CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

DOMINIQUE BOURN

Triples p-structures

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 13, nº 4 (1972), p. 327-356

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1972__13_4_327_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XIII-4

TRIPLES p-STRUCTURES

par Dominique BOURN

Le but de cet article est de montrer que l'on peut généraliser les constructions d'Eilenberg-Moore et de Kleisli, associées à un triple sur une catégorie, dans le cadre de la théorie des catégories p-structurées au sens d'Ehresmann [1] (où p est un foncteur d'homomorphismes saturé vers la catégorie des applications). Il n'y a pas de difficulté à définir un triple structuré, puisque les foncteurs et les transformations naturelles p-structurées ont été systématiquement étudiées [1]; si certaines démonstrations sont un peu longues et auraient pu être allégées avec des données supplémentaires, c'est que nous avons tenu à n'utiliser qu'une seule hypothèse, qui est le plus souvent satisfaite: le foncteur p est à produits fibrés finis.

Ce travail soulève des questions plus générales sur les triples, qui font apparaître la catégorie de Kleisli comme un certain type de limite inductive et la catégorie des algèbres comme un certain type de limite projective dans la **2**-catégorie des transformations naturelles. Nous montrerons dans un prochain travail (partiellement résumé dans [6]) comment étendre les résultats de cet article à certaines **2**-catégories abstraites.

Je tiens à remercier ici M. Ehresmann des multiples encouragements qu'il a bien voulu me prodiguer. Je suis également heureux de l'occasion qui m'est offerte d'exprimer ma reconnaissance à Mme Bastiani pour l'attention généreuse qu'elle a portée à ce travail.

On rappelle que, conformément aux notations de [5], si $C^{\cdot}$ est une catégorie, on note C_0 l'ensemble de ses unités, α et β ses applications source et but, $\square\!\square C^{\cdot}$ la catégorie longitudinale de ses quatuors et $\boxminus C^{\cdot}$ la catégorie latérale de ses quatuors. Enfin, $\mathfrak{N}(C'^{\cdot}, C^{\cdot})^{\square\!\square}$ désigne la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de $C^{\cdot}$ vers la catégorie $C'^{\cdot}$, et le composé latéral de deux transformations naturelles est représenté par un point.

0. Triples structurés.

NOTATIONS. Les notations sont celles de [1]. En particulier p est un foncteur d'homomorphismes saturé d'une catégorie $H^\cdot$ vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications associée à un univers $\mathfrak{U}$. On supposera, ici, de plus le foncteur p à produits fibrés finis. On sait alors que les produits fibrés canoniques de $\mathfrak{M}$ induisent des produits fibrés canoniques sur $H^\cdot$.

On rappelle qu'un triple sur une catégorie $C^\cdot$ est un triplet $\mathbf{T} = (\tau, \lambda, \mu)$ tel que $\tau = (C^\cdot, \underline{\tau}, C^\cdot)$ soit un foncteur et (si l'on identifie $C^\cdot$ au foncteur identique de $C^\cdot$) que $\lambda = (\tau, \underline{\lambda}, C^\cdot)$ et $\mu = (\tau, \underline{\mu}, \tau^2)$ soient deux transformations naturelles vérifiant:

$$\mu \boxminus \lambda . \tau = \mu \boxminus \tau . \lambda = id_\tau \quad \text{et} \quad \mu \boxminus \tau . \mu = \mu \boxminus \mu . \tau .$$

On dit aussi que $(\underline{\tau}, \underline{\lambda}, \underline{\mu})$ définit le triple $\mathbf{T}$ sur $C^\cdot$.

Soit $(C^\cdot, s)$ une catégorie p-structurée.

DEFINITION. On appelle *triple p-structuré sur* $(C^\cdot, s)$ un triplet $\bar{\mathbf{T}} = (\bar{t}, \bar{l}, \bar{m})$, où:

- $\bar{t} = ((C^\cdot, s), t, (C^\cdot, s))$ est un foncteur p-structuré,
- $\bar{l} = (\bar{t}, l, (C^\cdot, s))$ une transformation naturelle p-structurée, ainsi que $\bar{m} = (\bar{t}, m, \bar{t}^2)$,
- $(p(t), p(l), p(m))$ définit un triple sur $C^\cdot$, noté $\mathbf{T}$.

On posera désormais $p(t) = \underline{\tau}$, $p(l) = \underline{\lambda}$, $p(m) = \underline{\mu}$ et $\mathbf{T} = (\tau, \lambda, \mu)$.

EXEMPLES. 1° Considérons le triple des parties $(\mathcal{P}, \lambda, \mu)$, où $\mathcal{P}$ est le foncteur «parties» de $\mathfrak{M}$ vers $\mathfrak{M}$, où λ associe à tout ensemble E l'application de E vers $\mathcal{P}(E)$ qui à l'élément x fait correspondre la partie $\{x\}$ de E, et où μ associe à E l'application de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ vers $\mathcal{P}(E)$ qui, à toute famille de parties $(A_i)_{i \in I}$ de E, fait correspondre la réunion de ces parties. On vérifie facilement que $(\mathcal{P}, \lambda, \mu)$ est sous-jacent à un triple ordonné, si l'on munit $\mathfrak{M}$ de l'ordre suivant: $\phi \leqslant \phi'$ si et seulement si ϕ est une restriction de ϕ'.

2° Soit $\mathbf{T} = (\tau, \lambda, \mu)$ un triple sur $C^\cdot$. On peut définir alors un triple $\mathbf{T}^{\boxminus} = (\tau^{\boxminus}, \lambda^{\boxminus}, \mu^{\boxminus})$ sur $\boxminus C^\cdot$ de la manière suivante:

$$\tau^{\boxminus}(h', f', f, h) = (\tau(h'), \tau(f'), \tau(f), \tau(h)),$$

$$\lambda^{\square\square}(h)=(\tau(h),\lambda(\beta(h)),\lambda(\alpha(h)),h)$$

et

$$\mu^{\square\square}(h)=(\tau(h),\mu(\beta(h)),\mu(\alpha(h)),\tau^2(h)).$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien là d'un triple.

On notera $p\mathcal{F}$ le foncteur d'oubli fidèle, vers $\mathcal{M}$, de la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs associée à $\mathcal{U}$.

PROPOSITION 1. *Le triple* $\mathbf{T}^{\square\square}$ *est sous-jacent à un triple* $p\mathcal{F}$*-structuré.*

PREUVE. La catégorie $\boxminus C^{\cdot}$ structure $\square\square C^{\cdot}$. D'autre part on sait que $\tau^{\square\square}$ est sous-jacent à un foncteur double. Montrons que $\lambda^{\square\square}$ est sous-jacent à un foncteur de $((\square\square C^{\cdot})_0)^{\boxminus}$ vers $\boxminus C^{\cdot}$. Or si $e \in C^{\cdot}_0$, on a

$$\lambda^{\square\square}(e)=(\tau(e),\lambda(e),\lambda(e),e)\in(\boxminus C^{\cdot})_0$$

et, si h et h' sont deux morphismes composables de $C^{\cdot}$:

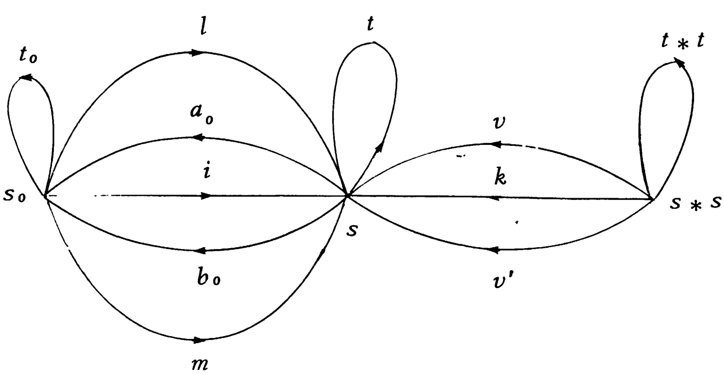
$$\lambda^{\square\square}(h'.h)=(\tau(h'.h),\lambda(\beta(h'.h)),\lambda(\alpha(h'.h)),h'.h)$$
$$=(\tau(h'),\lambda(\beta(h')),\lambda(\alpha(h')),h')\boxminus(\tau(h),\lambda(\beta(h)),\lambda(\alpha(h)),h),$$

car $\alpha(h')=\beta(h)$; d'où $\lambda^{\square\square}(h'.h)=\lambda^{\square\square}(h')\boxminus\lambda^{\square\square}(h)$.

On ferait une démonstration analogue pour $\mu^{\square\square}$. ▼

PROPOSITION 2. *Si* $\bar{\mathbf{T}}=(\bar{t},\bar{l},\bar{m})$ *est un triple* p*-structuré sur* $(C^{\cdot},s)$, *alors* $\mathbf{T}^{\square\square}$ *est sous-jacent à un triple* p*-structuré.*

PREUVE. $\bar{\mathbf{T}}$ étant un triple p-structuré, on a le diagramme suivant dans $H^{\cdot}$, où a_0, b_0 et k structurent les applications source, but et loi de com-



position de $C^{\cdot}$, où t_0 est déterminé à partir de t comme étant un p-sous-morphisme de t et $t{*}t$ comme étant le crochet $[tv', tv]$ (cf [1], page 18) relativement au produit fibré naturalisé $((a_0, v), (b_0, v'))$. Le produit fibré canonique de $k.$ et k (noté $\Box s$) structure un ensemble isomorphe à l'ensemble des quatuors de $H^{\cdot}$. Soient $p_1^{\Box}$ et $p_2^{\Box}$ les projections de ce produit fibré. On vérifie l'égalité

$$k.(t{*}t).p_1^{\Box} = k.(t{*}t).p_2^{\Box}$$

par $t.k.p_1^{\Box} = t.k.p_2^{\Box}$ (puisque $k.t{*}t = t.k$) d'où un crochet

$$t^{\Box} = [(t{*}t).p_1^{\Box}, (t{*}t).p_2^{\Box}] \in \Box s.H^{\cdot}.\Box s;$$

on construit ensuite les crochets

$$l^{\Box} = [[t, l.a_0], [l.b_0, s]] \quad \text{et} \quad m^{\Box} = [[t, m.a_0], [m.b_0, t^2]],$$

appartenant tous deux à $\Box s.H^{\cdot}.s$. Les flèches $t^{\Box}, l^{\Box}, m^{\Box}$ nous donnent les flèches nécessaires à la structuration cherchée. ▼

On remarquera que les propositions 1 et 2 ici nous donneraient le matériel utile à l'élaboration d'une catégorie et d'un foncteur doubles structurés.

Enfin, on démontrerait qu'un **2**-triple sur une **2**-catégorie est un triple $p\mathcal{Y}$-structuré. De plus un **2**-triple $\mathbf{T}$ détermine un triple double $\mathbf{T}_q$ sur la «catégorie double des quintettes» associée à la **2**-catégorie de base.

I. Sur la catégorie de Kleisli.

PROPOSITION 1. *Si* $\bar{\mathbf{T}} = (\bar{t}, \bar{l}, \bar{m})$ *est un triple p-structuré sur* $(C^{\cdot}, s)$, *on peut déterminer canoniquement une structuration de la catégorie de Kleisli* $Kl^{\cdot}$ *du triple* $\mathbf{T}$ *sous-jacent, ainsi que du couple d'adjoints* (Y_{Kl}, X_{Kl}) *associé à cette catégorie.*

PREUVE. Rappelons que Kl est l'ensemble formé des couples $(e', f) \in C_0^{\cdot} \times C$ tels que $\tau(e') = \beta(f)$; on peut par conséquent le structurer par $s_{Kl} = t_0 \vee b_0$, produit fibré de t_0 et b_0, naturalisé par les projections p_1 et p_2. On vérifie $a_0 . m = t_0^2$ en projection dans $\mathfrak{M}$ (car p est fidèle), puisque $\alpha(\mu(e)) = \tau^2(e)$ pour tout $e \in C_0^{\cdot}$; il s'ensuit

$$a_0 . m . p_1 = t_0^2 . p_1 = t_0 . b_0 . p_2 = b_0 . t . p_2,$$

car t_o est un sous-morphisme de t; d'où le crochet

$$[m.p_1, t.p_2] \in s * s.H.s_{Kl}, \quad \text{et} \quad y_{Kl} = k.[m.p_1, t.p_2];$$

$y_{Kl} \in s.H^{\cdot}.s_{Kl}$. Par construction y_{Kl} structure l'application $\underline{Y}_{Kl}$ de Kl vers C qui à (e', f) fait correspondre $\mu(e').\tau(f)$.

La source de (e', f) est identifiée à $\alpha(f)$ et son but à e'. On structurera donc les applications source et but de $Kl^{\cdot}$ par $a_{Kl} = a_o.p_2$ et $b_{Kl} = p_1$. Soit maintenant $((a_{Kl}, v_{Kl}), (b_{Kl}, v'_{Kl}))$ le produit fibré dans p, dont on notera $s_{Kl} * s_{Kl}$ le produit fibré canonique. On vérifie que:

$$a_o.y_{Kl}.v_{Kl} = a_o.k.[m.p_1, t.p_2].v_{Kl} = a_o.t.p_2.v_{Kl}$$

car $a_o.k = a_o.v'$ dans toute catégorie structurée. Puis

$$a_o.t.p_2.v_{Kl} = t_o.a_o.p_2.v_{Kl} = t_o.a_{Kl}.v_{Kl} = t_o.b_{Kl}.v'_{Kl}$$
$$= t_o.p_1.v'_{Kl} = b_o.p_2.v'_{Kl}.$$

Il existe donc un crochet $[y_{Kl}.v_{Kl}, p_2.v'_{Kl}] \in s * s.H^{\cdot}.s_{Kl} * s_{Kl}$. D'autre part on a $b_o.m = t_o$, car $\beta(\mu(e)) = \tau(e)$ pour tout $e \in C_o^{\cdot}$; ainsi

$$t_o.p_1.v_{Kl} = b_o.m.p_1.v_{Kl} = b_o.k.[m.p_1, t.p_2].v_{Kl}$$
$$= b_o.y_{Kl}.v_{Kl} = b_o.k.[y_{Kl}.v_{Kl}, p_2.v'_{Kl}],$$

d'où le crochet $k_{Kl} = [p_1.v_{Kl}, k.[y_{Kl}.v_{Kl}, p_2.v'_{Kl}]]$ qui structure la composition dans $Kl^{\cdot}$, celle-ci associant

$$(e'', \mu(e'').\tau(f').f) \text{ à } ((e'', f'), (e', f)) \in Kl^{\cdot} * Kl^{\cdot}.$$

On reconnait dans y_{Kl} la flèche qui structure le foncteur d'oubli Y_{Kl} de $Kl^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$. On structurera son adjoint X_{Kl} de $C^{\cdot}$ vers $Kl^{\cdot}$, qui à tout morphisme f de $C^{\cdot}$ fait correspondre $(\beta(f), \lambda(\beta(f)).f)$ de la manière suivante: on constate que $a_o.l = s_o$ (par $\alpha(\lambda(e)) = e$ pour tout $e \in C_o^{\cdot}$); il s'ensuit $a_o.l.b_o = b_o$, de sorte qu'il existe un crochet $[l.b_o, s] \in s * s.H^{\cdot}.s$; puis on obtient $t_o = b_o.l$ étant donné que $\tau(e) = \beta(\lambda(e))$ pour tout $e \in C_o^{\cdot}$; on en déduit

$$t_o.b_o = b_o.l.b_o = b_o.k.[l.b_o, s].$$

Par suite, il existe un crochet $x_{Kl} = [b_o, k.[l.b_o, s]] \in s_{Kl}.H^{\cdot}.s$ qui structure X_{Kl}. On posera

$\bar{y}_{Kl}=((C^{\cdot}, s), y_{Kl}, (Kl^{\cdot}, s_{Kl}))$ et $\bar{x}_{Kl}=((Kl^{\cdot}, s_{Kl}), x_{Kl}, (C^{\cdot}, s))$. ▼

Soient $\mathbf{T}=(\tau, \lambda, \mu)$ et $\mathbf{T'}=(\tau', \lambda', \mu')$ deux triples sur $C^{\cdot}$ et $C'^{\cdot}$ respectivement. On appellera *premier morphisme de triples* un quadruplet $(\mathbf{T'}, \gamma, \phi, \mathbf{T})$, où $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T'}$ sont des triples, où ϕ est un foncteur $\phi=(C'^{\cdot}, \underline{\phi}, C^{\cdot})$ et γ une transformation naturelle $\gamma=(\tau'.\phi, \underline{\gamma}, \phi.\tau)$ vérifiant :

1) $\gamma \boxdot \phi.\lambda=\lambda'.\phi$,

2) $\gamma \boxdot \phi.\mu=\mu'.\phi \boxdot \tau'.\gamma \boxdot \gamma.\tau$.

On dit aussi que $(\mathbf{T'}, \underline{\gamma}, \underline{\phi}, \mathbf{T})$ définit un premier morphisme de triples. On rappelle qu'un tel morphisme de triples détermine un foncteur Φ entre la catégorie de Kleisli $Kl^{\cdot}_{\mathbf{T}}$ de $\mathbf{T}$ et celle $Kl^{\cdot}_{\mathbf{T'}}$ de $\mathbf{T'}$ de la manière suivante : à $(e', f)\in Kl^{\cdot}_{\mathbf{T}}$ on fait correspondre $(\phi(e'), \gamma(e').\phi(f))\in Kl^{\cdot}_{\mathbf{T'}}$.

Soient $\bar{\mathbf{T}}=(\bar{t}, \bar{l}, \bar{m})$ et $\bar{\mathbf{T}}'=(\bar{t}', \bar{l}', \bar{m}')$ deux triples structurés sur $(C^{\cdot}, s)$ et $(C'^{\cdot}, s')$ respectivement.

DEFINITION 1. On appellera *premier morphisme de triples p-structurés* un quadruplet $(\bar{\mathbf{T}}', \bar{g}, \bar{h}, \bar{\mathbf{T}})$, où $\bar{\mathbf{T}}$ et $\bar{\mathbf{T}}'$ sont deux triples p-structurés, $\bar{h}=((C'^{\cdot}, s'), h, (C^{\cdot}, s))$ un foncteur p-structuré et $\bar{g}=(\bar{t}'.\bar{h}, g, \bar{h}.\bar{t})$ une transformation naturelle p-structurée, tels que $(\mathbf{T'}, p(g), p(h), \mathbf{T})$ définisse un morphisme de triples noté $(\mathbf{T'}, \gamma, \phi, \mathbf{T})$. On posera

$$p(h)=\underline{\phi} \quad \text{et} \quad p(g)=\underline{\gamma}.$$

PROPOSITION 2. *Si $(\bar{\mathbf{T}}', \bar{g}, \bar{h}, \bar{\mathbf{T}})$ est un premier morphisme de triples p-structurés, alors le foncteur Φ déterminé à partir du morphisme sous-jacent $(\mathbf{T'}, \gamma, \phi, \mathbf{T})$, peut être canoniquement p-structuré.*

PREUVE. On indicera d'un prime (') les notions relatives à $(C'^{\cdot}, s')$. L'égalité $\alpha(\gamma(e))=\phi.\tau(e)$ pour tout $e\in C^{\cdot}_0$ nous donne (p étant fidèle) $a'_0.g=h_0.t_0$, où h_0 est déterminé à partir de h, comme t_0 à partir de t. Il en résulte (avec les notations de la proposition 1)

$$b'_0.h.p_2=h_0.b_0.p_2=h_0.t_0.p_1=a'_0.g.p_1 ,$$

de sorte qu'il existe un crochet $[g.p_1, h.p_2]\in s'*s'.H^{\cdot}.s_{Kl}$; de plus $\beta(\gamma(e))=\tau'.\phi(e)$ pour tout $e\in C^{\cdot}_0$, d'où $b'_0.g=t'_0.h_0$ et par conséquent

$$t'_0 \cdot h_0 \cdot p_1 = b'_0 \cdot g \cdot p_1 = b'_0 \cdot k' \cdot [g \cdot p_1, h \cdot p_2].$$

On en déduit un crochet $\mathbf{h} = [h_0 \cdot p_1, k' \cdot [g \cdot p_1, h \cdot p_2]]$ qui structure Φ. On posera $\bar{\mathbf{h}} = ((Kl_{\mathbf{T}'}, s'_{Kl}), \mathbf{h}, (Kl_{\mathbf{T}}, s_{Kl}))$. ▼

REMARQUE. On sait que $\Phi . X_{Kl} = X'_{Kl} \cdot \phi$ et que γ définit une transformation naturelle de $\phi \cdot Y_{Kl}$ vers $Y'_{Kl} \cdot \Phi$. Alors dans les conditions de la proposition 2, la flèche g qui structure γ détermine une transformation naturelle p-structurée entre $\bar{h} \cdot \bar{y}_{Kl}$ et $\bar{y}'_{Kl} \cdot \bar{\mathbf{h}}$.

Obligations et réductions.

Soit $\mathbf{T} = (\tau, \lambda, \mu)$ un triple sur $C^{\cdot}$ et $R = (C'^{\cdot}, \underline{R}, C^{\cdot})$ un foncteur.

DEFINITION 2. On appellera *réduction de* R *par* $\mathbf{T}$ la donnée d'un foncteur $R' = (C'^{\cdot}, \underline{R}', Kl_{\mathbf{T}})$ vérifiant $R' . X_{Kl} = R$.

DEFINITION 3. On appellera *obligation de* $\mathbf{T}$ *sur* R la donnée d'une transformation naturelle $\delta = (R, \underline{\delta}, R \cdot \tau)$ vérifiant :

$$(1)\ \delta \boxminus R . \lambda = id_R \quad \text{et} \quad (2)\ \delta \boxminus R . \mu = \delta \boxminus \delta . \tau .$$

PROPOSITION 3. *L'ensemble des réductions de* R *par* $\mathbf{T}$ *est isomorphe à l'ensemble des obligations de* $\mathbf{T}$ *sur* R.

PREUVE. 1° Soit R' une réduction de R par $\mathbf{T}$.
Posons $\underline{\delta}(e) = R'(e, \tau(e))$ pour tout $e \in C_0$. Alors $\underline{\delta}$ définit une transformation naturelle δ de $R \cdot \tau$ vers R. En effet, soit $f \in C^{\cdot}$. On obtient :

$$\begin{aligned} R(f) . \delta(\alpha(f)) &= R(f) . R'(\alpha(f), \tau(\alpha(f))) \\ &= R'(X_{Kl}(f)) . R'(\alpha(f), \tau(\alpha(f))) \\ &= R'(\beta(f), \lambda(\beta(f)) . f) . R'(\alpha(f), \tau(\alpha(f))) \\ &= R'(\beta(f), \mu(\beta(f)) . \tau(\lambda(\beta(f))) . \tau(f)) \\ &= R'(\beta(f), \tau(f)) \end{aligned}$$

$$= R'(\beta(f), \tau(\beta(f))) . R'(\beta(\tau(f)), \lambda(\tau(\beta(f))) . \tau(f))$$

$$= \delta(\beta(f)) . R'(X_{Kl}(\tau(f))) = \delta(\beta(f)) . R(\tau(f)).$$

De plus

$$\delta(e) . R(\lambda(e)) = R'(e, \tau(e)) . R(\lambda(e))$$

$$= R'(e, \tau(e)).R'(X_{Kl}(\lambda(e)))$$

$$= R'(e, \tau(e)).R'(\tau(e), \lambda(\tau(e)).\lambda(e)) = R'(e, \lambda(e)) = R(e)$$

pour tout $e \in C'_0$ et

$$\delta(e).R(\mu(e)) = R'(e, \tau(e)).R'(X_{Kl}(\mu(e)))$$

$$= R'(e, \tau(e)).R'(\tau(e), \lambda(\tau(e)).\mu(e)) = R'(e, \mu(e)).$$

D'autre part,

$$\delta(e).\delta(\tau(e)) = R'(e, \tau(e)).R'(\tau(e), \tau^2(e)) = R'(e, \mu(e))$$

pour tout $e \in C'_0$.

2° Réciproquement, soit δ une obligation de **T** sur R. Posons $R'(e', f) = \delta(e').R(f)$ pour tout $(e', f) \in Kl^{\cdot}_{\mathbf{T}}$. On détermine ainsi un foncteur R'. En effet, pour toute unité $(e, \lambda(e))$ de $Kl^{\cdot}_{\mathbf{T}}$, on a $R'(e, \lambda(e)) = \delta(e).R(\lambda(e)) = R(e)$ (d'après (1)) et $R(e) \in C''_0$. D'autre part, soit $((e'', f'), (e', f)) \in Kl^{\cdot}_{\mathbf{T}} * Kl^{\cdot}_{\mathbf{T}}$. Alors

$$R'(e'', f').R'(e', f) = \delta(e'').R(f').\delta(e').R(f)$$

et

$$R'(e'', \mu(e'').\tau(f').f) = \delta(e'').R(\mu(e'')).R(\tau(f')).R(f)$$

$$= \delta(e'').\delta(\tau(e'')).R(\tau(f')).R(f) \quad \text{(d'après (2))}$$

$$= \delta(e'').R(f').\delta(e').R(f)$$

(car δ est une transformation naturelle). Par ailleurs,

$$R'(X_{Kl}(f)) = R'(\beta(f), \lambda(\beta(f)).f) = \delta(\beta(f)).R(\lambda(\beta(f)).f)$$

$$= \delta(\beta(f)).R(\lambda(\beta(f))).R(f) = R(f)$$

d'après (1).

3° Enfin ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre : En partant de R', on obtient

$$\delta(e').R(f) = R'(e', \tau(e')).R(f)$$

$$= R'(e', \tau(e')).R'(\beta(f), \lambda(\beta(f)).f) = R'(e', f).$$

En partant de δ, on obtient

$$R'(e, \tau(e)) = \delta(e).R(\tau(e)) = \delta(e). \quad \blacktriangledown$$

Considérons toujours le foncteur R de C vers C'. Il détermine un foncteur de $\mathcal{N}(C, C'')^{\square}$ vers $\mathcal{N}(C', C'')^{\square}$ pour toute catégorie C'', foncteur noté $\mathcal{N}(R, C'')$ et défini par $\mathcal{N}(R, C'')(\theta) = R\theta$, si θ est une transformation naturelle.

DEFINITION 4. Si $G' = (C', \underline{G}', C'')$ est un foncteur, on appellera *coexpansion de* G' *par* R une structure colibre de G' par rapport au foncteur $\mathcal{N}(R, C'')$.

PROPOSITION 4. *Lorsque R admet une coexpansion par lui-même, il détermine un triple* $\mathbf{T}$, *qu'on appellera triple de cointensité de* R.

PREUVE. Notons τ la coexpansion de R et $\varepsilon = (R, \underline{\varepsilon}, R.\tau)$ l'éjecteur correspondant. Le foncteur id_C se projette sur R par $\mathcal{N}(R, C)$, d'où une transformation naturelle $\lambda = (\tau, \underline{\lambda}, C)$ telle que

$$\varepsilon \square R.\lambda = id_R \qquad (1).$$

De même, τ^2 se projetant sur $R.\tau^2$, la transformation naturelle $\varepsilon \square \varepsilon.\tau$ nous donne une transformation naturelle μ telle que

$$\varepsilon \square R.\mu = \varepsilon \square \varepsilon.\tau \qquad (2).$$

Montrons que $\mathbf{T} = (\tau, \lambda, \mu)$ est un triple. On vérifie :

$$\varepsilon \square \mathcal{N}(R, C)(\mu \square \tau.\lambda) = \varepsilon \square R.\mu \square R.\tau.\lambda$$

$$= \varepsilon \square \varepsilon.\tau \square R.\tau.\lambda \text{ (d'après (2))} = \varepsilon \square R.\lambda \square \varepsilon$$

(car $\varepsilon.\tau \square R.\tau.\lambda = R.\lambda \square \varepsilon = \varepsilon.\lambda$)

$$= \varepsilon \text{ (d'après (1))} = \varepsilon \square \mathcal{N}(R, C)(id_\tau).$$

Puis,

$$\varepsilon \square \mathcal{N}(R, C)(\mu \square \lambda.\tau) = \varepsilon \square R.\mu \square R.\lambda.\tau$$

$$= \varepsilon \square \varepsilon.\tau \square R.\lambda.\tau = \varepsilon \square (\varepsilon \square R.\lambda).\tau = \varepsilon.$$

D'où $\mu \square \tau.\lambda = id_\tau = \mu \square \lambda.\tau$. Enfin :

$$\varepsilon \square \mathcal{N}(R, C)(\mu \square \tau.\mu) = \varepsilon \square R.\mu \square R.\tau.\mu$$

$$= \varepsilon \square \varepsilon.\tau \square R.\tau.\mu$$

$= \varepsilon \square R.\mu \square \varepsilon.\tau^2$ (car $\varepsilon.\tau \square R.\tau.\mu = \varepsilon.\mu = R.\mu \square \varepsilon.\tau^2$)

$$= \varepsilon \square \varepsilon . \tau \square \varepsilon . \tau^2$$

et

$$\varepsilon \square \mathfrak{N}(R, C^{\cdot})(\mu \square \mu . \tau) = \varepsilon \square R . \mu \square R . \mu . \tau$$

$$= \varepsilon \square \varepsilon . \tau \square R . \mu . \tau = \varepsilon \square (\varepsilon \square R \mu) . \tau$$

$$= \varepsilon \square (\varepsilon \square \varepsilon . \tau) . \tau = \varepsilon \square \varepsilon . \tau \square \varepsilon . \tau^2 .$$

D'où $\mu \square \mu . \tau = \mu \square \tau . \mu$ et le résultat. ▼

REMARQUE. On constate que les égalités (1) et (2) font de ε une obligation de $\mathbf{T}$ sur R. On notera F_R la réduction correspondante.

On a un exemple de triple de cointensité de R lorsque R admet un coadjoint.

Soit maintenant $\mathbf{T}' = (\tau', \lambda', \mu')$ un triple sur $C^{\cdot}$.

PROPOSITION 5. *Si R admet un triple de cointensité (noté $\mathbf{T}$), il existe une bijection entre les obligations de $\mathbf{T}'$ sur R et les morphismes de $\mathbf{T}'$ vers $\mathbf{T}$ dont la troisième projection est $id_{C^{\cdot}}$.*

PREUVE. Soit δ' une obligation de $\mathbf{T}'$ sur R. La transformation naturelle $\delta' = (R, \underline{\delta}', R . \tau')$ détermine une transformation naturelle unique $\pi = (\tau, \underline{\pi}, \tau')$ telle que $\varepsilon \square R . \pi = \delta'$ (car τ est la coexpansion de R par lui-même).

Montrons que π définit bien un morphisme $(\mathbf{T}, \pi, id_{C^{\cdot}}, \mathbf{T}')$. Or

$$\varepsilon \square \mathfrak{N}(R, C^{\cdot})(\pi \square \lambda') = \varepsilon \square R . \pi \square R . \lambda'$$

$$= \delta' \square R . \lambda' = id_R \text{ (d'après la définition des obligations)}$$

$$= \varepsilon \square R . \lambda = \varepsilon \square \mathfrak{N}(R, C^{\cdot})(\lambda) \text{ d'après (1), Proposition 4;}$$

d'où $\pi \square \lambda' = \lambda$. D'autre part :

$$\varepsilon \square \mathfrak{N}(R, C^{\cdot})(\pi \square \mu') = \varepsilon \square R . \pi \square R . \mu'$$

$$= \delta' \square R . \mu'$$

et

$$\varepsilon \square \mathfrak{N}(R, C^{\cdot})(\mu \square \pi^2) = \varepsilon \square R . \mu \square R . \pi^2$$

$$= \varepsilon \square \varepsilon . \tau \square R . \pi^2 \text{ (d'après proposition 4, (2))}$$

$$= \varepsilon \square \varepsilon . \tau \square R . \pi . \tau \square R . \tau' . \pi = \varepsilon \square (\varepsilon \square R . \pi) . \tau \square R . \tau' . \pi$$

$$= \varepsilon \square \delta' . \tau \square R . \tau' . \pi$$

$$= \varepsilon \square R . \pi \square \delta' . \tau' \quad (\text{ car } \delta' . \tau \square R . \tau' . \pi = \delta' . \pi = R . \pi \square \delta' . \tau')$$

$$= \delta' \square \delta' . \tau' = \delta' \square R . \mu'$$

(d'après la définition des obligations), d'où:

$$\pi \square \mu' = \mu \square \pi^2 \text{ et le résultat.}$$

Réciproquement, soit un morphisme $(\mathbf{T}, \pi, id_{C^{\cdot}}, \mathbf{T}')$. Posons $\delta' = \varepsilon \square R . \pi$. Montrons que δ' est une obligation de $\mathbf{T}'$ sur R. Or :

$$\delta' \square R . \lambda' = \varepsilon \square R . \pi \square R . \lambda' = \varepsilon \square R . (\pi \square \lambda')$$

$$= \varepsilon \square R . \lambda \; (\pi \text{ définissant un morphisme de triples})$$

$$= id_R \; \text{(d'après prop. 4 (1)).}$$

De plus :

$$\delta' \square \delta' . \tau' = \varepsilon \square R . \pi \square (\varepsilon \square R . \pi) . \tau'$$

$$= \varepsilon \square R . \pi \square \varepsilon . \tau' \square R . \pi . \tau'$$

$$= \varepsilon \square \varepsilon . \tau \square R . \tau . \pi \square R . \pi . \tau'$$

$$(\text{car } \varepsilon . \tau \square R . \tau . \pi = R . \pi \square \varepsilon . \tau' = \varepsilon . \pi)$$

$$= \varepsilon \square R . \mu \square R (\tau . \pi \square \pi . \tau') \quad \text{(d'après prop. 4 ,(2))}$$

$$= \varepsilon \square R . (\mu \square \pi^2) = \varepsilon \square R . (\pi \square \mu')$$

$$(\text{car } \pi \text{ définit un morphisme de triples})$$

$$= \varepsilon \square R . \pi \square R . \mu' = \delta' \square R . \mu' .$$

D'où le résultat. ▼

Soient $\mathcal{C}^{\triangle}_{C^{\cdot}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des triangles au-dessous de $C^{\cdot}$ ayant pour objets les foncteurs qui admettent une coexpansion par eux-mêmes et $\mathcal{T}_{C^{\cdot}}$ la sous-catégorie des premiers morphismes de triples sur $C^{\cdot}$ ayant pour troisième projection l'application $id_{C^{\cdot}}$.

On peut alors définir un foncteur

$$\Theta = (\mathcal{C}^{\triangle}_{C^{\cdot}} , \underline{\Theta} , \mathcal{T}_{C^{\cdot}}) \text{ par } \underline{\Theta} (\mathbf{T}_2 , \pi , id_{C^{\cdot}} , \mathbf{T}_1) = (X_{Kl_2} , F_{\pi} , X_{Kl_1}) ,$$

où F_{π} est la réduction correspondant à l'obligation déterminée par $(\mathbf{T}_2 ,$

$\pi, id_{C^\cdot}, \mathbf{T}_1)$; on vérifie aisément que, si $(e', f) \in Kl_{\mathbf{T}_1}$, $F_\pi(e', f) = (e', \pi(e').f)$. On définit également un foncteur $\Theta' = (\mathcal{T}_{C^\cdot}^\cdot, \underline{\Theta}', \mathcal{C}_{C^\cdot}^\Delta)$ par $\Theta'(R_2, F'', R_1) = (\mathbf{T}_{R_2}, \pi_{F''}, id_{C^\cdot}, \mathbf{T}_{R_1})$, où $\mathbf{T}_{R_1}$ et $\mathbf{T}_{R_2}$ sont les triples de cointensité de R_1 et R_2 et $(\mathbf{T}_{R_2}, \pi_{F''}, id_{C^\cdot}, \mathbf{T}_{R_1})$ est le morphisme correspondant à l'obligation déterminée par la réduction $F''.F_{R_1}$ (cf. remarque proposition 4). On vérifie aisément que, si ε_1 et ε_2 désignent les éjecteurs correspondant aux coexpansions, $\pi_{F''}$ est l'unique transformation naturelle vérifiant $\varepsilon_2 \boxminus R_2 . \pi_{F''} = F''. \varepsilon_1$.

PROPOSITION 6. *Θ' admet Θ pour adjoint.*

PREUVE. Montrons que $X_{Kl_{\mathbf{T}'}}$ est une Θ'-structure libre associée à $\mathbf{T}'$ dont le projecteur est l'identité. Soit R un élément de $(\mathcal{C}_{C^\cdot}^\Delta)_0$ et $\mathbf{T}$ son image par Θ'. Soit $(\mathbf{T}, \pi, id_{C^\cdot}, \mathbf{T}')$ un morphisme; on sait qu'on peut lui faire correspondre une réduction F_π de R par $\mathbf{T}'$ qui par construction est telle que $\Theta'(R, F_\pi, X_{Kl_{\mathbf{T}'}}) = (\mathbf{T}, \pi, id_{C^\cdot}, \mathbf{T}')$, et qui par définition de Θ' est unique à vérifier cette égalité. ▼

p-obligations et p-réductions.

Soit $\bar{\mathbf{T}}$ un triple p-structuré sur $(C^\cdot, s)$ et $\bar{r} = ((C'^\cdot, s'), r, (C^\cdot, s))$ un foncteur p-structuré.

DEFINITION 5. On appellera *p-réduction de $\bar{r}$ par $\bar{\mathbf{T}}$* un foncteur *p-structuré* $\bar{r}' = ((C'^\cdot, s'), r', (Kl_{\mathbf{T}}^\cdot, s_{Kl}))$ tel que $\bar{r}'.\bar{x}_{Kl} = \bar{r}$.

DEFINITION 6. On appellera *p-obligation de $\bar{\mathbf{T}}$ sur $\bar{r}$* une transformation naturelle p-structurée $\bar{d} = (\bar{r}, d, \bar{r}.\bar{t})$ vérifiant :

$$\bar{d} \boxminus \bar{r}.\bar{l} = id_{\bar{r}} \quad \text{et} \quad \bar{d} \boxminus \bar{r}.\bar{m} = \bar{d} \boxminus \bar{d}.\bar{t}.$$

PROPOSITION 7. *L'ensemble des p-réductions de $\bar{r}$ par $\bar{\mathbf{T}}$ est isomorphe à l'ensemble des p-obligations de $\bar{\mathbf{T}}$ sur $\bar{r}$.*

PREUVE. Soit $\bar{r}'$ une réduction de $\bar{r}$ par $\bar{\mathbf{T}}$. On définira $\bar{d}$ à partir de $d = r'.[s_0, t_0]$. Réciproquement, si $\bar{d}$ est une p-obligation de $\bar{\mathbf{T}}$ sur $\bar{r}$, on définira $\bar{r}'$ avec la flèche $r' = k.[d.p_1, r.p_2]$. Le foncteur p étant fidèle, on obtient le résultat demandé. ▼

Le foncteur structuré $\bar{r}$ détermine un foncteur de $\mathcal{N}((C^\cdot, s), (C''^\cdot, s''))^{\boxminus}$ vers $\mathcal{N}((C'^\cdot, s'), (C''^\cdot, s''))^{\boxminus}$ pour toute catégorie p-

structurée $(C''^{\cdot}, s'')$, foncteur noté $\mathfrak{N}(\bar{r},(C''^{\cdot}, s''))$; en particulier

$$\mathfrak{N}(\bar{r},(C''^{\cdot}, s''))(\bar{g}) = \bar{r}.\bar{g}.$$

DEFINITION 7. Si $\bar{g} = ((C'^{\cdot}, s'), g, (C''^{\cdot}, s''))$, on appellera *p-coexpansion de* $\bar{g}$ *par* $\bar{r}$ une $\mathfrak{N}(\bar{r},(C''^{\cdot}, s''))$-structure colibre de $\bar{g}$.

PROPOSITION 8. *Lorsque* $\bar{r}$ *admet une p-coexpansion par lui-même, il détermine un triple p-structuré* $\bar{\mathbf{T}}$ *qu'on appellera p-triple de cointensité de* $\bar{r}$.

PREUVE. Cette démonstration est analogue à celle de la proposition 4; on ne fait que restreindre les calculs à

$$\mathfrak{N}((C'^{\cdot}, s'),(C^{\cdot}, s))^{\square\square} \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}((C^{\cdot}, s),(C^{\cdot}, s))^{\square\square}. \quad \blacktriangledown$$

REMARQUE. Si on note $\bar{j}$ l'éjecteur correspondant à cette coexpansion, on constate qu'il s'agit en fait d'une p-obligation de $\bar{\mathbf{T}}$ sur $\bar{r}$; on notera $\bar{h}_r$ la p-réduction correspondante.

Soit maintenant $\bar{\mathbf{T}}'$ un triple p-structuré sur $(C^{\cdot}, s)$.

PROPOSITION 9. *Si* $\bar{r}$ *admet un p-triple de cointensité* $\bar{\mathbf{T}}$, *il existe une bijection entre les p-obligations de* $\bar{\mathbf{T}}'$ *sur* $\bar{r}$ *et les premiers morphismes de triples structurés de* $\bar{\mathbf{T}}'$ *vers* $\bar{\mathbf{T}}$ *dont la troisième projection est* $\bar{s}$.

PREUVE analogue à celle de la proposition 5. ▼

Soient $\mathcal{C}^{\triangle}_{(C^{\cdot}, s)}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des triangles au-dessus de $(C^{\cdot}, s)$ ayant pour objets les foncteurs p-structurés qui admettent une p-coexpansion par eux-mêmes et $\mathcal{T}^{\cdot}_{(C^{\cdot}, s)}$ la sous-catégorie des premiers morphismes de triples structurés ayant pour troisième projection $\bar{s} = id_{(C^{\cdot}, s)}$.

On peut alors définir un foncteur

$$\Theta_p = (\mathcal{C}^{\triangle}_{(C^{\cdot}, s)}, \underline{\Theta}_p, \mathcal{T}^{\cdot}_{(C^{\cdot}, s)}) \text{ par } \underline{\Theta}_p(\bar{\mathbf{T}}_2, \bar{u}, \bar{s}, \bar{\mathbf{T}}_1) = (\bar{x}_{Kl_2}, \bar{h}_u, \bar{x}_{Kl_1}),$$

où $\bar{h}_u$ est la p-réduction correspondant à la p-obligation déterminée par $(\bar{\mathbf{T}}_2, \bar{u}, \bar{s}, \bar{\mathbf{T}}_1)$; on vérifie aisément que $\bar{h}_u$ est déterminée par la flèche $h_u = [p_1^1, k.[u.p_1^1, p_2^1]]$, où les exposants indiquent les triples auxquels sont attachés les morphismes.

On définit aussi un foncteur

$\Theta'_p = (\mathcal{T}_{(C^\cdot, s)}, \underline{\Theta}'_p, \mathcal{C}^{\triangle}_{(C^\cdot, s)})$ par $\underline{\Theta}'_p(\bar{r}_2, \bar{h}'', \bar{r}_1) = (\overline{\mathbf{T}}_{r_2}, \bar{u}_{h''}, \bar{s}, \overline{\mathbf{T}}_{r_1})$, où $\overline{\mathbf{T}}_{r_1}$ et $\overline{\mathbf{T}}_{r_2}$ sont les p-triples de cointensité de $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$ et $(\overline{\mathbf{T}}_{r_2}, \bar{u}_{h''}, \bar{s}, \overline{\mathbf{T}}_{r_1})$ est le morphisme correspondant à la p-obligation déterminée par la p-réduction $\bar{h}''.\bar{h}_{r_1}$ (cf. remarque proposition 8). On vérifie aisément que, si $\bar{j}_1$ et $\bar{j}_2$ sont les éjecteurs correspondant aux p-coexpansions, $\bar{u}_{h''}$ est l'unique transformation naturelle p-structurée vérifiant

$$\bar{j}_2 \boxminus \bar{r}_2 . \bar{u}_{h''} = \bar{h}'' . \bar{j}_1 .$$

PROPOSITION 10. *Θ'_p admet Θ_p pour adjoint.*

PREUVE immédiate à partir de la proposition 6 et de la fidèlité de p.

II. Sur la catégorie des morphismes d'algèbres.

Soit $\mathbf{T} = (\tau, \lambda, \mu)$ un triple sur $C^\cdot$. On rappelle qu'une $\mathbf{T}$-*algèbre* est un couple (e, b) d'éléments de $C^\cdot$, où $b \in e.C^\cdot.\tau(e)$ vérifie

$$b.\lambda(e) = e \quad \text{et} \quad b.\mu(e) = b.\tau(b).$$

On définit :

- les morphismes de $\mathbf{T}$-algèbres par des triplets $((e', b'), f, (e, b))$, où (e', b') et (e, b) sont des $\mathbf{T}$-algèbres, $\alpha(f) = e$, $\beta(f) = e'$ et $f.b = b'.\tau(f)$,

- la catégorie $A^{\mathbf{T}^\cdot}$ des morphismes de $\mathbf{T}$-algèbres avec la loi

$$((e'_1, b'_1), f_1, (e_1, b_1)).((e', b'), f, (e, b)) = ((e'_1, b'_1), f_1.f, (e_1, b))$$

si et seulement si $(e_1, b_1) = (e', b')$.

LEMME 1. *Si $\mathbf{T}$ est un triple sur $C^\cdot$ et si b et b' sont deux morphismes de $C^\cdot$ vérifiant :*

$$b.\lambda(e) = e, \quad b'.\lambda(e') = e' \quad \text{et} \quad b.\mu(e) = b'.\tau(b'),$$

alors $b = b'$ et (e, b) est une $\mathbf{T}$-algèbre.

PREUVE. On obtient successivement :

$$e = \beta(b.\lambda(e)) = \beta(b.\mu(e)) = \beta(b'.\tau(b')) = \beta(b'.\lambda(e')) = e'$$

et

$$b = b.\mu(e).\tau(\lambda(e)) = b'.\tau(b').\tau(\lambda(e)) = b'.\tau(b'.\lambda(e)) = b'. \blacktriangledown$$

LEMME 2. *Soient* (e, b) *et* (e', b') *deux* $\mathbf{T}$*-algèbres et* f *et* f' *deux morphismes de* $C^{\cdot}$ *tels que*

$$\alpha(f) = \alpha(f') = e, \quad \beta(f) = \beta(f') = e' \quad et \quad f.b = b'.\tau(f');$$

alors $f = f'$ *et* f *détermine un morphisme de* $\mathbf{T}$*-algèbres.*

PREUVE. $f.b = b'.\tau(f')$, entraîne $f.b.\lambda(e) = b'.\tau(f').\lambda(e)$; or

$$\tau(f').\lambda(e) = \lambda(e').f' \text{ d'après la naturalité de } \lambda;$$

d'où

$$f = f.b.\lambda(e) = b'.\lambda(e').f' = f'$$

et donc $f.b = b'.\tau(f)$. ▼

Soit $\bar{\mathbf{T}} = (\bar{t}, \bar{l}, \bar{m})$ un triple p-structuré sur une catégorie structurée $(C^{\cdot}, s)$.

PROPOSITION 1. *Si* $\bar{\mathbf{T}}$ *est un triple p-structuré et* $\mathbf{T}$ *le triple sous-jacent, on peut déterminer canoniquement une structuration de la catégorie des morphismes de* $\mathbf{T}$*-algèbres* $A^{\mathbf{T}\cdot}$ *ainsi que du couple d'adjoints* $(Y_{A^{\mathbf{T}}}, X_{A^{\mathbf{T}}})$ *associé à cette catégorie.*

PREUVE. On considère d'abord l'ensemble S_1 des couples (e, b) de $C^{\cdot}$ tels que $\tau(e) = \alpha(b)$, qu'on structure par $s_1 = t_0 \vee a_0$, déterminé au moyen du produit fibré canonique $((t_0, p'_1), (a_0, p'_2))$.

Les égalités $\tau(e) = \beta(\lambda(e))$ et $\tau(e) = \beta(\mu(e))$ pour tout $e \in C_0^{\cdot}$ entraînent les égalités $t_0 = b_0 . l$ et $t_0 = b_0 . m$, d'où

$$a_0 . p'_2 = t_0 . p'_1 = b_0 . l . p'_1 \quad et \quad a_0 . p'_2 = t_0 . p'_1 = b_0 . m . p'_1;$$

par suite il existe des crochets et donc les flèches suivantes:

$$k . [p'_2, l . p'_1] \in s . H^{\cdot} . s_1 \quad et \quad k . [p'_2, m . p'_1] \in s . H^{\cdot} . s_1$$

qui structurent les applications qui à $(e, b) \in S_1$ font correspondre respectivement $b . \lambda(e)$ et $b . \mu(e)$.

Soit S_2 l'ensemble des $(e', (e, b))$ tels que $e' \in C_0^{\cdot}$, $(e, b) \in S_1$ et $b . \lambda(e) = e'$. On vérifie alors que $e' = e$ et que S_2 est isomorphe à l'ensemble des (e, b) tels que $b . \lambda(e) = e$. On structure S_2 par

$$s_2 = i \vee k . [p'_2, l . p'_1]$$

au moyen du produit fibré canonique $((i, p''_1), (k.\,[p'_2, l p'_1], p''_2))$. On vérifie alors les différentes égalités suivantes :

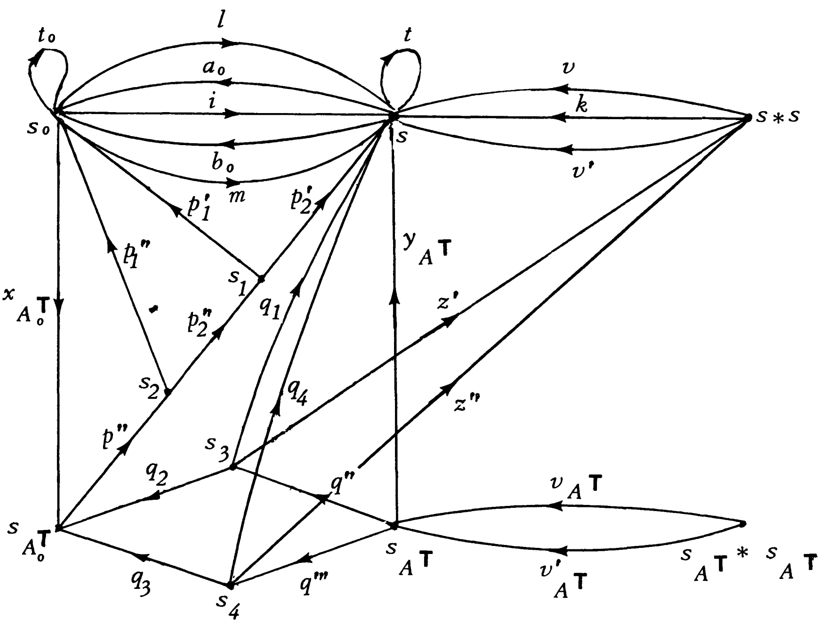
$$(1)\qquad a_0 . k .\,[p'_2, l p'_1] = a_0 . l . p'_1 = p'_1 ,$$

car $a_0 . k = a_0 . v'$ et $a_0 . l = s_0$ nous est donné par $\alpha(\lambda(e)) = e$ pour tout $e \in C_0$; d'où $p'_1 . p''_2 = p''_1$.

$$(2)\qquad b_0 . p'_2 . p''_2 = b_0 . k .\,[p'_2, l . p'_1] . p''_2 = b_0 . i . p''_1 = p''_1 .$$

$$(3)\qquad a_0 . p'_2 . p''_2 = t_0 . p'_1 . p''_2 = t_0 . p''_1 = t_0 . b_0 . p'_2 . p''_2 = b_0 . t . p'_2 . p''_2 .$$

Il s'ensuit alors l'existence d'une flèche $k .\,[p'_2 . p''_2, t . p'_2 . p''_2]$ correspondant à l'application qui envoie (e, b) sur $b . \tau(b)$.



On pose

$$s_{A_0 T} = k .\,[p'_2, m . p'_1] . p''_2 \vee k .\,[p'_2 . p''_2, t . p'_2 . p''_2] ,$$

au moyen du produit fibré canonique

$$((k .\,[p'_2, m . p'_1] . p''_2, p'''_1), (k .\,[p'_2 . p''_2, t . p'_2 . p''_2], p'''_2)).$$

L'ensemble sous-jacent à $s_{A_o^{\mathsf{T}}}$ est isomorphe à l'ensemble des $((e', b'), (e, b))$ tels que $b.\lambda(e) = e$, $b'.\lambda(e') = e'$, $b'.\mu(e') = b.\tau(b)$, lequel d'après le lemme 1 est isomorphe à $A_o^{\mathsf{T}\cdot}$. D'après ce même lemme on obtient $p_1''' = p_2'''(= p'')$, car cette égalité est vérifiée en projection dans $\mathfrak{M}$ et p est fidèle.

D'autre part $\tau^2(e) = \alpha(\mu(e))$ nous donne $t_o^2 = a_o . m$, d'où la flèche $[t_o, m] \in s_1 . H' . s_o$. De plus, de $\mu(e).\lambda(\tau(e)) = \tau(e)$ on déduit

$$i.t_o = k.[m, l.t_o] = k.[p_2', l.p_1'].[t_o, m],$$

d'où le crochet $[t_o, [t_o, m]] \in s_2 . H' . s_o$. Enfin,

$$\begin{aligned} k.[p_2', m.p_1'].p_2''.[t_o, [t_o, m]] &= k.[p_2', m.p_1'].[t_o, m] \\ &= k.[m, m.t_o] \end{aligned}$$

et

$$k.[p_2', p_2'', t.p_2'.p_2''].[t_o, [t_o, m]] = k.[m, t.m]$$

sont égaux, car $k.[m, m.t_o] = k.[m, t.m]$ nous est donné par

$$\mu(e).\mu(\tau(e)) = \mu(e).t(\mu(e))$$

pour tout $e \in C_o'$. On en déduit la flèche

$$x_{A_o^{\mathsf{T}}} = [[t_o, [t_o, m]], [t_o, [t_o, m]]] \in s_{A_o^{\mathsf{T}}} . H' . s_o .$$

On considère ensuite $s_3 = a_o \vee p_1''.p''$, grâce au produit fibré canonique $((a_o, q_1), (p_1''.p'', q_2))$. L'ensemble sous-jacent à s_3 est isomorphe à l'ensemble (noté S_3) des $(f, (e, b))$ tels que

$$f \in C', \ (e, b) \in A_o^{\mathsf{T}} \text{ et } \alpha(f) = e.$$

On vérifie

$$a_o . q_1 = p_1''.p''.q_2 = b_o.p_2'.p_2''.p''.q_2$$

(d'après (2)), d'où l'existence d'un crochet

$$k.[q_1, p_2'.p_2''.p''.q_2] \in s.H'.s_3$$

correspondant à l'application qui envoie $(f, (e, b))$ sur $f.b$. Les égalités

$$a_o.k.[q_1, p_2'.p_2''.p''.q_2] = a_o.p_2'.p_2''.p''.q_2$$

$$= t_0 \cdot p'_1 \cdot p''_2 \cdot p'' \cdot q_2 = b_0 \cdot l \cdot p''_1 \cdot p'' \cdot q_2$$

assurent l'existence d'un crochet

$$z' = [\, k \cdot [\, q_1, p'_2 \cdot p''_2 \cdot p'' \cdot q_2 \,] \,,\, l \cdot p''_1 \cdot p'' \cdot q_2 \,] \in s * s \cdot H^{\cdot} \cdot s_3,$$

correspondant à l'application qui envoie $(f,(e,b))$ sur $(f \cdot b, \lambda(e))$.

On pose enfin $s_4 = p''_1 \cdot p'' \vee b_0$ grâce au produit fibré canonique $((p''_1 \cdot p'', q_3),(b_0, q_4))$. L'ensemble sous-jacent à s_4 est isomorphe à l'ensemble (noté S_4) des $((e',b'),f')$ tels que $(e',b') \in A_0^{\mathbf{T}}$, $f' \in C^{\cdot}$ et $e' = \beta(f')$. On vérifie

$$a_0 \cdot p'_2 \cdot p''_2 \cdot p'' \cdot q_3 = t_0 \cdot p'_1 \cdot p''_2 \cdot p'' \cdot q_3 = t_0 \cdot p''_1 \cdot p'' \cdot q_3$$
$$= t_0 \cdot b_0 \cdot q_4 = b_0 \cdot t \cdot q_4,$$

de sorte qu'il existe une flèche $k \cdot [\, p'_2 \cdot p''_2 \cdot p'' \cdot q_3, t \cdot q_4 \,] \in s \cdot H^{\cdot} \cdot s_4$ correspondant à l'application qui envoie $((e',b'),f')$ sur $b' \cdot \tau(f')$; puis on a

$$a_0 \cdot k \cdot [\, p'_2 \cdot p''_2 \cdot p'' \cdot q_3, t \cdot q_4 \,] = a_0 \cdot t \cdot q_4 = t_0 \cdot a_0 \cdot q_4$$
$$= b_0 \cdot l \cdot a_0 \cdot q_4,$$

d'où la flèche

$$z'' = [\, k \cdot [\, p'_2 \cdot p''_2 \cdot p'' \cdot q_3, t \cdot q_4 \,] \,,\, l \cdot a_0 \cdot q_4 \,] \in s * s \cdot H^{\cdot} \cdot s_4$$

correspondant à l'application qui envoie $((e',b'),f')$ sur $(b' \cdot \tau(f'), \lambda(\alpha(f')))$.

Soit alors $s_{A^{\mathbf{T}}} = z'' \vee z'$ au moyen du produit fibré canonique $((z'', q'''),(z', q''))$. L'ensemble sous-jacent à $s_{A^{\mathbf{T}}}$ est isomorphe à l'ensemble des $((e',b'),f',f,(e,b))$ tels que

$$((e',b'),f') \in S_4, \quad (f,(e,b)) \in S_3$$

$$\text{et } (b' \cdot \tau(f'), \lambda(\alpha(f'))) = (f \cdot b, \lambda(e))$$

(ce qui entraîne en particulier

$$\alpha(f) = e = \alpha(\lambda(e)) = \alpha(\lambda(\alpha(f'))) = \alpha(f')$$

et

$$\beta(f) = \beta(f \cdot b) = \beta(b' \cdot \tau(f')) = \beta(b') = e' = \beta(f')\,).$$

Cet ensemble est lui-même isomorphe à A^{T} d'après le lemme 2. On remarque l'égalité $q_4 \cdot q''' = q_1 \cdot q''$ $(= y_{A^{\mathsf{T}}})$, qui nous est donnée en projection dans $\mathfrak{M}$.

On structurera les applications source et but (il s'agit en fait ici d'applications isomorphes aux applications source et but) par $a_{A^{\mathsf{T}}} = q_2 \cdot q''$ et $b_{A^{\mathsf{T}}} = q_3 \cdot q'''$ On pose $s_{A^{\mathsf{T}}} * s_{A^{\mathsf{T}}} = a_{A^{\mathsf{T}}} \vee b_{A^{\mathsf{T}}}$ au moyen du produit fibré canonique $((a_{A^{\mathsf{T}}}, v_{A^{\mathsf{T}}}), (b_{A^{\mathsf{T}}}, v'_{A^{\mathsf{T}}}))$.

On vérifie

$$a_0 \cdot y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v_{A^{\mathsf{T}}} = a_0 \cdot q_1 \cdot q'' \cdot v_{A^{\mathsf{T}}} = p''_1 \cdot p'' \cdot q_2 \cdot q'' \cdot v_{A^{\mathsf{T}}}$$

$$= p''_1 \cdot p'' \cdot a_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v_{A^{\mathsf{T}}} = p''_1 \cdot p'' \cdot b_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}} = p''_1 \cdot p'' \cdot q_3 \cdot q''' \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}}$$

$$= b_0 \cdot q_4 \cdot q''' \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}} = b_0 \cdot y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}} \cdot$$

Par suite il existe un crochet

$$k . [y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v_{A^{\mathsf{T}}}, y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}}] \in s . H^{\cdot} . s_{A^{\mathsf{T}}} * s_{A^{\mathsf{T}}}$$

correspondant à l'application qui envoie $\mathfrak{f} = (((e'', b''), f'', (e', b')), ((e', b'), f, (e, b)))$ sur $f'' \cdot f$. Puisque

$$a_0 . k . [y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v_{A^{\mathsf{T}}}, y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}}] = a_0 \cdot y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}}$$

$$= a_0 \cdot q_1 \cdot q'' \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}} = p''_1 \cdot p'' \cdot q_2 \cdot q'' \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}} = p''_1 \cdot p'' \cdot a_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}},$$

il existe un crochet

$$z_1 = [k . [y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v_{A^{\mathsf{T}}}, y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}}], a_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}}] \in s_3 . H^{\cdot} . s_{A^{\mathsf{T}}} * s_{A^{\mathsf{T}}}$$

correspondant à l'application qui envoie $\mathfrak{f}$ sur $(f'' \cdot f, (e, b))$. On constate enfin

$$p''_1 \cdot p'' \cdot b_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v_{A^{\mathsf{T}}} = p''_1 \cdot p'' \cdot q_3 \cdot q''' \cdot v_{A^{\mathsf{T}}} = b_0 \cdot q_4 \cdot q''' \cdot v_{A^{\mathsf{T}}}$$

$$= b_0 \cdot y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v_{A^{\mathsf{T}}} = b_0 . k . [y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v_{A^{\mathsf{T}}}, y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}}],$$

de sorte qu'il existe un crochet

$$z_2 = [b_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v_{A^{\mathsf{T}}}, k [y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v_{A^{\mathsf{T}}}, y_{A^{\mathsf{T}}} \cdot v'_{A^{\mathsf{T}}}]] \in s_4 . H^{\cdot} . s_{A^{\mathsf{T}}} * s_{A^{\mathsf{T}}}$$

correspondant à l'application qui envoie $\mathfrak{f}$ sur $((e'', b''), f'' \cdot f)$.

On vérifie alors $z''\cdot z_2 = z'\cdot z_1$ en projection dans $\mathfrak{M}$. D'où le crochet $k_{A^{\mathbf{T}}} = [z_2, z_1] \in s_{A^{\mathbf{T}}}\cdot H^{\cdot}\cdot s_{A^{\mathbf{T}}} * s_{A^{\mathbf{T}}}$, qui structure la loi de composition de la catégorie $A^{\mathbf{T}\cdot}$.

On reconnait dans $y_{A^{\mathbf{T}}}$ une flèche qui permet de structurer le foncteur d'oubli $Y_{A^{\mathbf{T}}}$ de $A^{\mathbf{T}\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ qui envoie $((e', b'), f, (e, b))$ sur f. De plus, comme

$$a_0\cdot t = t_0\cdot a_0 = p_1''\cdot [t_0, [t_0, m]]\cdot a_0 = p_1''\cdot p''\cdot x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot a_0,$$

il existe un crochet $[t, x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot a_0] \in s_3\cdot H^{\cdot}\cdot s$ correspondant à l'application qui envoie $f \in C$ sur $(\tau(f), (\tau(\alpha(f)), \mu(\alpha(f)))) \in S_3$. Enfin, on a

$$p_1''\cdot p''\cdot x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot b_0 = t_0\cdot b_0 = b_0\cdot t;$$

on en déduit le crochet $[x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot b_0, t] \in s_4\cdot H^{\cdot}\cdot s$. Il reste à vérifier les égalités

$$\begin{aligned} z''\cdot [x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot b_0, t] &= [k\cdot [p_2'\cdot p_2''\cdot p''\cdot x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot b_0, t^2], l\cdot a_0\cdot t] \\ &= [k\cdot [m\cdot b_0, t^2], l\cdot a_0\cdot t], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'\cdot [t, x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot a_0] &= [k\cdot [t, p_2'\cdot p_2''\cdot p''\cdot x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot a_0], l\cdot p_1''\cdot p''\cdot x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot a_0] \\ &= [k\cdot [t, m\cdot a_0], l\cdot t_0\cdot a_0]. \end{aligned}$$

Or $l\cdot t_0\cdot a_0 = l\cdot a_0\cdot t$ est évident et $k\cdot [m\cdot b_0, t^2] = k\cdot [t, m\cdot a_0]$ nous est donné par le fait que, μ étant une transformation naturelle de τ^2 vers τ, on a $\mu(\beta(f))\cdot \tau^2(f) = \tau(f)\cdot \mu(\alpha(f))$.

On peut par conséquent poser

$$x_{A^{\mathbf{T}}} = [[x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot b_0, t], [t, x_{A_0^{\mathbf{T}}}\cdot a_0]],$$

ce qui permet de structurer le foncteur $X_{A^{\mathbf{T}}}$ de $C^{\cdot}$ vers $A^{\mathbf{T}\cdot}$ qui envoie f sur $((\tau(\beta(f)), \mu(\beta(f))), \tau(f), (\tau(\alpha(f)), \mu(\alpha(f))))$.

On notera désormais par abus $A^{\mathbf{T}\cdot}$ la catégorie sous-jacente à $s_{A^{\mathbf{T}}}$. ▼

Soient $\mathbf{T} = (\tau, \lambda, \mu)$ et $\mathbf{T}' = (\tau', \lambda', \mu')$ deux triples sur $C^{\cdot}$ et $C'^{\cdot}$ respectivement. On désignera par *second morphisme de triples* un quadruplet $(\mathbf{T}', \phi, \gamma, \mathbf{T})$ où $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont des triples, où ϕ définit un un foncteur $\phi = (C'^{\cdot}, \underline{\phi}, C^{\cdot})$ et γ une transformation naturelle $\gamma = (\phi . \tau, \underline{\gamma}, \tau' . \phi)$ vérifiant :

1) $\gamma \square\square \lambda' . \phi = \phi . \lambda$,

2) $\gamma \square\square \mu' . \phi = \phi . \mu \square\square \gamma . \tau \square\square \tau' . \gamma$.

On rappelle qu'un tel morphisme de triples détermine un foncteur Φ entre la catégorie $A^{\mathbf{T}\cdot}$ et la catégorie $A^{\mathbf{T}'\cdot}$ défini de la manière suivante : à $((e', b'), f, (e, b))$ on fait correspondre

$$((\phi(e'), \phi(b') . \gamma(e')), \phi(f), (\phi(e), \phi(b) . \gamma(e))).$$

Soient $\overline{\mathbf{T}} = (\bar{t}, \bar{l}, \bar{m})$ et $\overline{\mathbf{T}}' = (\bar{t}', \bar{l}', \bar{m}')$ deux triples structurés sur $(C^{\cdot}, s)$ et $(C'^{\cdot}, s')$ respectivement, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ les triples sous-jacents.

DEFINITION 1. On appellera *second morphisme de triples p-structurés* un quadruplet $(\overline{\mathbf{T}}', \bar{h}, \bar{g}, \overline{\mathbf{T}})$, où $\overline{\mathbf{T}}$ et $\overline{\mathbf{T}}'$ sont deux triples p-structurés, $\bar{h} = ((C'^{\cdot}, s'), h, (C^{\cdot}, s))$ un foncteur p-structuré et $\bar{g} = (\bar{h} . \bar{t}, g, \bar{t}' . \bar{h})$ une transformation naturelle p-structurée, tels que $(\mathbf{T}', p(h), p(g), \mathbf{T})$ définisse un second morphisme de triples; on pose $p(h) = \underline{\phi}$ et $p(g) = \underline{\gamma}$.

PROPOSITION 2. *Si* $(\overline{\mathbf{T}}', \bar{h}, \bar{g}, \overline{\mathbf{T}})$ *est un second morphisme de triples p-structurés, alors le foncteur* Φ, *déterminé à partir de* $(\mathbf{T}', \phi, \gamma, \mathbf{T})$, *peut être canoniquement structuré.*

PREUVE. Nous nous bornerons à esquisser le début de la démonstration, qui est du même type que celle de la construction de $x_{A^{\mathbf{T}}}$. On indicera d'un prime (') les notions relatives à $(C'^{\cdot}, s')$. On vérifie

$$a'_0 . h . p'_2 . p''_2 . p'' = h_0 . a_0 . p'_2 . p''_2 . p'' = h_0 . t_0 . p''_1 . p''$$
$$= b'_0 . g . p''_1 . p'' ;$$

il en résulte un crochet, d'où la flèche

$$k' . [h . p'_2 . p''_2 . p'', g . p''_1 . p''] \in s' . H^{\cdot} . s_{A_0^{\mathbf{T}}},$$

correspondant à l'application qui envoie $(e, b) \in A_0^{\mathbf{T}\cdot}$ sur $\phi(b) . \gamma(e)$. Comme $\tau'(\phi(e)) = \alpha(\gamma(e))$ entraîne $t' . h_0 = a'_0 . g$, on obtient

$$t'_0 . h_0 . p''_1 . p'' = a'_0 . g . p''_1 . p'' = a'_0 . k' . [h . p'_2 . p''_2 . p'', g . p''_1 . p''],$$

de sorte qu'il existe un crochet

$$h_1 = [\, h_0 \cdot p_1'' \cdot p'', k' \cdot [\, h \cdot p_2' \cdot p_2'' \cdot p'', g \cdot p_1'' \cdot p'' \,]\,] \in s_1' \cdot H^{\cdot} \cdot s_{A_0^{\mathbf{T}}} .$$

Ceci nous permettra de construire

$$\mathbf{h}_0 \in s'_{A_0^{\mathbf{T}'}} \cdot H^{\cdot} \cdot s_{A_0^{\mathbf{T}}} \quad \text{puis} \quad \mathbf{h} \in s'_{A^{\mathbf{T}'}} \cdot H^{\cdot} \cdot s_{A^{\mathbf{T}}} ,$$

et enfin de structurer Φ. ▼

REMARQUE. On vérifie facilement $Y'_{A^{\mathbf{T}'}} \cdot \Phi = \phi \cdot Y_{A^{\mathbf{T}}}$. De plus il existe une transformation naturelle de $X'_{A^{\mathbf{T}'}} \cdot \phi$ vers $\Phi \cdot X_{A^{\mathbf{T}}}$, définie par l'application qui envoie tout $e \in C_0$ sur

$$((\phi(\tau(e)), \phi(\mu(e)) \cdot \gamma(\tau(e))), \gamma(e), (\tau'(\phi(e)), \mu'(\phi(e)))) .$$

On démontrerait sous les conditions de la proposition 2 que cette transformation naturelle peut être canoniquement p-structurée.

p-relèvements et p-actions.

Soit $\bar{\mathbf{T}}$ un triple structuré $(\bar{t}, \bar{l}, \bar{m})$ sur $(C^{\cdot}, s)$, dont le triple sous-jacent est noté $\mathbf{T}$, et $\bar{q} = ((C^{\cdot}, s), q, (C'^{\cdot}, s'))$ un foncteur structuré. Nous reprenons les notations précédentes.

DEFINITION 2. On appelle *p-relèvement de* $\bar{q}$ *par* $\bar{\mathbf{T}}$ un foncteur p-structuré $\bar{q}' = ((A^{\mathbf{T}\cdot}, s_{A^{\mathbf{T}}}), q', (C'^{\cdot}, s'))$ tel que $\bar{y}_{A^{\mathbf{T}}} \cdot \bar{q}' = \bar{q}$.

DEFINITION 3. On appellera *p-action de* $\bar{\mathbf{T}}$ *sur* $\bar{q}$ une transformation naturelle structurée $\bar{n} = (\bar{q}, n, \bar{t} \cdot \bar{q})$ vérifiant :

$$\bar{n} \,\square\, \bar{l} \cdot \bar{q} = id_{\bar{q}} \quad (1) \quad \text{et} \quad \bar{n} \,\square\, \bar{m} \cdot \bar{q} = \bar{n} \,\square\, \bar{t} \cdot \bar{n} \quad (2) .$$

PROPOSITION 3. *L'ensemble des p-relèvements de* $\bar{q}$ *par* $\bar{\mathbf{T}}$ *est en bijection avec l'ensemble des p-actions de* $\bar{\mathbf{T}}$ *sur* $\bar{q}$. *(Ce résultat est une spécialisation des résultats de* [3].*)*

PREUVE. Soit $\bar{q}'$ un p-relèvement de $\bar{q}$ par $\bar{\mathbf{T}}$. On définira $\bar{n}$ à partir de la flèche $n = p_2' \cdot p_2'' \cdot p'' \cdot q_0' \in s \cdot H \cdot s_0'$. En effet, on a naturellement

$$v \cdot z'' \cdot q''' \cdot q' = v \cdot z' \cdot q'' \cdot q' ;$$

il en résulte

$$k.[p'_2.p''_2.p''.q_3, t.q_4].q'''.q' = k.[q_1, p'_2.p''_2.p''.q_2].q''.q',$$

ou encore

$$k.[p'_2.p''_2.p''.q_3.q'''.q', t.q_4.q'''.q'] =$$
$$k.[q_1.q''.q', p'_2.p''_2.p''.q_2.q''.q'];$$

par suite

$$k.[p'_2.p''_2.p''.b_{A\mathbf{T}}.q', t.y_{A\mathbf{T}}.q'] =$$
$$k.[y_{A\mathbf{T}}.q', p'_2.p''_2.p''.a_{A\mathbf{T}}.q'];$$

d'où $k.[n.b'_o, t.q] = k.[q, n.a'_o]$, de sorte que n détermine une transformation naturelle structurée. De plus l'égalité

$$i.p''_1.p''.q'_o = k.[p'_2, l.p'_1].p''_2.p''.q'_o$$

entraîne $i.q_o = k[n, l.q_o]$ (car $y_{A_o\mathbf{T}} = p''_1.p''$), et

$$k.[p'_2, m.p'_1].p''_2.p''.q'_o = k.[p'_2.p''_2, t.p'_2.p''_2].p''.q'_o$$

nous donne $k.[n, m.q_o] = k.[n, t.n]$. Par conséquent n détermine bien une p-action de $\bar{\bar{\mathbf{T}}}$ sur $\bar{q}$.

Si inversement $\bar{n}$ est une p-action de $\bar{\bar{\mathbf{T}}}$ sur $\bar{q}$, on constate que $t_o.q_o = a_o.n$, car n détermine une transformation naturelle structurée de source $\bar{t}.\bar{q}$. D'où un crochet $[q_o, n] \in s_1.H'.s'_o$ relativement au produit fibré de (t_o, a_o). Puis l'égalité (1) nous donne

$$i.q_o = k.[n, l.q_o],$$

soit encore

$$i.q_o = k.[p'_2, l.p'_1].[q_o, n],$$

d'où la flèche $[q_o, [q_o, n]] \in s_2.H'.s'_o$. Enfin

$$k.[p'_2, m.p'_1].p''_2.[q_o, [q_o, n]] = k.[n, m.q_o]$$

$= k.[n, t.n]$ (d'après (2)) $= k.[p'_2.p''_2, t.p'_2.p''_2].[q_o, [q_o, n]]$.

Donc il existe, relativement au produit fibré définissant $s_{A_o\mathbf{T}}$,

$$q'_o = [[q_o, [q_o, n]], [q_o, [q_o, n]]] \in s_{A_o\mathbf{T}}.H'.s'_o.$$

Comme $a_o.q = q_o.a'_o = p''_1.p''.q'_o.a'_o$, il existe $[q, q'_o.a'_o]$; on a

$$p_1''\cdot p''\cdot q_0'\cdot b_0' = q_0\cdot b_0' = b_0\cdot q,$$

d'où l'autre crochet $[\,q_0'\cdot b_0',\, q\,]$. Enfin

$$z''.\ [\,q_0'\cdot b_0',\, q\,] = [\,k.\ [\,p_2'\cdot p_2''\cdot p''\cdot q_0'\cdot b_0',\, t\cdot q\,],\, l.\, a_0\cdot q\,]$$

$$= [\,k.\ [\,n.\, b_0',\, t\cdot q\,],\, l.\, q_0\cdot a_0'\,] = [\,k.\ [\,q,\, n.\, a_0'\,],\, l.\, p_1''\cdot p''\cdot q_0'\cdot a_0'\,]$$

(car $\bar{n}$ est une transformation naturelle entre $\bar{t}\cdot\bar{q}$ et $\bar{q}$)

$$= [\,k.\ [\,q_1,\, p_2'\cdot p_2''\cdot p''\cdot q_2\,],\, l.\, p_1''\cdot p''\cdot q_2\,]\ .\ [\,q,\, q_0'\cdot a_0'\,]$$

$$= z'.\ [\,q,\, q_0'\cdot a_0'\,],$$

de sorte qu'il existe un crochet

$$q' = [\,[\,q_0'\cdot b_0',\, q\,],\, [\,q,\, q_0'\cdot a_0'\,]\,] \in s_{A\mathbf{T}}\cdot H^{\cdot}\cdot s'.$$

On vérifie bien $y_{A\mathbf{T}}\cdot q' = q$.

De plus ces deux correspondances sont inverses : en partant de n, on retrouve $p_2'\cdot p_2''\cdot p''\cdot q_0' = n$; en partant de q', on constate que $[\,q_0,$ $[\,q_0,\, p_2'\cdot p_2''\cdot p''\cdot q_0'\,]\,]$ est égal à $p''\cdot q_0'$ (car leurs projections dans $\mathfrak{M}$ sont égales), ce qui est suffisant. ▼

Le foncteur p-structuré $\bar{q}$ détermine un foncteur de $\mathfrak{N}((C''^{\cdot}, s''),$ $(C^{\cdot}, s))^{\boxplus}$ vers $\mathfrak{N}((C''^{\cdot}, s''), (C'^{\cdot}, s'))^{\boxplus}$ pour toute catégorie structurée $(C''^{\cdot}, s'')$, foncteur noté $\mathfrak{N}((C''^{\cdot}, s''), \bar{q})$, qui associe $\bar{g}\cdot\bar{q}$ à $\bar{g}$.

DEFINITION 4. On appellera *p-coextension de $\bar{g}'$ par $\bar{q}$* une $\mathfrak{N}((C''^{\cdot}, s''), \bar{q})$-structure colibre de $\bar{g}'$.

PROPOSITION 4. *Si $\bar{q}$ admet une p-coextension par lui-même, il détermine un triple structuré $\overline{\mathbf{T}}$, appelé p-triple de codensité de $\bar{q}$.*

PREUVE. La démonstration est la même que celle du cas général [3] c'est-à-dire du type de celle de la proposition I-4. Si on note $\bar{j}$ l'éjecteur associé à $\bar{q}$, on constate que $\bar{j}$ est en fait une p-action de $\overline{\mathbf{T}}$ sur $\bar{q}$. On notera $\bar{h}_q$ le p-relèvement de $\bar{q}$ associé. ▼

Soit $\overline{\mathbf{T}}'$ un second triple structuré sur $(C^{\cdot}, s)$.

PROPOSITION 5. *Il existe une bijection entre les p-actions de $\overline{\mathbf{T}}'$ sur $\bar{q}$ et les seconds morphismes de triples structurés du p-triple de codensité $\overline{\mathbf{T}}$ de $\bar{q}$ vers $\overline{\mathbf{T}}'$ dont la seconde projection est $\bar{s}$*

PREUVE. Le raisonnement est du même type que celui de la proposition I-5. Si $\bar{u}$ est la transformation naturelle structurée qui détermine le morphisme de triples, on lui fait correspondre la p-action $\bar{j} \square \bar{u} \cdot \bar{q}$, où $\bar{j}$ est l'éjecteur associé à $\bar{q}$. Inversement si $\bar{j}'$ est une p-action, on lui fait correspondre l'unique transformation naturelle $\bar{u}'$ telle que

$$\bar{j} \square \bar{u}' \cdot \bar{q} = \bar{j}'$$

qui détermine un morphisme de triples. ▼

Soit $\mathcal{C}^{\nabla}_{(C^{\cdot}, s)}$ la sous-catégorie pleine des triangles au-dessus de $(C^{\cdot}, s)$, ayant pour objets les foncteurs structurés qui admettent une p-coextension par eux-mêmes. D'autre part on constate que $\mathcal{T}^{*}_{(C^{\cdot}, s)}$ est la sous-catégorie des seconds morphismes de triples structurés ayant pour seconde projection $\bar{s}$.

On peut alors définir un foncteur $\Psi_p = (\mathcal{C}^{\nabla}_{(C^{\cdot}, s)}, \underline{\Psi}_p, \mathcal{T}^{*}_{(C^{\cdot}, s)})$ par

$$\underline{\Psi}_p(\bar{\mathbf{T}}_2, \bar{s}, \bar{u}, \bar{\mathbf{T}}_1) = (\bar{y}_{A\mathbf{T}_2}, \bar{h}_u, \bar{y}_{A\mathbf{T}_1}),$$

où $\bar{h}_u$ est le p-relèvement correspondant à la p-action déterminée par le morphisme $(\bar{\mathbf{T}}_2, \bar{s}, \bar{u}, \bar{\mathbf{T}}_1)$, et un foncteur $\Psi'_p = (\mathcal{T}^{*}_{(C^{\cdot}, s)}, \underline{\Psi}'_p, \mathcal{C}^{\nabla}_{(C^{\cdot}, s)})$ par

$$\underline{\Psi}'_p(\bar{q}_2, \bar{h}'', \bar{q}_1) = (\bar{\mathbf{T}}_{q_2}, \bar{s}, \bar{u}_{h''}, \bar{\mathbf{T}}_{q_1}),$$

où $\bar{\mathbf{T}}_{q_1}$ et $\bar{\mathbf{T}}_{q_2}$ sont les p-triples de codensité de $\bar{q}_1$ et $\bar{q}_2$ et $(\bar{\mathbf{T}}_{q_2}, \bar{s}, \bar{u}_{h''}, \bar{\mathbf{T}}_{q_1})$ le morphisme correspondant à la p-action déterminée par le p-relèvement $\bar{h}_{q_2} \cdot \bar{h}''$.

PROPOSITION 6. *Ψ_p admet Ψ'_p pour adjoint.*

PREUVE. Analogue à celle du cas général. ▼

III. p-adjoints.

On rappelle qu'un foncteur Q de $C'^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ admet un adjoint s'il existe une application R_0 de $C^{\cdot}_0$ vers $C'^{\cdot}_0$ et une application λ de de $C^{\cdot}_0$ vers C telle que $\alpha(\lambda(e)) = e$ et $\beta(\lambda(e)) = Q(R_0(e))$ pour tout $e \in C^{\cdot}_0$, admettant la propriété suivante : pour tout couple (e', f) tel que $Q(e') = \beta(f)$, il existe un unique morphisme $f' \in e'.C'.R_0(\alpha(f))$ tel que $Q(f').\lambda(\alpha(f)) = f$. On peut exprimer cette propriété en disant que l'application ζ du produit fibré $\alpha_{C'} \vee R_0$ vers $Q_0 \vee \beta_C$ qui au couple (f', e) fait correspondre le couple $(\beta(f'), Q(f') \cdot \lambda(e))$ est inversible.

Soit $\bar{q} = ((C^{\cdot}, s), q, (C'^{\cdot}, s'))$ un foncteur p-structuré et Q le foncteur sous-jacent, et on reprend les notations des paragraphes précédents pour $(C^{\cdot}, s)$ et $(C'^{\cdot}, s')$.

PROPOSITION 1. *Si le foncteur Q sous-jacent à $\bar{q}$ admet un adjoint et s'il existe $l \in s.H^{\cdot}.s_0$ et $r_0 \in s'_0.H^{\cdot}.s_0$ tels que $p(l) = \lambda$ et $p(r_0) = R_0$, alors ζ se relève en un morphisme z de $H^{\cdot}$, de source le produit fibré canonique $a'_0 \vee r_0$, de but $q_0 \vee b_0$.*

PREUVE. On notera $((a'_0, p_{s'}), (r_0, p_{s_0}))$ et $((q_0, p_{s'_0}), (b_0, p_s))$ les produits fibrés canoniques dans $H^{\cdot}$ correspondant aux produits fibrés utilisés pour définir un adjoint de Q. On vérifie que

$$a_0 \cdot q \cdot p_{s'} = q_0 \cdot a'_0 \cdot p_{s'} = q_0 \cdot r_0 \cdot p_{s_0} = b_0 \cdot l \cdot p_{s_0},$$

car $\beta(\lambda(e)) = Q(R_0(e))$ pour tout $e \in C^{\cdot}_0$ nous donne $q_0 \cdot r_0 = b_0 \cdot l$. Il en résulte la flèche $k \cdot [q \cdot p_{s'}, l \cdot p_{s_0}] \in s.H^{\cdot}.a'_0 \vee r_0$ au-dessus de l'application qui envoie (f', e) sur $Q(f') \cdot \lambda(e)$. Enfin

$$q_0 \cdot b'_0 \cdot p_{s'} = b_0 \cdot q \cdot p_{s'} = b_0 \cdot k \cdot [q \cdot p_{s'}, l \cdot p_{s_0}],$$

de sorte qu'il existe un crochet $z = [b'_0 \cdot p_{s'}, k \cdot [q \cdot p_{s'}, l \cdot p_{s_0}]]$ au-dessus de ζ. ▼

DEFINITION 1. On dira que le foncteur p-structuré $\bar{q}$ *admet un p-adjoint* si les conditions de la proposition 1 sont réalisées et si la flèche z est inversible.

En particulier si $H^{\cdot} = \mathcal{F}$, un foncteur $p\mathcal{F}$-structuré (i.e. un foncteur double) admet un $p\mathcal{F}$-adjoint dès que les conditions de la proposition 1 sont remplies.

Lorsque le foncteur Q admet un adjoint, on sait construire à partir de R_0 et λ un foncteur R et une transformation naturelle $\nu' = (C'^{\cdot}, \underline{\nu}', R \cdot Q)$ telle que λ définisse une transformation naturelle $\Lambda = (Q \cdot R, \lambda, C^{\cdot})$ et que

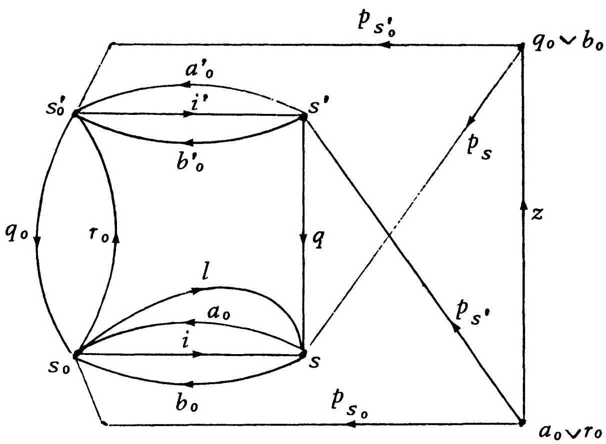
$$Q \cdot \nu' \boxminus \Lambda \cdot Q = id_Q \quad \text{et} \quad \nu' \cdot R \boxminus R \cdot \Lambda = id_R.$$

PROPOSITION 2. *Sous les conditions de la proposition 1, $\bar{q}$ admet un p-adjoint si et seulement si on peut structurer R et ν'.*

PREUVE. 1° Supposons que $\bar{q}$ ait un p-adjoint. On a $a_0 . l . b_0 = b_0$, car $\alpha(\lambda(e)) = e$ pour tout $e \in C_0^{\cdot}$ nous donne $a_0 . l = s_0$, d'où le crochet: $[l . b_0, s] \in s * s . H^{\cdot} . s$. Comme

$$q_0 . r_0 . b_0 = b_0 . l . b_0 = b_0 . k . [l . b_0, s],$$

il existe un crochet $[r_0 . b_0, k . [l . b_0, s]] \in q_0 \vee b_0 . H^{\cdot} . s$. On pose: $r = p_{s'} . z^{-1} . [r_0 . b_0, k . [l . b_0, s]] \in s' . H^{\cdot} . s$. Alors, $((C^{\cdot\cdot}, s'), r, (C^{\cdot}, s))$ est un foncteur p-structuré $\bar{r}$ structurant R. D'autre part on constate que $q_0 = b_0 . i . q_0$, d'où la flèche $[s_0', i . q_0] \in q_0 \vee b_0 . H^{\cdot} . s_0'$; on pose $n' = p_{s'} . z^{-1} . [s_0', i . q_0] \in s' . H^{\cdot} . s_0'$, ce qui montre que ν' est structuré par $(id_{(C^{\cdot\cdot}, s')}, n', r . q)$.



2° Réciproque: D'après la définition de ζ, l'application ζ^{-1} est définie par $\zeta^{-1}(e', f) = (\nu'(e') . R(f), \alpha(f))$. Or

$$a_0' . n' . p_{s_0'} = r_0 . q_0 . p_{s_0'} = r_0 . b_0 . p_s = b_0' . r . p_s,$$

de sorte qu'il existe un morphisme $k' . [n' . p_{s_0'}, r . p_s] \in s' . H^{\cdot} . q_0 \vee b_0$, et enfin les égalités

$$a_0' . k' . [n' . p_{s_0'}, r . p_s] = a_0' . r . p_s = r_0 . a_0 . p_s$$

assurent que z admet le crochet $[k' . [n' . p_{s_0'}, r . p_s], a_0 . p_s]$ pour inverse. ▼

REMARQUE. On a ainsi déterminé un couple d'adjoints dans la **2**-catégorie des transformations naturelles p-structurées $(\mathfrak{N}^{\cdot}_p, \mathfrak{N}^{\square\square}_p)$, au sens de [2].

PROPOSITION 3. *Un couple* $(\bar{q}, \bar{r})$ *de p-adjoints détermine un triple p-structuré.*

PREUVE. Avec les notations de la proposition 2, il s'agit de $\bar{\mathbf{T}} = (\bar{q}.\bar{r}, \bar{l}, \bar{q}.\bar{n}'.\bar{r})$, qui est la structuration du triple $\mathbf{T}$ associé au couple d'adjoints (Q, R). ▼

Première application.

PROPOSITION 4. *Si* $\bar{\mathbf{T}}$ *est un triple p-structuré, les foncteurs p-structurés* $\bar{y}_{Kl}$ *et* $\bar{y}_{A\mathbf{T}}$ *admettent* $\bar{x}_{Kl}$ *et* $\bar{x}_{A\mathbf{T}}$ *respectivement pour p-adjoints (voir § I et II pour les notations).*

PREUVE. La transformation naturelle ν'_{Kl} est donnée par $\nu'_{Kl}(e) = (e, \tau(e))$. On vérifie immédiatement $t_0 = b_0 . i . t_0$, d'où la flèche $n'_{Kl} = [s_0, i.t_0] \in s_{Kl}.H^{\cdot}.s_0$ qui structure ν'_{Kl}. D'autre part la transformation naturelle $\nu'_{A\mathbf{T}}$ est donnée par

$$\nu'_{A\mathbf{T}}(e, b) = ((e, b), b, (\tau(e), \mu(e))).$$

Comme, d'après la proposition 1-II,

$$a_0 . p'_2 . p''_2 . p'' = t_0 . p''_1 . p'' = p'_1 . p'' . x_{A_0\mathbf{T}} . p''_1 . p'',$$

il existe un crochet $[p'_2 . p''_2 . p'', x_{A_0\mathbf{T}} . p''_1 . p''] \in s_3 . H^{\cdot} . s_{A_0\mathbf{T}}$. Puisque $p''_1 . p'' = b_0 . p'_2 . p''_2 . p''$ (voir 1-II), on détermine $[s_{A_0\mathbf{T}}, p'_2 . p''_2 . p'']$. Enfin

$$z'' . [s_{A_0\mathbf{T}}, p'_2 . p''_2 . p''] =$$

$$= [k . [p'_2 . p''_2 . p'', t . p'_2 . p''_2 . p''], l . a_0 . p'_2 . p''_2 . p'']$$

$$= [k . [p'_2 . p''_2, t . p'_2 . p''_2] . p'', l . t_0 . p''_1 . p'']$$

$$= [k . [p'_2, m . p'_1] . p''_2 . p'', l . t_0 . p''_1 . p'']$$

$$= [k . [p'_2 . p''_2 . p'', m . p''_1 . p''], l . p''_1 . p'' . x_{A_0\mathbf{T}} . p''_1 . p'']$$

$$= z' . [p'_2 . p''_2 . p'', x_{A_0\mathbf{T}} . p''_1 . p''].$$

Ainsi il existe un crochet

$$n'_{A^{\mathbf{T}}} = [\,[\, s_{A_0^{\mathbf{T}}}, p'_2 \cdot p''_2 \cdot p''\,]\,,\,[\, p'_2 \cdot p''_2 \cdot p'', x_{A_0^{\mathbf{T}}} \cdot p''_1 \cdot p''\,]\,],$$

qui structure $\nu'_{A^{\mathbf{T}}}$. ▼

On appellera le couple $(\bar{q}, \bar{r})$ de p-adjoints *une p-factorisation du triple p-structuré* $\bar{\mathbf{T}}$ *associé à* $(\bar{q}, \bar{r})$ *et on appellera morphisme de p-factorisations de* $\bar{\mathbf{T}}$ un triplet $((\bar{q}_2, \bar{r}_2), \bar{h}, (\bar{q}_1, \bar{r}_1))$ tel que $\bar{h}$ soit un foncteur structuré vérifiant $\bar{h} \cdot \bar{r}_1 = \bar{r}_2$ et $\bar{q}_2 \cdot \bar{h} = \bar{q}_1$.

PROPOSITION 5. *$(\bar{y}_{Kl}, \bar{x}_{Kl})$ est un objet initial de la catégorie des morphismes de p-factorisations de* $\bar{\mathbf{T}}$ *et* $(\bar{y}_{A^{\mathbf{T}}}, \bar{x}_{A^{\mathbf{T}}})$ *en est un objet final.*

PREUVE. Pour cela il suffit de remarquer que, si $(\bar{q}, \bar{r})$ est une p-factorisation de $\bar{\mathbf{T}}$, le foncteur R sous-jacent à $\bar{r}$ admet une coexpansion dont l'éjecteur est $\nu' \cdot R$ (car R admet comme coadjoint le foncteur Q sous-jacent à $\bar{q}$) et que cet éjecteur, qui est en fait une obligation, détermine la flèche initiale habituelle entre factorisations du triple $\mathbf{T}$ sous-jacent à $\bar{\mathbf{T}}$. On peut structurer cette flèche d'après la proposition 8-I, remarque. On fait un raisonnement analogue pour la flèche finale. ▼

On sait [4] que la catégorie de Kleisli d'un triple $\mathbf{T}$ apparaît comme une **2**-structure libre associée à $\mathbf{T}$ par rapport au foncteur insertion de $(\mathfrak{N}^{\cdot}, \mathfrak{N}^{\square\square})$ vers la **2**-catégorie des premiers morphismes de triples $(\overrightarrow{\mathfrak{T}}^{\cdot}, \overrightarrow{\mathfrak{T}}^{\square\square})$. Pour une **2**-catégorie quelconque $(C^{\cdot}, C^{\perp})$, on peut définir d'une manière analogue un **2**-foncteur insertion de $(C^{\cdot}, C^{\perp})$ vers une **2**-catégorie $(\overrightarrow{\mathfrak{T}}_{C^{\cdot}}, \overrightarrow{\mathfrak{T}}^{\square\square}_{C^{\cdot}})$; ceci suggère d'appeler *objet de Kleisli d'un triple* $\mathbf{t}$ *de* $(C^{\cdot}, C^{\perp})$ une **2**-structure libre de $\mathbf{t}$, si elle existe, par rapport à ce **2**-foncteur insertion. Avec cette définition appliquée dans $(\mathfrak{N}^{\cdot}_p, \mathfrak{N}^{\square\square}_p)$, il est aisé de vérifier que $(Kl^{\cdot}_{\mathbf{T}}, s_{Kl})$ est un objet de Kleisli du triple p-structuré $\bar{\mathbf{T}}$ (de triple sous-jacent $\mathbf{T}$). Ainsi $(Kl^{\cdot}_{\mathbf{T}}, s_{Kl})$ est non seulement la catégorie de Kleisli de $\bar{\mathbf{T}}$, mais aussi la catégorie p-structurée de Kleisli du triple $\mathbf{T}$. On a bien entendu une propriété semblable pour $(A^{\mathbf{T}\cdot}, s_{A^{\mathbf{T}}})$ (en utilisant le fait démontré dans [4], que la catégorie des algèbres d'un triple $\mathbf{T}$ est une **2**-structure colibre de $\mathbf{T}$ par rapport au foncteur insertion de $(\mathfrak{N}^{\cdot}, \mathfrak{N}^{\square\square})$ vers la **2**-catégorie $(\overleftarrow{\mathfrak{T}}^{\cdot}, \overleftarrow{\mathfrak{T}}^{\square\square})$

des seconds morphismes de triples).

Deuxième application.

Soit $\hat{\mathfrak{U}}$ un univers tel que $\mathfrak{U} \subset \hat{\mathfrak{U}}$ et $\mathfrak{U} \in \hat{\mathfrak{U}}$. Notons $\hat{\mathfrak{M}}$ et $\hat{\mathfrak{F}}$ les catégories des applications et des foncteurs correspondant à $\hat{\mathfrak{U}}$. Soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble des transformations naturelles associées à $\hat{\mathfrak{U}}$. On rappelle que $\mathfrak{N}^{\cdot}$ est une catégorie cartésienne fermée, le coadjoint du foncteur $\cdot \times C^{\cdot}$ étant $\mathfrak{N}(\cdot, C^{\cdot})^{\square\square}$, l'éjecteur ν'_C étant défini par

$$\nu'_C(X^{\cdot})((G, \omega, F), f) = \omega(\beta(f)). F(f) \;,$$

pour tout $f \in C^{\cdot}$ et toute transformation naturelle $(G, \omega, F) \in \mathfrak{N}(X^{\cdot}, C^{\cdot})$, et le projecteur λ_C étant défini par

$$\lambda_C(X^{\cdot})(x) = ((\beta(x), \cdot), (x, \cdot), (\alpha(x), \cdot)) \quad \text{si } x \in C^{\cdot}_0 .$$

De plus on sait que $(\mathfrak{N}^{\cdot}, \mathfrak{N}^{\square\square})$ est une catégorie double et que les foncteurs $\cdot \times C^{\cdot}$ et $\mathfrak{N}(\cdot, C^{\cdot})^{\square\square}$ déterminent des foncteurs doubles pour tout $C^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$. Comme $\lambda_C(X^{\cdot})$ et $\nu'_C(X^{\cdot})$ définissent des foncteurs, c'est-à-dire des unités de $\mathfrak{N}^{\square\square}$, on prouve que $(\mathfrak{N}(\cdot, C^{\cdot})^{\square\square}, \cdot \times C^{\cdot})$ est un couple d'adjoints sous-jacent à un couple de $p\hat{\mathfrak{F}}$-adjoints pour tout $C^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$. On pourrait dire que $(\mathfrak{N}^{\cdot}, \mathfrak{N}^{\square\square})$ est une catégorie double $p\hat{\mathfrak{F}}$-cartésienne fermée et introduire de cette façon plus généralement la notion de catégorie p-structurée, p-cartésienne fermée.

Références.

[1] A. BASTIANI et C. EHRESMANN, Catégories de foncteurs structurés, *Cahiers de Topologie et Géom. Diff. XI-3*, Paris (1969).

[2] E. BURRONI, *Catégories discrètement structurées. Triples,* Esquisses Mathématiques 4, Paris 1970.

[3] E. DUBUC, *Kan extensions in enriched category theory,* Lecture notes 145, 1971.

[4] R. STREET, Two constructions on Lax functors, *Cahiers de Top. et Géom. Diff. XII-3* (1972).

[5] C. EHRESMANN, *Algèbre, 1^e partie,* C. D. U. 1968, Paris.

[6] D. BOURN, Sur les objets de Kleisli et d'Eilenberg-Moore dans une 2-catégorie, *C. R. A. S.* Paris, 275 (1973).