $\mu \square\square \overline{b'} = \mu'$, ceci entraîne que $\overline{b} = \overline{b'}$, ou encore que $b = b'$ (puisque $C^{\cdot}$ est non-vide). Ainsi $\mu : \overline{a} \to F$ est une limite projective naturalisée.

Remarquons maintenant que, $J.l : \overline{J(u)} \to J.F$ étant un cône projectif et $\lambda : \overline{s} \to J.F$ étant une limite projective naturalisée, il existe un unique $k : J(u) \to s$ de $A^{\cdot}$ tel que $J.l = \lambda \square\square \overline{k}$. Or :

$$\lambda(1).k.\eta(u) = (J.l)(1).\eta(u) = (\eta.F)(1).l(1);$$

$$\begin{tikzcd}
& s \arrow[dl, "\lambda(1)"'] & & \\
J.F(1) & & a \arrow[ul, "c"'] \arrow[dl, "\mu(1)"] & u \arrow[l, "g"'] \arrow[ull, bend right, "k.\eta(u)"'] \arrow[dll, bend left, "l(1)"] \\
& F(1) \arrow[ul, "\eta.F(1)"] & &
\end{tikzcd}$$

il existe donc aussi un unique $g : u \to a$ tel que

$$c.g = k.\eta(u) \quad \text{et} \quad \mu(1).g = l(1).$$

On a, pour tout objet e de $C^{\cdot}$:

$$(\eta.F)(e).\mu(e).g = \lambda(e).c.g = \lambda(e).k.\eta(u)$$
$$= (J.l)(e).\eta(u) = (\eta.F)(e).l(e),$$

$$F(1_e).\mu(e).g = \mu(1).g = l(1) = F(1_e).l(e).$$

D'où $\mu(e).g = l(e)$, car $((\eta.F)(1), (J.\dot{F})(1_e), F(1_e), (\eta.F)(e))$ est cartésien. Mais $\mu : \overline{a} \to F$ et $l : \overline{u} \to F$ étant des limites projectives naturalisées, g est, de ce fait, inversible. D'autre part comme le quatuor

$(\eta . F(1), \lambda(1), \mu(1), c)$ est cartésien, $c : a \to s$ est un I-projecteur (axiome (3)), ce qui nous permet d'affirmer, puisque $k . \eta(u) = c . g$ et $k \in A$, que k est un inversible de $A^{\cdot}$. Donc $J . l : \overline{J(u)} \to J . F$ est une limite projective naturalisée. ∇

COROLLAIRE 1. (Théorème de commutation.) *$H^{\cdot}$ étant une catégorie à sommes commutables, alors dans $H^{\cdot}$ les petites sommes commutent avec les petites limites projectives connexes.*

Δ I étant un petit ensemble, soient $B^{\cdot} = H^{\cdot I}$ et $A^{\cdot}$ l'image de $H^{\cdot}$ par la diagonale $\Delta : H^{\cdot} \to H^{\cdot I}$. Alors $A^{\cdot}$ vérifie les axiomes: (1) puisque $H^{\cdot}$ est à petites sommes, (2) puisque $H^{\cdot}$ possède la propriété (SC'2), (3) puisque $H^{\cdot}$ possède la propriété (SC1). La proposition précédente nous permet de conclure que le foncteur «I-somme» $\Sigma : H^{\cdot I} \to H^{\cdot}$, adjoint de Δ, est compatible avec les petites limites projectives connexes. ∇

COROLLAIRE 2. *$H^{\cdot}$ étant une catégorie à sommes commutables, alors dans $H^{\cdot}$,*

1° les petites sommes commutent avec les noyaux (resp. les petits produits fibrés);

2° les monomorphismes (resp. les monomorphismes effectifs) sont stables par petites sommes.

9. Le foncteur $\boxtimes$.

Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie ayant pour objets les éléments de l'univers $\mathfrak{U}$ et pour morphismes, les applications entre éléments de $\mathfrak{U}$. Soit aussi $H^{\cdot}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie (i.e. pour toutes unités e et e' de $H^{\cdot}$, $Hom_{H^{\cdot}}(e', e)$ est un élément de $\mathfrak{U}$) à petites sommes et à limites projectives finies. On désignera par $Y' : H^{\cdot *} \to \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, H^{\cdot})^{\square\square}$ le plongement de Yonéda associé à la catégorie $H^{\cdot *}$, duale de $H^{\cdot}$. Considérons:

1) Pour chaque objet e de $H^{\cdot}$, le foncteur $(-) \boxtimes e : \mathfrak{M} \to H^{\cdot}$ adjoint du foncteur $Y'(e) : H^{\cdot} \to \mathfrak{M}$ construit à l'aide des sommes canoniques,

2) Pour chaque objet M de $\mathfrak{M}$, le foncteur $M \boxtimes (-) : H^{\cdot} \to H^{\cdot}$ défini par $M \boxtimes (-) = \Sigma_M . \Delta_M$, où $\Delta_M : H^{\cdot} \to H^{\cdot M}$ est un foncteur diagonal et Σ_M le foncteur M-sommes canoniques (Σ_M est donc un adjoint de Δ_M). Ces

deux foncteurs sont prolongeables en un unique foncteur $\boxtimes : \mathfrak{M} \times H^{\cdot} \to H^{\cdot}$. Nous noterons $\sigma_m^{(M,u)}$ la m-ième éjection de u vers $M \boxtimes u$. On a, pour tout morphisme $f : M \to M'$ de $\mathfrak{M}$ et tout objet e de $H^{\cdot}$,

$$f \boxtimes e = \left] \sigma_{f(m)}^{(M', e)} \right[_{m \in M} .$$

PROPOSITION 1. *$\mathsf{X} : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ désignant le foncteur «produit» dans $\mathfrak{M}$, il existe une équivalence naturelle :*

$$\gamma : \boxtimes . (\mathsf{X} \times Id_{H^{\cdot}}) \to \boxtimes . (Id_{\mathfrak{M}} \times \boxtimes).$$

$\triangle$ Soient e un objet de $H^{\cdot}$ et M et M' deux objets de $\mathfrak{M}$. D'après la transitivité des structures libres il existe un unique inversible

$$\gamma(M, M', e) : (M \times M') \boxtimes e \to M \boxtimes (M' \boxtimes e) \quad \text{tel que, si } (m, m') \in M \times M',$$

$$\gamma(M, M', e) . \sigma_{(m, m')}^{(M \times M', e)} = \sigma_m^{(M, M' \boxtimes e)} . \sigma_{m'}^{(M', e)} .$$

Montrons que l'application $(M, M', e) \mapsto \gamma(M, M', e)$ définit une transformation naturelle $\gamma : \boxtimes . (\mathsf{X} \times Id_{H^{\cdot}}) \to \boxtimes . (Id_{\mathfrak{M}} \times \boxtimes)$. Soient $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$ deux morphismes de $\mathfrak{M}$ et $h : e \to e'$ un morphisme de $H^{\cdot}$.

$$\begin{tikzcd}
M' \boxtimes (N' \boxtimes e') & (M' \times N') \boxtimes e' \arrow[l, "\gamma(M', N', e')"'] \\
M \boxtimes (N' \boxtimes e') \arrow[u, "f \boxtimes (N' \boxtimes e')"] & (M \times N') \boxtimes e' \arrow[l, "\gamma(M, N', e')"'] \arrow[u, "(f \times N') \boxtimes e'"'] \\
M \boxtimes (N \boxtimes e') \arrow[u, "M \boxtimes (g \boxtimes e')"] & (M \times N) \boxtimes e' \arrow[l, "\gamma(M, N, e')"'] \arrow[u, "(M \times g) \boxtimes e'"'] \\
M \boxtimes (N \boxtimes e) \arrow[u, "M \boxtimes (N \boxtimes h)"] \arrow[uuu, bend left=60, "f \boxtimes (g \boxtimes h)"] & (M \times N) \boxtimes e \arrow[l, "\gamma(M, N, e)"'] \arrow[u, "(M \times N) \boxtimes h"'] \arrow[uuu, bend right=60, "(f \times g) \boxtimes h"']
\end{tikzcd}$$

On a :

1) $$\gamma(M', N', e') . (f \times N') \boxtimes e' . \sigma_{(m, n')}^{(M \times N', e')} =$$

$$\gamma(M', N', e') . \sigma_{(f(m), n')}^{(M' \times N', e')} = \sigma_{f(m)}^{(M', N' \boxtimes e')} . \sigma_{n'}^{(N', e')} =$$

$$= f \boxtimes (N' \boxtimes e') . \sigma_m^{(M, N' \boxtimes e')} . \sigma_{n'}^{(N', e')} =$$

$$= f \boxtimes (N' \boxtimes e') . \gamma(M, N', e') . \sigma_{(m, n')}^{(M \times N', e')}$$

pour tout $(m, n') \in M \times N'$, donc :

$$\gamma(M', N', e').(f \times N') \boxtimes e' = f \boxtimes (N' \boxtimes e').\gamma(M, N', e').$$

2) $\gamma(M, N', e').(M \times g) \boxtimes e'.\sigma^{(M \times N, e')}_{(m, n)} = \gamma(M, N', e').\sigma^{(M \times N', e')}_{(m, g(n))} =$

$$= \sigma^{(M, N' \boxtimes e')}_{m}.\sigma^{(N', e')}_{g(n)} = \sigma^{(M, N' \boxtimes e')}_{m}.g \boxtimes e'.\sigma^{(N, e')}_{n} =$$

$$= M \boxtimes (g \boxtimes e').\sigma^{(M, N \boxtimes e')}_{m}.\sigma^{(N, e')}_{n} =$$

$$= M \boxtimes (g \boxtimes e').\gamma(M, N, e').\sigma^{(M \times N, e')}_{(m, n)}$$

pour tout $(m, n) \in M \times N$, donc :

$$\gamma(M, N', e').(M \times g) \boxtimes e' = M \boxtimes (g \boxtimes e').\gamma(M, N, e').$$

3) $\gamma(M, N, e').(M \times N) \boxtimes h.\sigma^{(M \times N, e)}_{(m, n)} = \gamma(M, N, e').\sigma^{(M \times N, e')}_{(m, n)}.h =$

$$= \sigma^{(M, N \boxtimes e')}_{m}.\sigma^{(N, e')}_{n}.h = \sigma^{(M, N \boxtimes e')}_{m}.N \boxtimes h.\sigma^{(N, e)}_{n} =$$

$$= M \boxtimes (N \boxtimes h).\sigma^{(M, N \boxtimes e)}_{m}.\sigma^{(N, e)}_{n} =$$

$$= M \boxtimes (N \boxtimes h).\gamma(M, N, e).\sigma^{(M \times N, e)}_{(m, n)}$$

pour tout $(m, n) \in M \times N$, donc

$$\gamma(M, N, e').(M \times N) \boxtimes h = M \boxtimes (N \boxtimes h).\gamma(M, N, e).$$

On en déduit que :

$$\gamma(M', N', e').(f \times g) \boxtimes h = f \boxtimes (g \boxtimes h).\gamma(M, N, e)$$

et ceci, pour tout $(f, g, h) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times H$. Donc l'application qui associe $\gamma(M, N, e)$ à (M, N, e) définit une transformation naturelle

$$\gamma : \boxtimes.(\mathsf{X} \times Id_{H^\cdot}) \longrightarrow \boxtimes.(Id_{\mathfrak{M}} \times \boxtimes). \quad \nabla$$

PROPOSITION 2. *Soit une catégorie $A^\cdot$ et un foncteur $\Phi : H^\cdot \times A^\cdot \to H^\cdot$. Si, pour tout objet a de $A^\cdot$ le foncteur $\Phi(-, a) : H^\cdot \to H^\cdot$ est compatible avec les petites sommes, alors il existe une équivalence naturelle :*

$$g : \boxtimes.(Id_{\mathfrak{M}} \times \Phi) \to \Phi.(\boxtimes \times Id_{A^\cdot}) : \mathfrak{M} \times H^\cdot \times A^\cdot \to H^\cdot.$$

$$\begin{tikzcd}
H^{\cdot} & & H^{\cdot}\times A^{\cdot} \arrow[ll, "\Phi"'] \\
\mathfrak{M}\times H^{\cdot} \arrow[u, "\boxtimes"] \arrow[urr, phantom, "\nearrow g"] & & \mathfrak{M}\times H^{\cdot}\times A^{\cdot} \arrow[ll, "Id_{\mathfrak{M}}\times\Phi"] \arrow[u, "\boxtimes\times Id_{A^{\cdot}}"']
\end{tikzcd}$$

Δ Comme $\Phi(-,a)$, pour tout objet a de $A^{\cdot}$ et tout objet M de $\mathfrak{M}$, est compatible avec les M-sommes, on en déduit la somme naturalisée $(\Phi(M\boxtimes e,a),(\Phi(\sigma_m^{(M,e)},a))_{m\in M})$.

D'autre part, $(M\boxtimes\Phi(e,a),(\sigma_m^{(M,\Phi(e,a))})_{m\in M})$ est aussi une somme naturalisée. Il existe donc un unique inversible

$$g(M,e,a):M\boxtimes\Phi(e,a)\longrightarrow\Phi(M\boxtimes e,a)$$

tel que, pour tout $m\in M$ on ait

$$g(M,e,a).\sigma_m^{(M,\Phi(e,a))}=\Phi(\sigma_m^{(M,e)},a).$$

Il reste à montrer que l'application $(M,e,a)\mapsto g(M,e,a)$ de $\mathfrak{M}_0\times H^{\cdot}_0\times A^{\cdot}_0$ dans H définit une transformation naturelle

$$g:\boxtimes.(Id_{\mathfrak{M}}\times\Phi)\longrightarrow\Phi.(\boxtimes\times Id_{A^{\cdot}}).$$

Soient $f:M\to M'$, $h:e\to e'$ et $k:a\to a'$ des morphismes de $\mathfrak{M}$, $H^{\cdot}$ et $A^{\cdot}$. On a:

$$\begin{tikzcd}
M'\boxtimes\Phi(e',a') \arrow[r, "g(M',e',a')"] & \Phi(M'\boxtimes e',a') \\
M\boxtimes\Phi(e',a') \arrow[u, "f\boxtimes\Phi(e',a')"] \arrow[r, "g(M,e',a')"] & \Phi(M\boxtimes e',a') \arrow[u, "\Phi(f\boxtimes e',a')"'] \\
M\boxtimes\Phi(e,a') \arrow[u, "M\boxtimes\Phi(h,a')"] \arrow[r, "g(M,e,a')"] & \Phi(M\boxtimes e,a') \arrow[u, "\Phi(M\boxtimes h,a')"'] \\
M\boxtimes\Phi(e,a) \arrow[u, "M\boxtimes\Phi(e,k)"] \arrow[r, "g(M,e,a)"] \arrow[uuu, bend left=60, "f\boxtimes\Phi(h,k)"] & \Phi(M\boxtimes e,a) \arrow[u, "\Phi(M\boxtimes e,k)"'] \arrow[uuu, bend right=60, "\Phi(f\boxtimes h,k)"']
\end{tikzcd}$$

1) $$g(M', e', a').f\boxtimes\Phi(e', a').\sigma_m^{(M,\, \Phi(e', a'))} =$$

$$= g(M', e', a').\sigma_{f(m)}^{(M',\, \Phi(e', a'))} = \Phi(\sigma_{f(m)}^{(M', e')}, a') =$$

$$= \Phi(f\boxtimes e'.\sigma_m^{(M, e')}, a') = \Phi(f\boxtimes e', a').\Phi(\sigma_m^{(M, e')}, a') =$$

$$= \Phi(f\boxtimes e', a').g(M, e', a').\sigma_m^{(M,\, \Phi(e', a'))}$$

pour tout $m \in M$, donc :

$$g(M', e', a').f\boxtimes\Phi(e', a') = \Phi(f\boxtimes e', a').g(M, e', a').$$

2) $$g(M, e', a').M\boxtimes\Phi(h, a').\sigma_m^{(M,\, \Phi(e, a'))} =$$

$$g(M, e', a').\sigma_m^{(M,\, \Phi(e', a'))}.\Phi(h, a') = \Phi(\sigma_m^{(M, e')}, a').\Phi(h, a') =$$

$$= \Phi(\sigma_m^{(M, e')}.h, a') = \Phi(M\boxtimes h.\sigma_m^{(M, e)}, a') =$$

$$= \Phi(M\boxtimes h, a').\Phi(\sigma_m^{(M, e)}, a')$$

$$= \Phi(M\boxtimes h, a').g(M, e, a').\sigma_m^{(M,\, \Phi(e, a'))}$$

pour tout $m \in M$, donc:

$$g(M, e', a').M\boxtimes\Phi(h, a') = \Phi(M\boxtimes h, a').g(M, e, a').$$

3) $$g(M, e, a').M\boxtimes\Phi(e, k).\sigma_m^{(M,\, \Phi(e, a))} =$$

$$g(M, e, a').\sigma_m^{(M,\, \Phi(e, a'))}.\Phi(e, k) = \Phi(\sigma_m^{(M, e)}, a').\Phi(e, k) =$$

$$= \Phi(\sigma_m^{(M, e)}, k) = \Phi(M\boxtimes e, k).\Phi(\sigma_m^{(M, e)}, a) =$$

$$= \Phi(M\boxtimes e, k).g(M, e, a).\sigma_m^{(M,\, \Phi(e, a))}$$

pour tout m de M, donc :

$$g(M, e, a').M\boxtimes\Phi(e, k) = \Phi(M\boxtimes e, k).g(M, e, a).$$

On en déduit :

$$g(M', e', a').f\boxtimes\Phi(h, k) = \Phi(f\boxtimes h, k).g(M, e, a),$$

pour tout $(f, h, k) \in \mathfrak{M}\times H\times A$. L'application $(M, e, a) \mapsto g(M, e, a)$ définit donc une transformation naturelle

$$g : \boxtimes.(Id_{\mathfrak{M}}\times\Phi) \to \Phi.(\boxtimes\times Id_{A^\bullet}).\nabla$$

Supposons maintenant que $H^{\cdot}$ soit une catégorie à sommes commutables et soit $X : H^{\cdot} \times H^{\cdot} \to H^{\cdot}$ son foncteur « produit ».

COROLLAIRE. *Il existe une équivalence naturelle*

$$g : \boxtimes . (Id_{\mathfrak{M}} \times X) \to X . (\boxtimes \times Id_{H^{\cdot}}) : \mathfrak{M} \times H^{\cdot} \times H^{\cdot} \to H^{\cdot} .$$

Posons maintenant $\partial = (-) \boxtimes 1 : \mathfrak{M} \to H^{\cdot}$.

PROPOSITION 3. *Il existe une équivalence naturelle*

$$d : X . (\partial \times Id_{H^{\cdot}}) \to \boxtimes : \mathfrak{M} \times H^{\cdot} \to H^{\cdot} .$$

$\triangle$ $H^{\cdot}$ étant une catégorie cartésienne, il existe une équivalence naturelle $u : 1 \times (-) \to Id_{H^{\cdot}}$. Posons $d(M, e) = M \boxtimes u(e) . g(M, 1, e)^{-1}$. Comme $M \boxtimes u(e)$ et $g(M, 1, e)$ sont des inversibles, il en est de même de $d(M, e)$. Montrons que l'application $(M, e) \mapsto d(M, e)$ de $\mathfrak{M}_0 \times H^{\cdot}_0$ dans H définit la transformation naturelle d cherchée. En effet, si $f : M \to M'$ et $h : e \to e'$ sont des morphismes de $\mathfrak{M}$ et $H^{\cdot}$, on a :

$$\begin{tikzcd}
(M' \boxtimes 1) \times e' & M' \boxtimes (1 \times e') \arrow[l, "g(M', 1, e')"'] \arrow[r, "M' \boxtimes u(e')"] & M' \boxtimes e' \\
 & M \boxtimes (1 \times e') \arrow[u, "f \boxtimes (1 \times e')"] \arrow[r, "M \boxtimes u(e')"] & M \boxtimes e' \arrow[u, "f \boxtimes e'"'] \\
(M \boxtimes 1) \times e \arrow[uu, "(f \boxtimes 1) \times h"] & M \boxtimes (1 \times e) \arrow[l, "g(M, 1, e)"'] \arrow[u, "M \boxtimes (1 \times h)"] \arrow[r, "M \boxtimes u(e)"] & M \boxtimes e \arrow[u, "M \boxtimes h"']
\end{tikzcd}$$

$$d(M', e') . (f \boxtimes 1) \times h = (f \boxtimes h) . d(M, e),$$

car les diagrammes ci-dessus commutent, $g : \boxtimes . (Id_{\mathfrak{M}} \times X) \to X . (\boxtimes \times Id_{H^{\cdot}})$, $f \boxtimes (-) : M \boxtimes (-) \to M' \boxtimes (-)$ et $M \boxtimes (-) . u : M \boxtimes (-) . 1 \times (-) \to M \boxtimes (-)$ étant des transformations naturelles. ∇

PROPOSITION 4. *Le foncteur* $\partial : \mathfrak{M} \to H^{\cdot}$ *est compatible avec les produits finis.*

$\triangle$ Soient $\mathbf{1} = \{ 0 \}$ et $\mathbf{1}_M$ l'unique application allant de l'objet M de $\mathfrak{M}$ vers $\mathbf{1}$.

1) Etant donné que $\sigma_0^{(\mathbf{1}, e)} : e \to \mathbf{1} \boxtimes e$ est inversible pour tout objet e de $H^{\cdot}$, on en conclut que $(-) \boxtimes 1 = \partial$ est compatible avec les éléments fi-

naux.

2) Soit (M, M') un couple d'objets de $\mathcal{M}$ et $((P, P'), M\times M')$ son produit naturalisé canonique dans $\mathcal{M}$. D'autre part, considérons le produit naturalisé $((\pi, \pi'), (M\boxtimes 1)\times(M'\boxtimes 1))$. Le diagramme suivant commute et toutes ses colonnes sont formées d'inversibles.

$$\begin{tikzcd}
M'\boxtimes 1 & (M\times M')\boxtimes 1 \arrow[l, "P'\boxtimes 1"'] \arrow[r, "P\boxtimes 1"] & M\boxtimes 1 \\
(\mathbf{1}\times M')\boxtimes 1 \arrow[u, "proj_2(\mathbf{1}, M')\boxtimes 1"] \arrow[d, "\gamma(\mathbf{1}, M', 1)"'] & (M\times M')\boxtimes 1 \arrow[l, "(\mathbf{1}_M\times M')\boxtimes 1"'] \arrow[r, "(M\times \mathbf{1}_{M'})\boxtimes 1"] \arrow[u, equal] \arrow[d, "\gamma(M, M', 1)"] & (M\times \mathbf{1})\boxtimes 1 \arrow[u, "proj_1(M, \mathbf{1})\boxtimes 1"'] \arrow[d, "\gamma(M, \mathbf{1}, 1)"] \\
\mathbf{1}\boxtimes(M'\boxtimes 1) & M\boxtimes(M'\boxtimes 1) \arrow[l, "\mathbf{1}_M\boxtimes(M'\boxtimes 1)"'] \arrow[r, "M\boxtimes(\mathbf{1}_{M'}\boxtimes 1)"] & M\boxtimes(\mathbf{1}\boxtimes 1) \\
(\mathbf{1}\boxtimes 1)\times(M'\boxtimes 1) \arrow[u, "d(\mathbf{1}, M'\boxtimes 1)"] \arrow[d, "proj_2(\mathbf{1}\boxtimes 1, M'\boxtimes 1)"'] & (M\boxtimes 1)\times(M'\boxtimes 1) \arrow[l, "(\mathbf{1}_M\boxtimes 1)\times(M'\boxtimes 1)"'] \arrow[r, "(M\boxtimes 1)\times(\mathbf{1}_{M'}\boxtimes 1)"] \arrow[u, "d(M, M'\boxtimes 1)"] \arrow[d, equal] & (M\boxtimes 1)\times(\mathbf{1}\boxtimes 1) \arrow[u, "d(M, \mathbf{1}\boxtimes 1)"'] \arrow[d, "proj_1(M\boxtimes 1, \mathbf{1}\boxtimes 1)"] \\
M'\boxtimes 1 & (M\boxtimes 1)\times(M'\boxtimes 1) \arrow[l, "\pi'"'] \arrow[r, "\pi"] & M\boxtimes 1
\end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que $((P\boxtimes 1, P'\boxtimes 1),(M\times M')\boxtimes 1)$ est aussi un produit naturalisé. Ceci achève la démonstration. ∇

PROPOSITION 5. *Le foncteur* $(-)\boxtimes e : \mathfrak{M} \to H^{\cdot}$ *est compatible avec les noyaux, pour tout objet* e *de* $H^{\cdot}$.

Δ Notons ici, pour simplifier σ^I_i au lieu de $\sigma^{(I,e)}_i$. Soient M et M' deux objets de $\mathfrak{M}$ et f_1, f_2 deux applications de source M et de but M'. Appelons $i : N \to M$ le noyau canonique de (f_1, f_2), où

$$N = \{ m \in M \mid f_1(m) = f_2(m) \}.$$

Montrons que $i\boxtimes e$ est un noyau de $(f_1\boxtimes e, f_2\boxtimes e)$. Soit $\phi : u \to M\boxtimes e$ un morphisme de $H^{\cdot}$ tel que $(f_1\boxtimes e).\phi = (f_2\boxtimes e).\phi$. Pour chaque indice m de M, considérons le produit fibré naturalisé $((\sigma^M_m, \phi_m),(\phi, \sigma_m))$ et soit $u_m = \alpha\,\phi_m$. Alors $(u,(\sigma_m)_{m\in M})$ est une somme naturalisée déduite de $(M\boxtimes e,(\sigma^M_m)_{m\in M})$ par un changement de base le long de ϕ. On a :

$$\sigma^{M'}_{f_1(m)}.\phi_m = f_1\boxtimes e.\sigma^M_m.\phi_m = f_1\boxtimes e.\phi.\sigma_m = f_2\boxtimes e.\phi.\sigma_m = \sigma^{M'}_{f_2(m)}.\phi_m .$$

Si m est un élément de M n'appartenant pas à N, on a $f_1(m)\neq f_2(m)$. Par suite $((\sigma^{M'}_{f_1(m)}, 0_e),(\sigma^{M'}_{f_2(m)}, 0_e))$ est un produit fibré naturalisé puisque dans $H^{\cdot}$ les petites sommes sont disjointes.

$$\begin{tikzcd}
& e \arrow[dl, "\sigma^{M'}_{f_2(m)}"'] & & \\
M'\boxtimes e & & 0 \arrow[ul, "0_e"'] \arrow[dl, "0_e"] & u_m \arrow[l, "k_m"'] \arrow[ull, "\phi_m"'] \arrow[dll, "\phi_m"] \\
& e \arrow[ul, "\sigma^{M'}_{f_1(m)}"] & &
\end{tikzcd}$$

Il existe donc un unique morphisme $k_m : u_m \to 0$ tel que $0_e . k_m = \phi_m$. Mais 0 étant un objet initial strict, k_m est inversible et u_m est un objet initial.

Soit $(h_m)_{m\in M}$ la famille de morphismes de source u_m et de but $N\boxtimes e$ définie par :

$$h_m = 0_{N\boxtimes e}.k_m \text{ , si } m\notin N, \qquad h_m = \sigma^N_m.\phi_m \text{ , si } m\in N.$$

Comme $(u,(\sigma_m)_{m\in M})$ est une somme naturalisée, il existe un unique morphisme $h: u \to N \boxtimes e$ tel que pour tout $m \in M$ on ait $h.\sigma_m = h_m$. Montrons que h est l'unique morphisme de $H^{\cdot}$ tel que $i \boxtimes e.h = \phi$.

1) Si $m \notin N$, comme u_m est initial, on a

$$i \boxtimes e.h.\sigma_m = \phi.\sigma_m .$$

2) Si $m \in N$, alors

$$i \boxtimes e.h.\sigma_m = i \boxtimes e.\sigma^N_m.\phi_m = \sigma^M_m.\phi_m = \phi.\sigma_m .$$

Il s'ensuit $i \boxtimes e.h.\sigma_m = \phi.\sigma_m$ pour tout $m \in M$, d'où $i \boxtimes e.h = \phi$. D'autre part, $i \boxtimes e =]\,\sigma^M_n\,[_{n\in N}$; or, d'après le cor. 2 de la prop. 1-8, $i \boxtimes e$ est une éjection; c'est aussi un monomorphisme d'après (SC"2). h est de ce fait l'unique morphisme cherché. ∇

COROLLAIRE 1. *Le foncteur $\partial: \mathfrak{M} \to H^{\cdot}$ est compatible avec les limites projectives finies.*

COROLLAIRE 2. *Pour tout objet e de $H^{\cdot}$, le foncteur $(-)\boxtimes e: \mathfrak{M} \to H^{\cdot}$ est compatible avec les limites projectives connexes finies.*

Δ $d: X.\partial \times Id_{H^{\cdot}} \to \boxtimes$ étant une équivalence naturelle, il en est de même de $d.[Id_{\mathfrak{M}}, \overline{e}]: \mathfrak{M} \to H^{\cdot}$. Par ailleurs,

$$X.\partial \times Id_{H^{\cdot}}.[Id_{\mathfrak{M}}, \overline{e}] = X.[\partial, \overline{e}] = X.[Id_{H^{\cdot}}, \overline{e}].\partial = (-)\times e.\partial$$

et $\boxtimes.[Id_{\mathfrak{M}}, \overline{e}] = (-)\boxtimes e$. Or $(-)\times e: H^{\cdot} \to H^{\cdot}$ est compatible avec les limites projectives connexes (prop. 7.2) et ∂ est compatible avec les limites projectives finies. Donc $(-)\times e.\partial$ et $(-)\boxtimes e$ sont compatibles avec les limites projectives connexes finies. ∇

COROLLAIRE 3. *$\boxtimes: \mathfrak{M} \times H^{\cdot} \to H^{\cdot}$ est bi-compatible avec les limites projectives connexes finies et avec les petites limites inductives.*

PROPOSITION 6. *e étant un objet non-initial, le foncteur $(-)\boxtimes e$ est fidèle.*

Δ Soient M et M' deux objets de $\mathfrak{M}$ et f_1, f_2 deux applications, de source M et de but M', telles que $f_1 \boxtimes e = f_2 \boxtimes e$. Montrons que $f_1 = f_2$. On a :

$$f_1 \boxtimes e.\sigma^M_m = f_2 \boxtimes e.\sigma^M_m, \text{ ou encore } \sigma^{M'}_{f_1(m)} = \sigma^{M'}_{f_2(m)}, \text{ si } m \in M.$$

Si $f_1(m) \neq f_2(m)$, alors $((\sigma^{M'}_{f_1(m)}, 0_e), (\sigma^{M'}_{f_2(m)}, 0_e))$ est un produit fibré naturalisé, puisque dans $H^{\cdot}$ les petites sommes sont disjointes. Mais comme $\sigma_{f_1(m)} = \sigma_{f_2(m)}$, il existe un unique g tel que $0_e \cdot g = e$. Ce g est inversible, 0 étant un objet initial strict. Donc e est initial, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi $f_1(m) = f_2(m)$ pour tout m de M. On en conclut que $f_1 = f_2$. ∇

PROPOSITION 7. *Soit $\Phi : \mathfrak{M} \to H^{\cdot}$ un foncteur compatible avec les petites sommes et l'élément final; alors Φ est équivalent au foncteur ∂.*

Δ On sait que ∂ est adjoint à $Hom_{H^{\cdot}}(-, 1) : H^{\cdot} \to \mathfrak{M}$; le foncteur Φ l'étant aussi, Φ et ∂ sont équivalents. ∇

10. Objets séparés dans une catégorie à sommes commutables [6] .

Soit $H^{\cdot}$ une catégorie à sommes commutables (on utilisera les mêmes conventions qu'au § 9) et soit $E^{\cdot}$ une sous-catégorie de $H^{\cdot}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) Tous les objets de $H^{\cdot}$ sont des objets de $E^{\cdot}$.

2) E est stable par changement de base (i.e. E est un $\emptyset$- enclos).

3) E est stable par petites sommes.

4) Pour tout objet e de $H^{\cdot}$, on a $0_e \in E$.

Les axiomes (3) et (4) entraînent que toute éjection appartient à E (proposition 1-4).

EXEMPLES. 1° Prenons $H^{\cdot} = \mathfrak{T}$ (voir § 7.IV). Pr, ensemble des applications propres de $\mathfrak{T}$, vérifie les axiomes (1) à (4). En effet, (1) et (2) sont démontrés dans [6] et (4) provient du fait que $\emptyset$ est un fermé de n'importe quelle topologie. Il reste donc à vérifier l'axiome (3):

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une petite famille d'applications propres. Notons T_i et T'_i les sources et buts de f_i, pour chaque indice i de I et

$$T = \sum_{i \in I} T_i, \quad T' = \sum_{i \in I} T'_i, \quad f = \sum_{i \in I} f_i .$$

Soit F un fermé de T, alors pour chaque i de I, il existe un fermé F_i de T_i tel que $F = \bigcup_{i \in I} F_i \times \{ i \}$. Il s'ensuit:

$$f(F) = f(\bigcup_{i \in I} F_i \times \{ i \}) = \bigcup_{i \in I} f(F_i \times \{ i \}) = \bigcup_{i \in I} f_i(F_i) \times \{ i \},$$

où $f_i(F_i)$ est fermé dans T'_i, car f_i est une application fermée. Donc $f(F)$ est fermé dans T. Enfin, si (x_i, i) est un point de T', l'ensemble $f^{-1}(\{(x_i, i)\}) = f_i^{-1}(\{x_i\}) \times \{i\}$ est un quasi-compact, puisque l'ensemble $f_i^{-1}(\{x_i\})$ en est un, f_i étant une application propre. Donc f est une application propre.

2° Considérons la catégorie $\square\square H^{\cdot}$ des quatuors de $H^{\cdot}$. Sa sous-catégorie $Car(H^{\cdot})$ formée des quatuors cartésiens vérifie les axiomes (1) à (4) (cela résulte du théorème de commutation et du fait que l'objet initial est stable par changement de base).

3° La sous-catégorie $Ejec(H^{\cdot})$ de $H^{\cdot}$ formée des éjections de $H^{\cdot}$ vérifie elle aussi les axiomes de (1) à (4); les propriétés (3) et (4) ont été démontrées au § 4 et la propriété (2) résulte de l'axiome (SC1).

Rappelons qu'un objet e de $H^{\cdot}$ est dit *E-séparé* si sa diagonale appartient à E. Notons $Sep(H^{\cdot}, E)$ la sous-catégorie pleine de $H^{\cdot}$ ayant pour objets les objets E-séparés de $H^{\cdot}$.

PROPOSITION 1. *La sous-catégorie $Sep(H^{\cdot}, E)$ est stable par petites sommes.*

Δ Démontrons d'abord le lemme suivant:

LEMME. *Soit $(e_i)_{i \in I}$ une petite famille d'objets de $H^{\cdot}$. On note par $(e, (\sigma_i)_{i\in I})$ et $(e', (\sigma_{ij})_{(i,j)\in I\times I})$ les sommes naturalisées de $(e_i)_{i\in I}$ et de $(e_i \times e_j)_{(i,j)\in I\times I}$; si $\delta_i = [e_i, e_i]$, on a*

$$[e, e] =]\sigma_i \times \sigma_j[_{(i,j)\in I^2} \cdot]\sigma_{ii}[_{i\in I} \cdot \sum_{i\in I} \delta_i .$$

Δ Notons aussi $(e'', (\sigma''_i)_{i\in I})$ la somme naturalisée de $(e_i \times e_i)_{i\in I}$, et $((p, p'), e\times e)$ le produit naturalisé de (e, e). On a

$$]\sigma_i \times \sigma_j[_{(i,j)\in I^2} \,.\,]\sigma_{ii}[_{i\in I} \cdot \sum_{i\in I} \delta_i \,.\, \sigma_i =$$

$$=]\sigma_i \times \sigma_j[_{(i,j)\in I^2} \cdot]\sigma_{ii}[_{i\in I} \cdot \sigma''_i \,.\, \delta_i =]\sigma_i \times \sigma_j[_{(i,j)\in I^2} \cdot \sigma_{ii} \cdot \delta_i =$$

$$= \sigma_i \times \sigma_i \,.\, \delta_i = \sigma_i \times \sigma_i \,.\, [e_i, e_i] = [\sigma_i, \sigma_i] = [e, e] \,.\, \sigma_i ,$$

et ceci pour tout i de I. Il en résulte

$$
\begin{tikzcd}
e \times e & e' \arrow[l, "{]\sigma_i \times \sigma_j[_{(i,j)\in I^2}}"'] & e'' \arrow[l, "{]\sigma_{ii}[_{i\in I}}"'] & e \arrow[l, "\sum_{i\in I}\delta_i"'] \\
e_i \times e_i \arrow[u, "\sigma_i \times \sigma_i"] & e_i \times e_i \arrow[l, "="] \arrow[u, "\sigma_{ii}"] & e_i \times e_i \arrow[l, "="] \arrow[u, "\sigma''_i"] & e_i \arrow[l, "\delta_i"] \arrow[u, "\sigma_i"']
\end{tikzcd}
$$

$$]\sigma_i \times \sigma_j[_{(i,j)\in I^2} \,.\,]\sigma_{ii}[_{i\in I} \,.\, \sum_{i\in I}\delta_i = [e, e]\,. \quad \nabla$$

Revenons maintenant à la proposition. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'objets E-séparés et montrons que $e = \sum_{i\in I} e_i$ est lui-même E-séparé. Utilisons, pour cela, les mêmes notations qu'au lemme précédent. Pour tout i de I, on a $\delta_i \in E$, donc $\sum_{i\in I}\delta_i \in E$ (axiome (3)). D'autre part $]\sigma_{ii}[_{i\in I} =]\sigma_{ij}[_{(i,j)\in\Delta}$, où Δ est la diagonale de I. D'après le cor. 1 de la prop. 2-4, $]\sigma_{ii}[_{i\in I}$ est une éjection et ainsi appartient à E. Enfin $]\sigma_i \times \sigma_j[_{(i,j)\in I^2}$ est un inversible, car le foncteur «produit» est bi-compatible avec les petites sommes. Par suite $[e, e]$, qui est un composé d'éléments de E, appartient lui-même à E, ce qui signifie que e est un objet E-séparé. ∇

Il peut arriver que la conclusion de la proposition soit encore vraie sans que la sous-catégorie $E^\cdot$ de $H^\cdot$ vérifie les quatre axiomes. En voici un exemple : L'ensemble $H^\cdot_\gamma$ des inversibles de $H^\cdot$ définit une sous-catégorie de $H^\cdot$ stable par changement de base.

DEFINITION 1. On dira qu'un objet de $H^\cdot$ est *monique* s'il est $H^\cdot_\gamma$-séparé (i.e. si sa diagonale est inversible).

On remarque qu'un objet e de $H^\cdot$ est monique si, et seulement si 1_e est un monomorphisme.

EXEMPLES. 1° Un objet final est monique.

2° Dans une catégorie à sommes commutables un objet initial est monique. En effet, la 1ère projection $p: 0\times 0 \to 0$ a pour but un objet initial; c'est donc un inversible et par suite $[0, 0]$ est un inversible, car

$p.[0,0]=0$.

3° Dans $\mathfrak{M}$, les objets moniques sont les éléments initiaux et finaux.

4° $A^{\cdot}$ étant une catégorie, les objets moniques de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, A^*)$ sont les cribles de $A^{\cdot}$.

5° e étant un objet de $H^{\cdot}$ les objets moniques de $H^{\cdot}/e$ sont les monomorphismes de $H^{\cdot}$ ayant pour but e.

PROPOSITION 2. *Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'objets moniques de $H^{\cdot}$. Si $e_i \times e_j$, pour tout couple (i,j) d'élements distincts de I, est un objet initial, alors $\sum_{i \in I} e_i$ est un objet monique.*

Δ Reprenons les notations du lemme de la proposition 1 et montrons qu'ici $]\sigma_{ii}[_{i \in I}$ est inversible. Soit $(f_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ la famille de morphismes suivante :

$$f_{ij} = 0_{e''} . 0^{-1}_{e_i \times e_j}, \text{ si } i \neq j, \qquad f_{ii} = \sigma''_i, \text{ si } i = j.$$

On a, pour tout i de I:

$$]f_{ij}[_{(i,j) \in I^2} .]\sigma_{ii}[_{i \in I} . \sigma''_i =]f_{ij}[_{(i,j) \in I^2} . \sigma_{ii} = f_{ii} = \sigma''_i,$$

d'où

$$]f_{ij}[_{(i,j) \in I^2} .]\sigma_{ii}[_{i \in I} = \sum_{i \in I} (e_i \times e_i) = e''.$$

D'autre part soit $(i,j) \in I^2$. On a :

$$]\sigma_{ii}[_{i \in I} .]f_{ij}[_{(i,j) \in I^2} . \sigma_{ij} =]\sigma_{ii}[_{i \in I} . f_{ij}.$$

- Si $i \neq j$, alors $e_i \times e_j$ est initial, de sorte que

$$]\sigma_{ii}[_{i \in I} . f_{ij} = \sigma_{ij}.$$

- Si $i = j$,

$$]\sigma_{ii}[_{i \in I} . f_{ii} =]\sigma_{ii}[_{i \in I} . \sigma''_i = \sigma_{ii}.$$

Donc, pour tout $(i,j) \in I^2$,

$$\begin{tikzcd}
e'' & e' \arrow[l, "]f_{ij}[_{(i,j) \in I \times I}"'] & e'' \arrow[l, "]\sigma_{ii}[_{i \in I}"'] \\
e_i \times e_i \arrow[u, "\sigma''_i"] & e_i \times e_i \arrow[l, "="] \arrow[u, "\sigma_{ii}"'] & \cdot \arrow[l, "="] \arrow[u, "\sigma''_i"']
\end{tikzcd}$$

$$]\,\sigma_{ii}\,[_{i\in I}\,.\,]\,f_{ij}\,[_{(i,j)\in I^2}\,.\,\sigma_{ij}=\sigma_{ij}$$

d'où

$$]\,\sigma_{ii}\,[_{i\in I}\,.\,]\,f_{ij}\,[_{(i,j)\in I^2}=\sum_{(i,j)\in I^2}(e_i\times e_j)=e'.$$

Ceci prouve que $]\,\sigma_{ii}\,[_{i\in I}$ est un inversible .

Ainsi $\sum_{i\in I}\delta_i$, $]\,\sigma_{ii}\,[_{i\in I}$ et $]\,\sigma_i\times\sigma_j\,[_{(i,j)\in I^2}$ étant inversibles, le morphisme $[e,e]$ est inversible. Par suite, e est monique. ▽

COROLLAIRE. *Soit $(m_i)_{i\in I}$ une famille disjointe de monomorphismes (i.e. tous les m_i ont même but et, pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de I, $((m_i, 0_{e_i}),(m_j, 0_{e_j}))$ est un produit fibré naturalisé, en posant $e_i=\alpha m_i$). Alors $]\,m_i\,[_{i\in I}$ est encore un monomorphisme.*

△ Si e est le but de m_i, il suffit d'appliquer la proposition précédente à la catégorie $H^{\cdot}/e$. ▽

DEFINITION 2. On dira qu'un objet de $H^{\cdot}$ est *discret* s'il est $Ejec(H^{\cdot})$-séparé (i.e. si sa diagonale est une éjection).

On voit facilement que tout objet monique est discret, donc 1 est discret. Par suite (proposition 1), $M\boxtimes 1$ est un objet discret pour tout objet M de $\mathfrak{M}$.

EXEMPLES. 1° Dans $\mathfrak{M}$ tout objet est discret, car tout monomorphisme est une éjection.

2° Dans $\mathcal{T}$ les objets discrets sont les espaces topologiques discrets. En effet on remarque que toute topologie discrète est une somme d'éléments finaux, donc est un objet discret dans $\mathcal{T}$. Réciproquement, soit T un objet discret de $\mathcal{T}$, E son ensemble sous-jacent et Δ la diagonale de $E\times E$. L'éjection $[T,T]$ est en particulier une application ouverte; donc Δ est un ouvert de $T\times T$, ce qui entraîne que T est discrète.

3° Les objets discrets de $\mathcal{F}$ sont les catégories discrètes (i.e. les catégories où tout morphisme est une unité). En effet, toute catégorie discrète est une somme d'éléments finaux. Inversement soit $C^{\cdot}$ un objet discret de $\mathcal{F}$ et Δ la diagonale de $C\times C$. Prenons un morphisme $x: e\to e'$

dans $C^{\cdot}$; alors $(e,x):(e,e)\to(e\ ,e')$ est un morphisme de $C^{\cdot}\times C^{\cdot}$ dont la source appartient à Δ; on en conclut que $(e,x)\in\Delta$, car $[C^{\cdot},C^{\cdot}]$ est une éjection. D'où $x=e$. Ainsi $C^{\cdot}$ est une catégorie discrète.

4° Soit $A^{\cdot}$ une catégorie. Les objets discrets de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M},A^{\cdot})^{\square\square}$ sont les foncteurs $F:A^{\cdot}\to\mathfrak{M}$ tels que $F(x)$, pour tout morphisme $x:a\to a'$ de $A^{\cdot}$, soit injectif.

11. Etude de l'objet 2.

Soit $H^{\cdot}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie à sommes commutables.

PROPOSITION 1. *Soient $\sigma:e\to s$, $\sigma_1':e_1'\to s$ et $\sigma_2':e_2'\to s$ trois morphismes de $H^{\cdot}$ tels que $(s,(\sigma,\sigma_1'))$ et $(s,(\sigma,\sigma_2'))$ soient des sommes naturalisées. Alors il existe un unique inversible γ tel que $\sigma_1'.\gamma=\sigma_2'$.*

Δ Considérons le produit fibré naturalisé $((\sigma_2',v_1),(\sigma_1',v_2))$. Comme dans $H^{\cdot}$ les petites sommes sont disjointes, $((\sigma_2',0_{e_2'}),(\sigma,0_e))$ est aussi un produit fibré naturalisé. Par suite $(e_2',(0_{e_2'},v_1))$ est une somme naturalisée déduite de $(s,(\sigma,\sigma_1'))$ par un changement de base le long de σ_2'. Mais comme 0 est un objet initial, v_1 est inversible. Posons $f=v_2.v_1^{-1}$. On a :

$$\sigma_1'.f=\sigma_1'.v_2.v_1^{-1}=\sigma_2'.v_1.v_1^{-1}=\sigma_2'.$$

Ainsi s peut être considéré comme le morphisme somme de (e,f) par rapport à $(s,(\sigma,\sigma_1'))$ et $(s,(\sigma,\sigma_2'))$. Or s est inversible: ceci entraîne que e et f sont inversibles (d'après (SC2)). ∇

Soit A l'ensemble des couples (f,σ), où f est un morphisme de $H^{\cdot}$ et σ une éjection de même source que f. Considérons la relation d'équivalence R sur A définie par:

$(f,\sigma)\sim(f',\sigma')$ si, et seulement si, il existe un inversible γ tel que: $f'.\gamma=f$ et $\sigma'.\gamma=\sigma$.

Notons $|f,\sigma|$ la classe d'équivalence de (f,σ). Le quotient H_p de A par la relation d'équivalence R définit une catégorie $H_p^{\cdot}$ si l'on pose:

$|f',\sigma'|.|f,\sigma|=|f'.f_1,\sigma.\sigma_1|$ si, et seulement si $\beta\sigma'=\beta f$, où $((\sigma',f_1),(f,\sigma_1))$ est un produit fibré naturalisé.

Enfin notons $J_p : H^\cdot \to H^\cdot_p$ le foncteur défini par : $J_p(f) = |f, \alpha f|$.

PROPOSITION 2. *Le foncteur J_p admet un coadjoint.*

Δ Soit e un objet de $H^\cdot_p$. Notons $(e+1, (\eta, \eta'))$ une somme naturalisée de $(e, 1)$. Nous allons montrer que $(|e, \eta|, e+1)$ est un J_p-éjecteur. Soit $|f, \sigma| : s \to e$ un morphisme de $H^\cdot_p$. Comme σ est une éjection, il existe $\sigma' : u' \to s$ tel que $(s, (\sigma, \sigma'))$ soit une somme naturalisée. Soit $\tilde{f} : s \to e+1$ l'unique flèche telle que :

$$\tilde{f}.\sigma' = \eta'.1_{u'} \quad \text{et} \quad \tilde{f}.\sigma = \eta.f.$$

Le quatuor $(\eta, \tilde{f}, f, \sigma)$ est cartésien d'après (SC'2). Donc

$$|e, \eta| . |\tilde{f}, s| = |f, \sigma| .$$

Il reste à montrer l'unicité de $\tilde{f} : s \to e+1$. Soit donc $g : s \to e+1$ un morphisme tel que $|e, \eta| . |g, s| = |f, \sigma|$, c'est-à-dire tel que le quatuor (η, g, f, σ) soit cartésien. Nous considérons le produit fibré naturalisé $((g, \sigma'_1), (\eta', 1_{u'_1}))$. Alors $(s, (\sigma, \sigma'_1))$ est une somme naturalisée déduite de $(e+1, (\eta, \eta'))$ par un changement de base le long de g. Mais comme $(s, (\sigma, \sigma'))$ est aussi une somme naturalisée, il existe un inversible $\gamma : u' \to u'_1$ tel que $\sigma'_1 . \gamma = \sigma'$ (proposition 1).

$$\begin{tikzcd}
1 & u'_1 \arrow[l, "1_{u'_1}"'] \arrow[d, "\sigma'_1"'] & u' \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[dl, "\sigma'"] \\
e+1 \arrow[from=u, "\eta'"'] & s \arrow[l, "g"'] & \\
e \arrow[u, "\eta"] & {} \arrow[l, "f"] \arrow[u, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Il en résulte :

$$g.\sigma' = g.\sigma'_1.\gamma = \eta'.1_{u'_1}.\gamma = \eta'.1_{u'} \quad \text{et} \quad g.\sigma = \eta.f.$$

D'où $g = f$. ∇

Soit maintenant $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Notons $R^\cdot_E$ sa catégorie associée.

Alors, $(E, \leqslant)$ est une *algèbre de Boole* si :

(B1) $(E, \leqslant)$ admet un plus petit élément noté 0 et un plus grand élément noté 1.

(B2) Pour tout couple $(a, b) \in E \times E$, $\{a, b\}$ admet une borne inférieure $a \wedge b$ et une borne supérieure $a \vee b$.

(B3) Pour tout $(a, b, c) \in E \times E \times E$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

(B4) Pour tout $e \in E$ il existe $a' \in E$ tel que :

$$a \wedge a' = 0 \quad \text{et} \quad a \vee a' = 1$$

(on montre alors que a' est unique).

Les axiomes (B1) et (B2) peuvent s'exprimer en langage catégorique en disant respectivement que $R^{\cdot}_E$ a un élément initial et un élément final et qu'elle est à sommes et produits finis. Remarquons encore que l'axiome (B3) est équivalent à l'axiome :

(B'3) Pour tout $(a, b, c) \in E \times E \times E$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Rappelons aussi qu'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ est une *algèbre de Heyting* (ou treillis de Brouwer, ou algèbre pseudo-booléenne) s'il vérifie (B1) et si de plus :

(Hey 1) Pour tout $(a, b) \in E \times E$, $\{a, b\}$ admet une borne inférieure $a \wedge b$,

(Hey 2) Pour tout $(a, b) \in E \times E$, il existe $c \in E$ tel que, pour tout $d \in E$, $d \wedge a \leqslant b$ si et seulement si $d \leqslant c$

(l'élément c est alors unique; on le note $c = (a \Longrightarrow b)$).

Autrement dit, $(E, \leqslant)$ est une algèbre de Heyting si et seulement si $R^{\cdot}_E$ est une catégorie cartésienne fermée à objet initial. Dans ce cas, on pose $\neg a = (a \Longrightarrow 0)$, pour chaque a de E.

On trouvera les preuves des propositions suivantes dans [9].

PROPOSITION 3. *$(E, \leqslant)$ est une algèbre de Heyting si, et seulement si, $(E, \leqslant)$ est un ensemble ordonné satisfaisant aux axiomes (B1) et (Hey 1) et qui de plus admet une application $\Longrightarrow : E \times E \to E$ vérifiant les propriétés suivantes, pour tout $(a, b, c) \in E \times E \times E$:*

1° $(a \Longrightarrow a) = 1$.

2° $b \leqslant (a \Longrightarrow b)$.

3° $(a \Longrightarrow b) \wedge a \leqslant b$.

$4^o\ (a \Longrightarrow b) \wedge (a \Longrightarrow c) = (a \Longrightarrow (b \wedge c))$.

PROPOSITION 4. *$(E, \leqslant)$ étant un ensemble ordonné, c'est une algèbre de Boole si, et seulement si c'est une algèbre de Heyting vérifiant l'axiome :*

$$\textit{Pour tout } a \in E, \quad \neg\neg a = a.$$

Revenons à l'étude de la $\mathfrak{U}$-catégorie $H^{\cdot}$ à sommes commutables.

1° Si $\sigma : e' \to e$ est une éjection, nous noterons pour simplifier $|\sigma|$ au lieu de $|1_{e'}, \sigma|$.

- Soit le foncteur $P = Hom_{H^{\cdot}_p}(1, -) . J_p^* : H^{\cdot *} \to \mathfrak{M}$. Le foncteur P est représentable, et a pour représentation l'objet $2 = 1 + 1$ (car 2 est une J_p-structure colibre associée à 1), c'est-à-dire qu'il existe une équivalence naturelle $\chi : P \to Hom_{H^{\cdot}}(2, -) : H^{\cdot *} \to \mathfrak{M}$.

- Si $\sigma : e_1 \to e$ est une éjection et si $x = \chi(e)(|\sigma|)$, nous dirons que x est *le morphisme caractéristique de* σ, ou que σ est une *éjection associée à* x.

Nous noterons alors pour simplifier $x = \chi_e |\sigma|$.

2° Soit $(1+1, (V, F))$ la somme naturalisée de $(1, 1)$. Comme $((F, 0_1), (V, 0_1))$ est un produit fibré naturalisé, F peut être considéré comme le morphisme caractéristique de 0_1 et V comme celui de 1.

- Maintenant $\neg =]F, V[$ est le morphisme caractéristique de F, puisque $(\neg, V, F, 1)$ est une éjection dans $\square\square H^{\cdot}$.

- V étant une éjection, il en est de même de $V \times V$, puisque (voir 3.4) $Ejec(H^{\cdot})$ est stable par changement de base. Notons $\wedge$ le morphisme caractéristique de $V \times V$.

Soit $p_1 : 2 \times 2 \to 2$ la $1^{\text{ère}}$ projection, $i : a \to 2 \times 2$ un noyau de $(p_1, \wedge)$. Comme $2 = 1 + 1$ est un objet discret, i est une éjection (voir [6]); on peut donc prendre son morphisme caractéristique $\Longrightarrow : 2 \times 2 \to 2$.

$$\begin{tikzcd} 2 & 2 \times 2 \arrow[l, shift right, "\wedge"'] \arrow[l, shift left, "p_1"'] & a \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 2 & 2 \times 2 \arrow[l, "\Longrightarrow"'] \\ 1 \arrow[u, "V"] & a \arrow[l, "1_a"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

- x et y étant deux éléments de $Hom_{H^{\cdot}}(2, e)$, notons

$x \wedge y$, $x \Longrightarrow y$ au lieu de $\wedge . [x, y]$, $\Longrightarrow . [x, y]$,

$x \leqslant y$ s'il existe $z : e \to a$ tel que $[x, y] = i . z$ et $V_e = V . 1_e$, $F_e = F . 1_e$.

PROPOSITION 5. *Soit e un objet de $H^{\cdot}$ et x, x' deux éléments de $Hom_{H^{\cdot}}(2, e)$. Alors :*

1° $x \wedge x' = V_e$ si, et seulement si, $x' = x = V_e$.

2° $(x \Longrightarrow x') = V_e$ si, et seulement si, $x \leqslant x'$.

$\triangle$ 1) Si $x \wedge x' = V_e$, alors $\wedge . [x, x'] = V . 1_e$. Donc il existe un unique morphisme

$$k : e \to 1 \times 1 \quad \text{tel que} \quad V \times V . k = [x, x'] .$$

Or $k = [1_e, 1_e]$. Donc

$$[V . 1_e, V . 1_e] = [x, x'] , \text{ d'où } x = x' = V . 1_e .$$

$$\begin{tikzcd}
2 & 2 \times 2 \arrow[l, "\wedge"'] & \\
1 \arrow[u, "V"] & 1 \times 1 \arrow[l, "1_{1 \times 1}"] \arrow[u, "V \times V"'] & \\
& & e \arrow[ul, "k"'] \arrow[uul, bend right, "{[x, x']}"'] \arrow[ull, bend left, "1_e"]
\end{tikzcd}$$

La réciproque est immédiate.

2) Si $(x \Longrightarrow x') = V_e$, alors $\Longrightarrow . [x, x'] = V . 1_e$. Donc il existe un $k : e \to 2$ tel que $i . k = [x, x']$, ce qui signifie que $x \leqslant x'$. La réciproque se montre sans difficulté. ∇

Soient e un objet de $H^{\cdot}$ et $\sigma_1 : e_1 \to e$, $\sigma_2 : e_2 \to e$ deux éjections.

a) Considérons le relation $\leqslant$ dans $P(e)$ définie par·

$|\sigma_1| \leqslant |\sigma_2|$ si, et seulement si, il existe $k : e_1 \to e_2$ tel que $\sigma_2 . k = \sigma_1$.

$\leqslant$ est une relation d'ordre sur $P(e)$.

b) Soient $((\sigma_1, \sigma_2'), (\sigma_2, \sigma_1'))$ un produit fibré naturalisé et $\sigma = \sigma_1 . \sigma_2' = \sigma_2 . \sigma_1'$. Or σ_1', σ_2' et σ sont des éjections, puisque $Ejec(H^{\cdot})$ est une sous-catégorie stable par changement de base. $|\sigma|$ est la borne inférieure de $\{ |\sigma_1|, |\sigma_2| \}$ dans $(P(e), \leqslant)$.

c) $|0_e|$ est le plus petit élément de $(P(e), \leqslant)$ et $|e|$ en est le plus grand.

PROPOSITION 6. *e étant un objet de $H^{\cdot}$ et $\sigma_1 : e_1 \to e$, $\sigma_2 : e_2 \to e$ étant deux éjections de but e, alors :*

1° $|\sigma_1| \leqslant |\sigma_2|$ équivaut à $\chi_e |\sigma_1| \leqslant \chi_e |\sigma_2|$.

2° $\chi_e(Inf\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\}) = \chi_e |\sigma_1| \wedge \chi_e |\sigma_2|$.

3° $\chi_e |0_e| = F_e$ et $\chi_e |e| = V_e$.

4° $(e, (\sigma_1, \sigma_2))$ est une somme naturalisée si, et seulement si,

$$\chi_e |\sigma_2| = \urcorner . \chi_e |\sigma_1|.$$

$\triangle$ 1° Démontrons tout d'abord le 2°. Posons

$$x_1 = \chi_e |\sigma_1|, \quad x_2 = \chi_e |\sigma_2|, \quad x_0 = x_1 \wedge x_2 \quad \text{et} \quad |\sigma_0| = \chi_e^{-1}(x_0).$$

Soit maintenant $\sigma : e' \to e$ une éjection. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$|\sigma| \leqslant |\sigma_0|$,

$V_{e'} = (x_1 \wedge x_2).\sigma$,

$V_{e'} = x_1 . \sigma \wedge x_2 . \sigma$,

$x_1 . \sigma = V_{e'}$ et $x_2 . \sigma = V_{e'}$ (d'après la proposition 5),

$|\sigma| \leqslant |\sigma_1|$ et $|\sigma| \leqslant |\sigma_2|$,

$|\sigma| \leqslant Inf\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\}$,

donc $|\sigma_0| = Inf\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\}$, ce qui établit la formule cherchée.

2° Soit x_1 et x_2 deux éléments de $Hom_{H^{\cdot}}(2, e)$. Montrons tout d'abord que

$$x_1 \leqslant x_2 \text{ si, et seulement si } x_1 \wedge x_2 = x_1.$$

En effet, si $x_1 \leqslant x_2$, il existe $k : e \to a$ tel que $i . k = [x_1, x_2]$, d'où

$$x_1 \wedge x_2 = \wedge . [x_1, x_2] = \wedge . i . k = p_1 . i . k = p_1 . [x_1, x_2] = x_1.$$

Réciproquement si $x_1 \wedge x_2 = x_1$, on a $\wedge . [x_1, x_2] = p_1 . [x_1, x_2]$, donc il existe un unique $k : e \to a$ tel que $i . k = [x_1, x_2]$, c'est-à-dire $x_1 \leqslant x_2$. Ainsi $|\sigma_1| \leqslant |\sigma_2|$ entraîne $|\sigma_1| = Inf\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\}$, d'où

$$\chi_e |\sigma_1| = \chi_e(Inf\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\}) = \chi_e |\sigma_1| \wedge \chi_e |\sigma_2|,$$

ce qui signifie, d'après ce que nous avons vu, que $\chi_e |\sigma_1| \leqslant \chi_e |\sigma_2|$.

3° Comme les quatuors $(V, V, 1, 1)$ et $(1, 1_e, 1_e, e)$ sont cartésiens et que :

$$(V, V_e, 1_e, e) = (V, V, 1, 1) \boxminus (1, 1_e, 1_e, e)$$

on en conclut que V_e est le morphisme caractéristique de e. De même $(V, F, 0_1, 0_1)$ et $(0_1, 1_e, 0, 0_e)$ étant cartésiens, il en est de même de $(V, F_e, 0_1, 0_e)$, donc F_e est le morphisme caractéristique de 0_e.

4° Soit $f: e \to 2$ l'unique flèche telle que :

$$f.\sigma_1 = V.1_{e_1} \quad \text{et} \quad f.\sigma_2 = F.1_{e_2}.$$

Comme $(f^{\square\square}, (\Sigma_1, \Sigma_2))$ est une somme naturalisée, où

$$\Sigma_1 = (f, V, \sigma_1, 1_{e_1}) \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = (f, F, \sigma_2, 1_{e_2}),$$

Σ_1 et Σ_2 sont des quatuors cartésiens, donc f est le morphisme caractéristique de σ_1. De plus comme

$$(V, \urcorner.f, 1_{e_2}, \sigma_2) = (V, \urcorner, 1, F) \square\square (F, f, 1_{e_2}, \sigma_2),$$

le quatuor $(V, \urcorner.f, 1_{e_2}, \sigma_2)$ est cartésien et ainsi $\urcorner.f$ est le morphisme caractéristique de σ_2. D'où $\urcorner.\chi_e |\sigma_1| = \chi_e |\sigma_2|$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "V"'] & 1 \arrow[l, "1"'] \arrow[d, "F"'] & e_2 \arrow[l, "1_{e_2}"'] \arrow[d, "\sigma_2"] \\
2 & 2 \arrow[l, "\urcorner"'] \arrow[d, "V"'] & e \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\sigma_1"] \\
 & 1 & e_1 \arrow[l, "1_{e_1}"]
\end{tikzcd}$$

Inversement soit $f: e \to 2$ le morphisme caractéristique de σ_1. Par hypothèse, $\urcorner.f$ est le morphisme caractéristique de σ_2. Donc les quatuors $(V, f, 1_{e_1}, \sigma_1)$ et $(V, \urcorner.f, 1_{e_2}, \sigma_2)$ sont cartésiens. Mais comme

$$(V, \urcorner.f, 1_{e_2}, \sigma_2) = (V, \urcorner, 1, F) \square\square (F, f, 1_{e_2}, \sigma_2),$$

$(F, f, 1_{e_2}, \sigma_2)$ est cartésien. Il en résulte que $(e, (\sigma_1, \sigma_2))$ est une somme naturalisée déduite de $(2, (V, F))$ par un changement de base le long de f. ∇

COROLLAIRE. *Pour tout objet e de $H^\cdot$, $(Hom_{H^\cdot}(2, e), \leqslant)$ est un ensemble ordonné vérifiant les axiomes (B1) et (Hey 1); de plus, l'application $\chi_e : P(e) \to Hom_{H^\cdot}(2, e)$ définit un isomorphisme d'ensembles ordonnés de $(P(e), \leqslant)$ vers $(Hom_{H^\cdot}(2, e), \leqslant)$.*

PROPOSITION 7. *On a $\urcorner = (2 \Longrightarrow F_2)$.*

Δ Soit σ_0 une éjection associée à $(2 \Longrightarrow F_2) = (\Longrightarrow . [2, F . 1_2])$ et $\sigma : e' \to 2$ une éjection quelconque. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$|\sigma| \leqslant |\sigma_0|$,

$(2 \Longrightarrow F_2) . \sigma = V_{e'}$,

$(\sigma \Longrightarrow F_{e'}) = V_{e'}$,

$\sigma \leqslant F_{e'}$ (d'après la proposition 5),

$\sigma = F_{e'}$ (puisque $F_{e'}$ est le plus petit élément de $(Hom_{H^\cdot}(2, e'), \leqslant))$,

$|\sigma| \leqslant |F|$.

D'où $|\sigma_0| = |F|$ ou encore $\urcorner = (2 \Longrightarrow F_2)$. ∇

PROPOSITION 8. *Pour tout objet e de $H^\cdot$, $(Hom_{H^\cdot}(2, e), \leqslant)$ est une algèbre de Boole.*

Δ a) Nous allons tout d'abord montrer que $(Hom_{H^\cdot}(2, e), \leqslant)$ est une algèbre de Heyting en utilisant la proposition 3. Soit a, b et c trois éléments de $Hom_{H^\cdot}(2, e)$.

1° Comme $a \leqslant a$, on a $(a \Longrightarrow a) = V_e$ (proposition 5).

2° Soient $\sigma_1 : e_1 \to e$ et $\sigma_2 : e_2 \to e$ respectivement des éjections associées à b et $(a \Longrightarrow b)$. On a $b . \sigma_1 = V_{e_1}$ donc $a . \sigma_1 \leqslant b . \sigma_1$ ou encore, d'après la proposition 5,

$$V_{e_1} = (a . \sigma_1 \Longrightarrow b . \sigma_1) = (a \Longrightarrow b) . \sigma_1 .$$

Ceci signifie que $|\sigma_1| \leqslant |\sigma_2|$. D'où $b \leqslant (a \Longrightarrow b)$.

3° Soient $\sigma_1 : e_1 \to e$ et $\sigma_2 : e_2 \to e$ respectivement des éjections associées à $(a \Longrightarrow b) \wedge a$ et b. On a :

$$V_{e_1} = ((a \Longrightarrow b) \wedge a) . \sigma_1 = (a . \sigma_1 \Longrightarrow b . \sigma_1) \wedge a . \sigma_1 ,$$

donc (proposition 5)

$$(a.\sigma_1 \Longrightarrow b.\sigma_1) = V_{e_1} \quad \text{et} \quad a.\sigma_1 = V_{e_1} \ ,$$

ou encore

$$a.\sigma_1 \leqslant b.\sigma_1 \quad \text{et} \quad a.\sigma_1 = V_{e_1} .$$

Or ceci entraîne que $b.\sigma_1 = V_{e_1}$. D'où

$$|\sigma_1| \leqslant |\sigma_2| \text{ et enfin } (a \Longrightarrow b) \wedge a \leqslant b .$$

4° Soient respectivement $\sigma_1 : e_1 \to e$ et $\sigma_2 : e_2 \to e$ des éjections associées à $(a \Longrightarrow b) \wedge (a \Longrightarrow c)$ et $(a \Longrightarrow (b \wedge c))$ et $\sigma : e' \to e$ une éjection quelconque. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$|\sigma| \leqslant |\sigma_1|$,

$V_{e'} = ((a \Longrightarrow b) \wedge (a \Longrightarrow c)).\sigma = (a.\sigma \Longrightarrow b.\sigma) \wedge (a.\sigma \Longrightarrow c.\sigma)$,

$(a.\sigma \Longrightarrow b.\sigma) = V_{e'}$ et $(a.\sigma \Longrightarrow c.\sigma) = V_{e'}$,

$a.\sigma \leqslant b.\sigma$ et $a.\sigma \leqslant c.\sigma$,

$a.\sigma \leqslant (b.\sigma) \wedge (c.\sigma)$,

$V_{e'} = (a.\sigma \Longrightarrow (b.\sigma \wedge c.\sigma)) = (a \Longrightarrow (b \wedge c)).\sigma$,

$|\sigma| \leqslant |\sigma_2|$.

Donc $|\sigma_1| = |\sigma_2|$ ou encore $(a \Longrightarrow b) \wedge (a \Longrightarrow c) = (a \Longrightarrow (b \wedge c))$.
Ainsi $(Hom_{H^{\cdot}}(2, e), \leqslant)$ est une algèbre de Heyting.

b) Enfin $\urcorner . \urcorner = 2$, car

$$\urcorner . \urcorner = \urcorner .]F, V[=]\urcorner . F, \urcorner . V[=]V, F[= 2 .$$

On en déduit $\urcorner . \urcorner . a = a$ pour tout $a \in Hom_{H^{\cdot}}(2, e)$. Les propositions 4 et 7 permettent de conclure que $(Hom_{H^{\cdot}}(2, e), \leqslant)$ est une algèbre de Boole. ∇

COROLLAIRE. *$(P(e), \leqslant)$, pour tout objet e de $H^{\cdot}$, est une algèbre de Boole et, quelle que soit l'éjection $\sigma_1 : e_1 \to e$, le complémentaire de $|\sigma_1|$ est $|\sigma_2|$, où $\sigma_2 : e_2 \to e$ est un morphisme tel que $(e, (\sigma_1, \sigma_2))$ soit une somme naturalisée.*

Soit $\mathfrak{B}$ la catégorie des « algèbres de Boole » c'est-à-dire la catégorie ayant pour objets les algèbres de Boole dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathfrak{U}$ et pour morphismes les applications ordonnées entre algèbres de Boole $f : (E, \leqslant) \to (E', \leqslant)$ telles que:

a) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$, pour tout $(a,b) \in E \times E$,

b) $f(1) = 1'$,

c) Pour tout $a \in E$, $f(\urcorner a) = \urcorner' f(a)$.

REMARQUE. L'axiome (c) étant supposé, les axiomes (a) et (b) sont donc respectivement équivalents aux axiomes :

a') $f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$, pour tout $(a,b) \in E \times E$.

b') $f(0) = 0'$.

Notons par $p_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{M}$ le foncteur d'oubli de $\mathfrak{B}$.

PROPOSITION 9. *L'objet 2 est un objet de Boole (i.e. il existe un foncteur $\Phi : H^{\cdot *} \to \mathfrak{B}$ tel que $p_{\mathfrak{B}} . \Phi = Hom_{H^{\cdot}}(2, -)$).*

Δ On définit un foncteur $\Phi : H^{\cdot *} \to \mathfrak{B}$ en posant $\Phi(e) = (Hom_{H^{\cdot}}(2,e), \leqslant)$, si e est un objet, et

$$\Phi(f) = ((Hom_{H^{\cdot}}(2,e), \leqslant), Hom_{H^{\cdot}}(2,f), (Hom_{H^{\cdot}}(2,e'), \leqslant))$$

si $f : e \to e'$ est un morphisme de $H^{\cdot}$. Cette dernière expression est bien un morphisme de $\mathfrak{B}$, car :

a) Pour tout $(a,b) \in Hom_{H^{\cdot}}(2,e') \times Hom_{H^{\cdot}}(2,e')$,

$$Hom_{H^{\cdot}}(2,f)(a \wedge b) = (a \wedge b).f = a.f \wedge b.f =$$
$$= Hom_{H^{\cdot}}(2,f)(a) \wedge Hom_{H^{\cdot}}(2,f)(b).$$

b) $Hom_{H^{\cdot}}(2,f)(V_{e'}) = V_{e'}.f = V.1_{e'}.f = V.1_e = V_e$.

c) Pour tout $a \in Hom_{H^{\cdot}}(2,e')$,

$$Hom_{H^{\cdot}}(2,f)(\urcorner.a) = (\urcorner.a).f = \urcorner.(a.f) = \urcorner Hom_{H^{\cdot}}(2,f)(a).$$

Enfin on voit immédiatement que $p_{\mathfrak{B}} . \Phi = Hom_{H^{\cdot}}(2, -)$. ∇

12. Objets connexes.

Soit $H^{\cdot}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie à sommes commutables.

PROPOSITION 1. *Soit $(e,(\sigma,\sigma'))$ une somme naturalisée. Alors σ est inversible si, et seulement si, $\alpha\sigma'$ est un objet initial.*

Δ Comme $(e,(\sigma,\sigma'))$ est une somme naturalisée, $|\sigma'|$ est le complémentaire de $|\sigma|$ dans $(P(e), \leqslant)$. Donc $|\sigma'|$ est le plus petit élément de $(P(e), \leqslant)$ si, et seulement si, $|\sigma|$ en est le plus grand; c'est-à-dire $\alpha\sigma'$ est un objet initial si et seulement si σ est un inversible. ∇

DEFINITION. On dira qu'un objet e de $H^\cdot$ est un objet *connexe* si, pour toute éjection $\sigma: u \to e$, u est un objet initial ou σ est inversible.

REMARQUES. 1° D'après le § 11 on voit que e est connexe si et seulement si $P(e) = \{ |e|, |0_e| \}$ ou encore, ce qui revient au même, si

$$Hom_{H^\cdot}(2, e) = \{ V_e, F_e \}.$$

Donc e est connexe si, et seulement si, $P(e)$ ou $Hom_{H^\cdot}(2, e)$ ont au plus deux éléments.

2° Dans une catégorie à sommes commutables 0 est toujours connexe puisqu'il est initial strict; par contre 1 ne l'est pas nécessairement. Il suffit de considérer la catégorie $H^\cdot/2$ «des objets au-dessus de 2». Elle est à sommes commutables. Enfin, 2 est un objet final de $H^\cdot/2$, et $(2, (\hat{V}, \hat{F}))$ est une somme naturalisée, en posant $\hat{V} = (2, V, V)$ et $\hat{F} = (2, F, F)$. Or ni V ni F ne sont en général des objets initiaux dans $H^\cdot/2$. On peut toutefois remarquer que, si une catégorie à sommes commutables $H^\cdot$ ne possède pas d'autres objets moniques que les objets initiaux et finaux, 1 est connexe.

PROPOSITION 2. *I étant un petit ensemble non-vide et $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $H^\cdot$, soit $(e, (\sigma_i)_{i \in I})$ une somme naturalisée de $(e_i)_{i \in I}$ dans $H^\cdot$. Si e est un objet connexe, il existe un indice j de I tel que σ_j soit inversible et que, pour tout $i \neq j$, e_i soit initial.*

Δ Comme $P(e) = \{ |0_e|, |e| \}$, soit $J = \{ i \in I \mid |\sigma_i| = |e| \}$.

- Si J est vide, $|\sigma_i| = |0_e|$ pour tout i de I, c'est-à-dire e_i est initial; or ceci entraîne que e est lui-même initial. Mais alors $|0_e| = |e|$, donc $J = I$, ce qui est contradictoire, puisque I est non-vide.

- Soient maintenant $j \in J$ et i un élément de I différent de j. Si l'on a $|\sigma_i| \neq |0_e|$, alors σ_i, de même que σ_j, est inversible. Mais comme $((\sigma_i, 0_{e_i}), (\sigma_j, 0_{e_j}))$ est un produit fibré naturalisé, 0_{e_i} aussi est inversible, ou encore e_i est initial, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc e_i est initial pour tout $i \neq j$. ∇

PROPOSITION 3. *e étant un objet non-initial de $H^\cdot$, c'est un objet con-*

nexe si, et seulement si, le foncteur $Hom_{H^\cdot}(-,e) : H^\cdot \to \mathfrak{M}$ *est compatible avec les sommes finies : dans ce cas* $Hom_{H^\cdot}(-,e)$ *est aussi compatible avec les petites sommes.*

$\triangle$ 1° Montrons d'abord que, si e est connexe, $Hom_{H^\cdot}(-,e)$ est compatible avec les petites sommes. Soient $(s, (\sigma_i)_{i \in I})$ une somme naturalisée d'une petite famille $(s_i)_{i \in I}$ dans $H^\cdot$ et $(\sum_{i \in I} Hom_{H^\cdot}(s_i, e), (v_i)_{i \in I})$ la somme naturalisée canonique de la famille $(Hom_{H^\cdot}(s_i, e))_{i \in I}$ dans $\mathfrak{M}$. Posons $k = \,]\, Hom_{H^\cdot}(\sigma_i, e) \,[_{i \in I}$. Montrons que k est inversible.

a) k *est surjectif* : soit $f : e \to s$ un morphisme de $H^\cdot$. Pour chaque indice i de I faisons le produit fibré naturalisé $((\sigma_i, f'_i), (f, \sigma'_i))$ et posons $e_i = \alpha \sigma'_i$. $(e, (\sigma'_i)_{i \in I})$ est une somme naturalisée déduite de $(s, (\sigma_i)_{i \in I})$ par un changement de base le long de f. Mais comme e est connexe, les e_i sont tous initiaux sauf, bien sûr, pour un indice j de I où σ'_j est alors inversible (proposition 2). Posons $f_j = f'_j . \sigma'^{-1}_j$ et montrons que $\sigma_j . f_j = f$.
On a $\sigma_j . f_j . \sigma'_i = \sigma_j . f'_j . \sigma'^{-1}_j . \sigma'_i$.
- Si $i = j$, $\sigma_j . f'_j . \sigma'^{-1}_j . \sigma'_j = \sigma_j . f'_j = f . \sigma'_j$.
- Si $i \neq j$, $\sigma_j . f'_j . \sigma'^{-1}_j . \sigma'_i = f . \sigma'_i$, car $Hom_{H^\cdot}(s, e_i)$ n'a qu'un élément puisque e_i est un objet initial. On a donc $\sigma_j . f_j . \sigma'_i = f . \sigma'_i$ pour tout i de I. Par suite $\sigma_j . f_j = f$, ou encore $k((f_j, j)) = f$.

b) k *est injectif* : soit $f_i : e \to s_i$ et $f'_j : e \to s_j$ deux morphismes tels que $\sigma_i . f_i = \sigma_j . f'_j$.
- Si $i = j$, on voit que $f_i = f'_i$, puisque les éjections sont des monomorphismes.
- Si $i \neq j$, comme $((\sigma_i, 0_{s_i}), (\sigma_j, 0_{s_j}))$ est un produit fibré naturalisé

$$\begin{tikzcd}
 & s_j \arrow[dl, "\sigma_j"'] & & \\
s & & 0 \arrow[ul, "0_{s_j}"'] \arrow[dl, "0_{s_i}"] & e \arrow[l, "g"'] \arrow[ull, bend right, "f'_j"'] \arrow[dll, bend left, "f_i"] \\
 & s_i \arrow[ul, "\sigma_i"] & &
\end{tikzcd}$$

(dans $H^\cdot$ les sommes étant disjointes), il existe un seul $g : e \to 0$ tel que $0_{s_i} . g = f_i$ et $0_{s_j} . g = f'_j$. Mais 0 étant un objet initial strict, g est inversible et ainsi e est un objet initial, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° Supposons maintenant que $Hom_{H^\cdot}(-, e)$ soit compatible avec les sommes finies et montrons que e est connexe. Comme $(2, (V, F))$ est une somme naturalisée, le morphisme canonique

$$k : Hom(1, e) + Hom(1, e) \to Hom(2, e)$$

est une bijection; donc $Hom(2, e)$ a deux éléments et ainsi e est connexe. ∇

REMARQUE. C'est cette propriété de compatibilité que Hoffmann prend pour définition d'un Z-objet [2] .

PROPOSITION 4. *Soit e un objet non-initial de $H^\cdot$. Alors e est connexe si, et seulement si $\mathbf{1} = \{0\}$ est une ∂-structure libre associée à e.*

Δ Notons $\mathbf{2} = \{0, \mathbf{1}\}$ et $\sigma_i^I : 1 \to \partial(I)$ la $i^{\text{ème}}$ éjection canonique; enfin $\eta = \sigma_0^{\mathbf{1}} . 1_e$.

Montrons que, si e est connexe, $(\mathbf{1}, \eta)$ est un ∂-projecteur. Soit M un objet de $\mathfrak{M}$ et $f : e \to \partial(M)$ un morphisme de $H^\cdot$. D'après la proposition 3 il existe un unique m de M tel que $f = \sigma_m^M . 1_e$, ou encore

$$f = \partial(\overleftarrow{m}) . \sigma_0^{\mathbf{1}} . 1_e = \partial(\overleftarrow{m}) . \eta ,$$

en notant $\overleftarrow{m} : \mathbf{1} \to M$ l'application constante sur m. L'unicité de $\overleftarrow{m}$ résultant de celle de m, $\mathbf{1}$ est bien une ∂-structure libre associée à e.

Réciproquement si $\mathbf{1}$ est une ∂-structure libre associée à e, alors soit $(\mathbf{1}, \eta)$ un ∂-projecteur. L'application $f \mapsto \partial(f) . \eta$ de $Hom_{\mathfrak{M}}(\mathbf{2}, \mathbf{1})$ dans $Hom_{H^\cdot}(\partial(\mathbf{2}), e)$ est donc une bijection. Par suite $Hom_{H^\cdot}(\partial(\mathbf{2}), e)$ n'a que deux éléments, ce qui signifie que e est connexe, puisque l'on a $\partial(\mathbf{2}) = 2$. ∇

PROPOSITION 5. *Si 1 est un objet connexe non-initial, le foncteur ∂ est pleinement fidèle.*

Δ ∂ étant l'adjoint de $Hom_{H^\cdot}(-, 1) : H^\cdot \to \mathfrak{M}$, soit $\sigma : Id_{\mathfrak{M}} \to Hom_{H^\cdot}(-, 1) . \partial$ un morphisme d'adjonction canoniquement associé au couple d'adjoints $(\partial, Hom_{H^\cdot}(-, 1))$. D'après la proposition 4, $\sigma(M) : M \to Hom_{H^\cdot}(\partial(M), 1)$ est une bijection pour tout objet M de $\mathfrak{M}$, donc ∂ est pleinement fidèle. ∇

PROPOSITION 6. *Soit $f : e \to e'$ un épimorphisme de $H^\cdot$. Si e est connexe,* *il en est de même de* e'.

$\triangle$ Comme f est un épimorphisme, l'application

$$Hom_{H^\cdot}(2,f): Hom_{H^\cdot}(2,e') \to Hom_{H^\cdot}(2,e)$$

est une injection; donc, si $Hom_{H^\cdot}(2,e)$ a au plus deux éléments, il en est de même de $Hom_{H^\cdot}(2,e')$. ∇

Soit maintenant un foncteur $p: H^\cdot \to K^\cdot$, où $H^\cdot$ et $K^\cdot$ sont des catégories à sommes commutables.

PROPOSITION 7. *Supposons que le foncteur* p *soit compatible avec les objets initiaux et qu'il admette un adjoint* $q: K^\cdot \to H^\cdot$. *Alors, pour qu'un objet* e *de* $K^\cdot$ *soit connexe, il suffit que* $q(e)$ *le soit dans* $H^\cdot$.

$\triangle$ Notons $\eta: Id_{K^\cdot} \to p.q$ un morphisme d'adjonction associé au couple d'adjoints (q,p). Soit e un objet de $K^\cdot$ tel que $q(e)$ soit connexe dans $H^\cdot$. Considérons une somme naturalisée $(e,(\sigma_1,\sigma_2))$ et posons, pour $i \in \{1,2\}$, $s_i = \alpha\sigma_i$. Comme q est adjoint à p, il est compatible avec les petites limites inductives. Par suite $(q(e),(q(\sigma_1),q(\sigma_2)))$ est une somme naturalisée dans $H^\cdot$; mais, $q(e)$ étant connexe dans $H^\cdot$, il existe un indice $j \in \{1,2\}$ pour lequel $q(s_j)$ soit initial. Donc $pq(s_j)$ est initial. La flèche $\eta(s_j): s_j \to pq(s_j)$ ayant pour but un objet initial strict, elle est inversible, et s_j est initial. De ce fait, e est un objet connexe dans $K^\cdot$. ∇

PROPOSITION 8. *Supposons que le foncteur* p *soit fidèle et compatible avec les objets finaux et les sommes finies. Pour qu'un objet* e *de* $H^\cdot$ *soit connexe, il suffit que* $p(e)$ *le soit. De plus, si* p *est plein,* e *est connexe si, et seulement si,* $p(e)$ *l'est.*

$\triangle$ Comme p est compatible avec les objets finaux, $p(1)$ est final dans $K^\cdot$ et $(p(2),(p(V),p(F)))$ est une somme naturalisée. p étant fidèle, l'application $\phi: Hom_{H^\cdot}(2,e) \to Hom_{K^\cdot}(p(2),p(e))$ est une injection. Comme $Hom_{K^\cdot}(p(2),p(e))$ a au plus deux éléments si $p(e)$ est connexe, il en est de même de $Hom_{H^\cdot}(2,e)$, ce qui signifie que e est connexe. Si de plus p est plein, ϕ est une bijection, et e est connexe si et seulement si $p(e)$ l'est. ∇

PROPOSITION 9. *Supposons que p est un foncteur fidèle compatible avec les sommes finies et admettant un adjoint $q : K^{\cdot} \to H^{\cdot}$. Notons $\eta : Id_{K^{\cdot}} \to p \cdot q$ le morphisme d'adjonction associé au couple (q, p). Si de plus pour tout objet u de $K^{\cdot}$, $\eta(u) : u \to p \cdot q(u)$ est un épimorphisme, alors un objet u est connexe si et seulement si $q(u)$ est connexe.*

Δ Soit u un objet de $K^{\cdot}$. Si u est connexe, comme $\eta(u) : u \to p\, q(u)$ est un épimorphisme, $p\, q(u)$ est un objet connexe de $K^{\cdot}$; d'après la proposition 8, $q(u)$ est un objet connexe de $H^{\cdot}$. La réciproque résulte de la proposition 7. ∇

EXEMPLES.

1° Dans $\mathfrak{M}$ les seuls objets connexes sont les objets initiaux et finaux car, A étant un objet de $\mathfrak{M}$, $Hom_{\mathfrak{M}}(\mathbf{2}, A)$ est en bijection avec $\mathcal{P}(e)$ qui a plus de deux éléments si E en a plus d'un.

2° Soit $A^{\cdot}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie. Le foncteur «diagonal»

$$\Delta : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, A^*)^{\square\square}$$

étant compatible avec les petites sommes et les éléments finaux, il est équivalent au foncteur $\partial = (-) \boxtimes 1$ défini sur $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, A^*)^{\square\square}$ (proposition 7.9). Donc d'après la proposition 4 un préfaisceau $F : A^* \to \mathfrak{M}$ non constant sur $\emptyset$ est connexe dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, A^*)^{\square\square}$ si, et seulement si, il admet $\mathbf{1}$ pour limite inductive. En particulier tout foncteur représentable est connexe. En effet, e étant un objet de A et $F = Hom_{A^{\cdot}}(e, -)$, soit $l : F \to \overline{LF}$ la limite inductive naturalisée canonique de F dans $\mathfrak{M}$. Pour tout morphisme $x : a \to e$ on a $l(a)(x) = l(e)(e)$, car $F(x)(e) = x$. Donc LF n'a qu'un élément et ainsi F est un objet connexe de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, A^*)^{\square\square}$.

3° Les objets connexes de la catégorie $\mathcal{F}$ des «catégories» sont les catégories connexes.

4° Les objets connexes de la catégorie $\mathcal{T}$ des «espaces topologiques» sont les espaces topologiques connexes. Ceci résulte, par exemple, de la proposition 5 § 11 de Bourbaki Chapitre I, Topologie générale.

5° Les objets connexes de $\mathcal{P}$ sont exactement les espaces quasi-topologiques connexes au sens de [4]. En effet, le foncteur $\hat{\pi} : \mathcal{T} \to \mathcal{P}$ vérifie les hypothèses de la proposition 9 (pour tout objet τ de $\mathcal{P}$, l'application continue $\eta(\tau)$ est un épimorphisme, car son application sous-jacente est une bijection). Une quasi-topologie τ est donc un objet connexe de $\mathcal{P}$ si, et seulement si, sa topologie libre (i.e. sa $\hat{\pi}$-structure libre) est connexe.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] C. EHRESMANN, *Algèbre, 1ère partie*, C.D.U., Paris (1968).

[2] R.E. HOFFMANN, A categorical concept of connectedness, Coll. d'Amiens (résumés), *Cahiers Topo. et Géo. diff.* XIV-2 (1973).

[3] H.J. KOWALSKY, Limesräume und Komplettierung, *Math. Nach.* 12 (1954), pp. 301-340.

[4] A. MACHADO, Quasi-topologie algébrique, *Esquisses mathématiques* 10, Paris (1970).

[5] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1972.

[6] J. PENON, Sur les objets séparés et les objets compacts, *Esquisses Math.* 17, Paris (1972).

[7] J. PENON, Catégories à sommes commutables, *C.R. Acad. Sc.* Paris 275 (1972), p. 1037.

[8] J. PENON, Quasi-topos, *C.R. Acad. Sc.* Paris 276 (1973), p. 237.

[9] P. FREYD, Aspects of Topoi, *Bull. Austral. Math. Soc.* 7 (1972), p. 1.

Département de Mathématiques
Université Paris 7, Tour 45
2, Place Jussieu
75005 PARIS