LAURENT COPPEY

Compléments à l'article « Théories algébriques et extension de préfaisceaux »

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 13, nº 3 (1972), p. 265-273

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1972__13_3_265_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XIII-3*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

COMPLEMENTS A L'ARTICLE
THEORIES ALGEBRIQUES ET EXTENSION DE PREFAISCEAUX

par Laurent COPPEY

Nous faisons référence une fois pour toutes à l'article [*], en ce qui concerne les notations, la terminologie et les principales définitions.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathfrak{D}$ une surcatégorie de $\mathcal{C}$; les $\mathfrak{D}$-algèbres à droite (resp. à gauche) sur les objets de $\mathcal{C}$ ont été définies comme étant des actions de $\mathfrak{D}$ à droite (resp. à gauche) étendant certaines actions naturelles de $\mathcal{C}$. La définition (1) qui suit constitue une généralisation nécessaire pour interpréter la proposition 1-E de [*] dont l'énoncé a une forme inexacte (en général, $\mathfrak{D}_F$ n'est pas isomorphe à une surcatégorie de Σ, même lorsque F est injectif).

Sans l'écrire chaque fois, l'expression «à droite» qualifie désormais les «actions» ou «algèbres» envisagées.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe multiplicatif présenté par son schéma

$$\mathcal{G} * \mathcal{G} \xrightarrow{\kappa} \mathcal{G} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}_0$$

dans lequel les symboles ont leur sens usuel. Soit π une application de source $\mathcal{E}$ et de but $\mathcal{G}_0$; une *action de* $\mathcal{G}$ *sur* π est une application θ du produit fibré $\mathcal{E}_{\pi,\beta}$ de π et β vers $\mathcal{E}$ satisfaisant les conditions:

i) $\theta(x, \pi(x)) = x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$,

ii) $\pi\theta(x, g) = \alpha(g)$, pour tout $(x, g) \in \mathcal{E}_{\pi,\beta}$,

iii) $\theta(\theta(x, g), g') = \theta(x, g \cdot g')$, si $g \cdot g'$ est défini dans $\mathcal{G}$.

Nous dirons aussi que $\mathcal{G}$ agit sur $\mathcal{E}$, grâce à θ, s'il n'y a pas de doute possible sur π. En général, les actions de $\mathcal{G}$ ne peuvent pas être représentées, dans $\mathfrak{M}_{\mathcal{G}_0}$, par les algèbres d'un triple, contrairement à ce qui a lieu lorsque $\mathcal{G}$ est une catégorie. On peut cependant les interpréter comme les «algèbres d'un triple non associatif» (la définition précise d'un «triple non associatif» est possible, mais longue à décrire, lorsqu'on remplace l'ensemble des entiers par l'ensemble des entiers non associatifs).

NOTATION ET REMARQUE. Soit θ une action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{E}$; nous écrirons souvent $x \underset{\theta}{*} g$ (ou même $x * g$, s'il n'y a pas de doute sur θ) au lieu de $\theta(x, g)$. L'élément $(x * g) * g'$ peut être défini sans que $g \cdot g'$ le soit; si $(g \cdot g') \cdot g''$ et $g \cdot (g' \cdot g'')$ sont définis dans $\mathcal{G}$, on trouve:

$$x * ((g \cdot g') \cdot g'') = x * (g \cdot (g' \cdot g'')) = ((x * g) * g') * g'',$$

même si $(g \cdot g') \cdot g'' \neq g \cdot (g' \cdot g'')$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{G}$ un surgraphe multiplicatif de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}_0 = \mathcal{G}_0$.

DEFINITION 1. Une *$\mathcal{G}$-algèbre sur un objet X de $\mathcal{C}$* est une action θ de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$ telle que:

a) $f \underset{\theta}{*} g$ est défini si et seulement si $\alpha(f) = \beta(g)$,

b) si $f \underset{\theta}{*} g$ est défini et si $g \in \mathcal{C}$, alors $f \underset{\theta}{*} g = f \cdot g$.

REMARQUE: Soit θ une $\mathcal{G}$-algèbre sur X; soit θ' l'application de $\mathcal{G}_{X_0}$ dans $\mathcal{C}_{X_0}$ définie par $\theta'(g) = \theta(1_{X_0}, g)$; l'application θ' satisfait les trois conditions suivantes:

α) $\alpha\theta'(g) = \alpha(g)$, pour tout $g \in \mathcal{G}_{X_0}$,

β) $\theta'(g) = g$ si $g \in \mathcal{C}$,

γ) si $g \cdot g'$ et $\theta'(g) \cdot g'$ sont définis dans $\mathcal{G}$, alors

$$\theta'(g \cdot g') = \theta'(\theta'(g) \cdot g').$$

La correspondance ξ qui à θ fait correspondre θ' est une bijection si $\mathcal{G}$ est une catégorie (proposition 2-C de [*]); mais si $\mathcal{G}$ est seulement un graphe multiplicatif, ξ n'est en général ni surjective, ni injective.

DEFINITION 2. Soit θ une $\mathcal{G}$-algèbre sur X et θ' une $\mathcal{G}$-algèbre sur X'; un *morphisme* λ de θ vers θ' est défini par une flèche dans $\mathcal{C}$ de X vers X', notée aussi λ, telle que

$$\lambda \cdot (f \underset{\theta}{*} g) = (\lambda \cdot f) \underset{\theta'}{*} g, \text{ lorsque } f \underset{\theta}{*} g \text{ est défini.}$$

La catégorie des morphismes entre $\mathcal{G}$-algèbres ainsi obtenue est désignée par $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ et son foncteur d'oubli (évident) vers $\mathcal{C}$ est noté $U_{\mathcal{G}}$.

DEFINITION 3. Soit U un foncteur d'une catégorie $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{C}$; nous dirons que *U est quasi-algébrique* (resp. *pré-algébrique*) s'il existe un surgraphe (resp. une surcatégorie) $\mathcal{G}$ de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme de catégories γ de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ vers $\mathcal{A}$ tel que $U \circ \gamma = U_{\mathcal{G}}$.

PROPOSITION 1. *Si U est un foncteur quasi-algébrique ou pré-algébrique admettant un adjoint à gauche, alors U est un foncteur algébrique (au sens des triples).*

La démonstration a été donnée dans le cas des foncteurs pré-algébriques (cf. proposition 1-D de [*]); elle est en tout point semblable pour les foncteurs quasi-algébriques; cependant la forme à retenir pour une $\mathcal{G}$-algèbre ne peut pas être celle des applications θ' satisfaisant α, β, γ.

L'énoncé suivant est un complément de la proposition 1-D de [*] et de la précédente.

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{D}$ une surcatégorie de $\mathcal{C}$; si l'inclusion $(\mathcal{D}, \iota, \mathcal{C})$ admet un adjoint à droite R, le foncteur d'oubli $U_{\mathcal{D}}$ des $\mathcal{D}$-algèbres vers $\mathcal{C}$ est algébrique.*

Il suffit de remarquer que R est fidèle; dans ce cas, on sait que $\mathcal{D}$ est isomorphe à la catégorie de Kleisli associée au triple $\mathbf{T} = (T, \varepsilon, \mu)$ défini par (ι, R), d'après la proposition 4-C de [*]; on en déduit que $U_{\mathcal{D}}$ est canoniquement isomorphe au foncteur d'oubli des $\mathbf{T}$-algèbres vers $\mathcal{C}$ (proposition 5-C de [*]). Il est intéressant de savoir comment est définie la $\mathcal{D}$-algèbre libre ξ engendrée par un objet X de $\mathcal{C}$; c'est une $\mathcal{D}$-algèbre sur $TX = RX$; l'action de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{C}_{RX_0}$ correspondante est donnée par la formule:

$$f \underset{\xi}{*} g = \mu_X \cdot R(f \cdot g) \cdot \varepsilon_Z$$

dans laquelle $Z = \alpha(g)$ et $\alpha(f) = \beta(g)$.

Un foncteur quasi-algébrique est toujours isomorphe à une restriction d'un foncteur pré-algébrique; on peut même choisir ce dernier « minimum » en un sens que nous allons préciser.

Soit $\mathcal{G}$ un surgraphe multiplicatif de $\mathcal{C}$ et soit $L(\mathcal{G})$ la catégorie libre des chemins propres de $\mathcal{G}$. Considérons la relation $\rho_{\mathcal{C}}$ dans $L(\mathcal{G})$ dont le graphe sous-jacent est l'ensemble $A_{\mathcal{C}}$ des couples $((f', f), f'.f)$, avec f et f' éléments de $\mathcal{C}$. Cette relation satisfait les conditions de la proposition 5 de [Eh, a] (p. 92) et par conséquent, il existe une catégorie quotient strict de $L(\mathcal{G})$ par la relation d'équivalence compatible $r_{\mathcal{C}}$ engendrée par $\rho_{\mathcal{C}}$, dont l'ensemble sous-jacent est isomorphe à l'ensemble des chemins $\rho_{\mathcal{C}}$-réduits de $L(\mathcal{G})$; cette catégorie quotient est notée $\mathcal{C}(\mathcal{G})$. Il est facile de voir que le foncteur naturel de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ est injectif et sa restriction aux unités bijective, de sorte qu'on peut choisir $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ comme surcatégorie de $\mathcal{C}$; nous notons τ l'application naturelle de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ est l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{G})$; τ définit en fait un homomorphisme entre les graphes orientés sous-jacents.

PROPOSITION 3. *Il y a une bijection naturelle entre les $\mathcal{G}$-algèbres sur X et les $\mathcal{C}(\mathcal{G})$-algèbres sur X satisfaisant la condition suivante:*

$$f*(\tau(g).\tau(g')) = f*\tau(g.g'), \quad \textit{lorsque } g.g' \textit{ est défini dans } \mathcal{G};$$

cette bijection s'étend en un foncteur I injectif et plein de $\mathfrak{A}_{\mathcal{G}}$ vers $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}(\mathcal{G})}$ satisfaisant $U_{\mathcal{C}(\mathcal{G})} \circ I = U_{\mathcal{G}}$.

DEMONSTRATION. Soit $\overline{\theta}$ une $\mathcal{C}(\mathcal{G})$-algèbre sur X satisfaisant la condition de l'énoncé. Soit $f \in \mathcal{C}_{X_0}$ et $g \in \mathcal{G}$ avec $\beta(g) = \alpha(f)$; on définit une action θ de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$ par l'égalité $f \underset{\theta}{*} g = f \underset{\overline{\theta}}{*} \tau(g)$.

Réciproquement, soit θ une $\mathcal{G}$-algèbre sur X. Soit $\overline{c} \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ et $f \in \mathcal{C}_{X_0}$, avec $\alpha(f) = \beta(\overline{c})$; un représentant c de $\overline{c}$ est un chemin dans $\mathcal{G}$; notons-le $(g_n, g_{n-1}, \dots, g_1)$ et posons

$$E(f, c) = (\dots((f \underset{\theta}{*} g_n) \underset{\theta}{*} g_{n-1}) \underset{\theta}{*} \dots) \underset{\theta}{*} g_1;$$

si c' est un autre représentant de $\overline{c}$, on sait [Eh, a] qu'il existe une suite $c_1, c_2, \dots, c_p$ de chemins dans $\mathcal{G}$ telle que

$c_1 = c$, $c_p = c'$ et tout couple (c_{i+1}, c_i) ou (c_i, c_{i+1}) est de la forme

$$((g_n^i, g_{n-1}^i, \dots, g_1^i), (g_n^i, g_{n-1}^i, \dots, g_{j+2}^i, h, g_{j-1}^i, \dots, g_1^i)),$$

où $((g_{j+1}^i, g_j^i), h) \in A_{\mathcal{C}}$;

on a alors:

$$\begin{aligned} E(f, c_i) &= (\ldots(((f * g_n^i) * g_{n-1}^i)\ldots) * g_{j+1}^i) * g_j^i)\ldots) * g_1^i \\ &= (\ldots(((f * g_n^i) * g_{n-1}^i)\ldots) \cdot g_{j+1}^i \cdot g_j^i)\ldots) * g_1^i \\ &\qquad\qquad (\text{car } g_j^i,\ g_{j+1}^i \in \mathcal{C}) \\ &= (\ldots(((f * g_n^i) * g_{n-1}^i)\ldots) * h)\ldots) * g_1^i \quad (\text{car } h \in \mathcal{C}) \\ &= E(f, c_{i+1}); \end{aligned}$$

donc $E(f, c) = E(f, c')$; l'expression $E(f, c)$ étant indépendante du représentant c choisi dans $\overline{c}$, on peut définir l'action $\overline{\theta}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$ par l'égalité

$$f \underset{\theta}{*} \overline{c} = E(f, c);$$

il est facile de vérifier que cette action définit en fait une $\mathcal{C}(\mathcal{G})$-algèbre sur X satisfaisant la condition de l'énoncé. Les correspondances ainsi définies entre ces $\mathcal{C}(\mathcal{G})$-algèbres $\overline{\theta}$ et les $\mathcal{G}$-algèbres θ sur X sont bien inverses l'une de l'autre. Le reste de la démonstration est simple.

Si $\mathcal{D}'$ est une surcatégorie de $\mathcal{C}$ et si τ' est une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{D}'$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ soit l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}'$, il existe un unique foncteur de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ vers $\mathcal{D}'$, soit ϕ, tel que $\tau' = \underline{\phi} \circ \tau$. C'est en ce sens qu'on peut dire que le foncteur $U_{\mathcal{C}(\mathcal{G})}$ est le foncteur pré-algébrique «minimum» admettant $U_{\mathcal{G}}$ comme sous-foncteur.

Retour à la proposition 1-E de [*] .

Soit F un foncteur injectif de $\mathcal{C}$ vers une catégorie Σ et soit $\mathcal{D}$ une surcatégorie de $\mathcal{C}$; soit $\mathcal{D}_F$ la somme fibrée de F et de $(\mathcal{D}, \iota, \mathcal{C})$ dans la catégorie *des néofoncteurs*; le néofoncteur canonique de Σ vers $\mathcal{D}_F$ est injectif et sa restriction aux unités est une bijection, de sorte qu'on peut regarder $\mathcal{D}_F$ comme un surgraphe multiplicatif de Σ; alors, compte tenu de l'extension donnée plus haut de la notion de $\mathcal{D}$-algèbre, l'énoncé de la proposition 1-E est exact.

Complétion $H^{\cdot}$-projective d'une catégorie.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie telle que $\mathcal{C}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}$: la catégorie $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ a été définie dans [*] et le plongement de $\mathcal{C}$ dans $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ était désigné par Γ_β.

Soit $H^{\cdot}$ une «petite» catégorie (petite par rapport à $\mathcal{C}$, de façon que la catégorie $\mathcal{C}^{H^{\cdot}} = \mathcal{N}(\mathcal{C}, H^{\cdot})$ ait encore son ensemble de morphismes élément de $\hat{\mathfrak{M}}$; si $H^{\cdot}$ est de même «taille» que $\mathcal{C}$, il convient d'introduire un univers $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ d'ordre supérieur à celui de $\hat{\mathfrak{M}}$).

Considérons les objets suivants de $\mathcal{A}_{\mathbf{C}_\beta}$:

1° ceux qui sont images par Γ_β des objets de $\mathcal{C}$; on note A_X l'objet $\Gamma_\beta(X)$; A_X «est» l'action naturelle à droite de $\mathcal{C}$ sur la classe $\mathcal{C}_X$ des flèches, dans $\mathcal{C}$, de but X;

2° pour tout foncteur ϕ, de $H^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}$, on note A_ϕ l'action naturelle à droite de $\mathcal{C}$ sur la classe $\mathcal{C}_\phi$ des transformations naturelles de source un foncteur constant et de but ϕ.

Nous désignons par $\overline{\mathcal{C}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ ayant pour objets les A_X, pour $X \in \mathcal{C}_0$, et les A_ϕ, pour $\phi \in (\mathcal{C}^{H^{\cdot}})_0$.

L'image de $\mathcal{C}$ par Γ_β est contenue dans $\overline{\mathcal{C}}$; on désigne alors par ι le foncteur $(\overline{\mathcal{C}}, \underline{\Gamma}_\beta, \mathcal{C})$. De même, soit $\iota_{H^{\cdot}}$ le plongement naturel de $\mathcal{C}^{H^{\cdot}}$ dans $\mathcal{A}_{\mathbf{C}_\beta}$.

LEMME 1. *Pour tout foncteur ϕ de $H^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}$, le foncteur $\iota \circ \phi$ admet A_ϕ pour limite projective dans $\overline{\mathcal{C}}$; cette limite est susceptible d'être canoniquement naturalisée.*

DEMONSTRATION. Soit ϕ un foncteur de $H^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}$. Soit $t: \hat{X} \to \phi$ un élément de $\mathcal{C}_\phi$; pour tout $e \in H^{\cdot}_0$, $t(e): X \to \phi(e)$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{C}_{\phi(e)}$; l'application (évaluation en e) E_e ainsi définie, de $\mathcal{C}_\phi$ vers $\mathcal{C}_{\phi(e)}$ est sous-jacente à un morphisme p_e de A_ϕ vers $A_{\phi(e)}$ dans $\overline{\mathcal{C}}$. L'application qui à e fait correspondre p_e définit une transformation naturelle p du foncteur constant de $H^{\cdot}$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ sur A_ϕ, soit $\hat{A}_\phi$, vers le foncteur $\iota \circ \phi$; il est facile de vérifier maintenant que A_ϕ est une limite projective de $\iota \circ \phi$ dans $\overline{\mathcal{C}}$ et que p en est une naturalisation.

LEMME 2. *Si $\phi: H^{\cdot} \to \mathcal{C}$ a une limite projective P dans $\mathcal{C}$, alors A_P est une limite projective de $\iota \circ \phi$ dans $\overline{\mathcal{C}}$; autrement dit, le foncteur ι est compatible avec les limites projectives existant dans $\mathcal{C}$.*

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer que les objets A_P et A_ϕ sont isomorphes dans $\overline{\mathcal{C}}$.

La catégorie $\mathcal{C}_1$.

La catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ est une bonne approche pour la complétion $H^{\cdot}$-projective de $\mathcal{C}$, mais si ses objets sont convenables (c'est-à-dire nécessaires), elle possède cependant «trop» de flèches. Nous allons définir une certaine sous-catégorie $\mathcal{C}_1$ de $\overline{\mathcal{C}}$ qui sera adaptée au problème de la $H^{\cdot}$-complétion projective.

Soit q une transformation naturelle de source un foncteur constant de $H^{\cdot}$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ et de but un foncteur du genre $\iota \circ \phi$. Si les flèches $q(e)$ appartiennent toutes à une sous-classe $\mathcal{C}'$ de $\overline{\mathcal{C}}$, nous dirons que q est un ($\mathcal{C}$-)cône à valeurs dans $\mathcal{C}'$.

Première étape de la construction de $\mathcal{C}_1$: Considérons la classe $\tilde{\mathcal{C}}_1^1$ des flèches de $\overline{\mathcal{C}}$ qui sont des projections naturalisées (Lemme 1) ou des flèches de $\iota(\mathcal{C})$ dans $\overline{\mathcal{C}}$; soit $\mathcal{C}_1^1$ la sous-catégorie de $\overline{\mathcal{C}}$ engendrée par cette classe $\tilde{\mathcal{C}}_1^1$.

Deuxième étape: Soit $\tilde{\mathcal{C}}_1^2$ la classe des flèches de $\overline{\mathcal{C}}$ qui sont:

- ou bien des flèches de $\mathcal{C}_1^1$,
- ou bien des crochets (dans $\overline{\mathcal{C}}$) de $\mathcal{C}$-cônes à valeurs dans $\mathcal{C}_1^1$,

et soit $\mathcal{C}_1^2$ la sous-catégorie de $\overline{\mathcal{C}}$ engendrée par $\tilde{\mathcal{C}}_1^2$.

Par récurrence, on définit, pour tout ordinal μ, la catégorie $\mathcal{C}_1^\mu$ (si μ a un prédécesseur $\mu - 1$, on procède comme pour passer de $\mathcal{C}_1^1$ à $\mathcal{C}_1^2$; si μ est limite, on pose $\mathcal{C}_1^\mu = \bigcup_{\nu < \mu} \mathcal{C}_1^\nu$).

Soit Λ un ordinal régulier supérieur à l'ordinal initial associé à à $|H|$ et posons $\mathcal{C}_1^\Lambda = \mathcal{C}_1$; soit ι_1 la «restriction» de ι à $\mathcal{C}_1$:

$$\iota_1 = (\mathcal{C}_1, \underline{\iota}, \mathcal{C}).$$

LEMME 3. *Pour tout foncteur* ϕ *de* $H^{\cdot}$ *vers* $\mathcal{C}$, A_ϕ *est une limite projective dans* $\mathcal{C}_1$ *de* $\iota_1 \circ \phi$.

On sait, d'après le lemme 1, que A_ϕ est une limite projective dans $\overline{\mathcal{C}}$ de $\iota \circ \phi$. Il suffit alors de remarquer que:

1° les projections naturalisées $p_e : A_\phi \to A_{\phi(e)}$ sont bien dans $\mathcal{C}_1$ (elles sont déjà dans $\mathcal{C}_1^1$),

2° le crochet d'un $\mathcal{C}$-cône q à valeurs dans $\mathcal{C}_1$ est encore dans $\mathcal{C}_1$. En effet, les $q(e)$ sont dans des $\mathcal{C}_1^{\mu(e)}$ et il suffit de se placer dans la catégorie $\mathcal{C}_1^{\sup_{e\in H_0^\cdot}\mu(e)}$ pour voir que le crochet en question est dans la catégorie $\mathcal{C}_1^{\sup_{e\in H_0^\cdot}\mu(e)+1}$, c'est-à-dire dans $\mathcal{C}_1^{\Lambda} = \mathcal{C}_1$, d'après le choix de Λ.

LEMME 4. *Soit $(\mathfrak{D}, \underset{\rightarrow}{Lim})$ une catégorie à $H^\cdot$-limites projectives naturalisées et soit j un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathfrak{D}$ compatible avec les limites projectives èxistant dans $\mathcal{C}$. Il existe un unique foncteur de $\mathcal{C}_1$ vers $\mathfrak{D}$, soit k, qui est compatible avec les limites projectives des foncteurs du genre $\iota_1 \circ \phi$ et qui vérifie $k \circ \iota_1 = j$.*

On pose $k_0 = j$ et on définit k_μ par récurrence. Le foncteur cherché n'est rien d'autre que la limite $k_\Lambda = k$. Lorsque k_μ est défini, on voit que $k_{\mu+1}$ est déterminé de la manière suivante:

- si $f \in \mathcal{C}_1^\mu$, on pose $k_{\mu+1}(f) = k_\mu(f)$;
- si f est un crochet de $\mathcal{C}$-cône à valeurs dans $\mathcal{C}_1^\mu$, soit $f = [f_e]_{e\in H_0^\cdot}$, on pose $k_{\mu+1}(f) = [k_\mu(f_e)]_{e\in H_0^\cdot}$;

$k_{\mu+1}$ est ainsi défini sur la classe $\tilde{\mathcal{C}}_1^{\mu+1}$ et par conséquent sur la catégorie $\mathcal{C}_1^{\mu+1}$.

REMARQUES. 1° Le foncteur ι_1 est toujours compatible avec les limites projectives; il suffit en effet de voir que l'isomorphisme canonique γ de A_P vers A_ϕ, où P est une limite projective de ϕ dans $\mathcal{C}$, est une flèche de $\mathcal{C}_1$; or il est évident que $\gamma \in \mathcal{C}_1^2$ ainsi que γ^{-1}, donc a fortiori $\gamma \in \mathcal{C}_1$.

2° L'image par $\iota_{H^\cdot}$ de $\mathcal{C}^{H^\cdot}$ est aussi dans $\mathcal{C}_1$; en effet, soit $t: \phi \to \psi$ une transformation naturelle de ϕ vers ψ; soit p_e les projections naturelles de A_ϕ vers $A_{\phi(e)}$; les flèches $\iota(t(e)).p_e$ sont dans $\mathcal{C}_1^1$ (composés de flèches de $\tilde{\mathcal{C}}_1^1$) et $\iota(t)$ est alors dans $\tilde{\mathcal{C}}_1^2$, puisque c'est le crochet de la famille $(\iota(t(e)).p_e)_{e\in H_0^\cdot}$. [On a bien $q_e.\iota(t) = \iota(t(e)).p_e$ pour tout $e \in H_0^\cdot$, si q_e est la projection naturelle de A_ψ vers $A_{\psi(e)}$, car, pour tout $\xi \in A_\phi$, on a:

$$q_e.\iota(t)(\xi) = q_e(t.\xi) = (t.\xi)(e) = t(e).\xi(e) = \\ = t(e).p_e(\xi) = (\iota(t(e)).p_e)(\xi).\ ]$$

$H^\cdot$-complétion projective de $\mathcal{C}$.

Pour trouver une $H^\cdot$-complétion projective de $\mathcal{C}$, il suffit d'itérer le procédé qui a permis de passer de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_1$. Pour tout ordinal μ, on définit $\mathcal{C}_\mu$

- comme réunion des $\mathcal{C}_\nu$, $\nu < \mu$, si μ est limite,
- comme étant la catégorie $(\mathcal{C}_{\mu-1})_1$, si μ a un prédécesseur.

THEOREME. *$\mathcal{C}_\Lambda$ est une $H^\cdot$-complétion projective de $\mathcal{C}$.*

La démonstration utilise les divers lemmes qui ont été établis jusqu'à maintenant. Il s'agit d'une complétion à équivalence naturelle près.

REMARQUES. 1° Si la classe $\mathcal{C}_\phi$ est vide, pour certains foncteurs, alors A_ϕ est un objet initial dans $\mathcal{C}_1^1$ et le raisonnement (non mentionné) du Lemme 1 n'est plus exact, de sorte que A_ϕ n'est pas une limite projective de $\iota \circ \phi$ dans $\overline{\mathcal{C}}$. Pour éviter cette difficulté, il convient de partir d'une catégorie $\mathcal{C}$ ayant un objet initial, de sorte que $\mathcal{C}_\phi$ ne peut pas être vide. Si I est un objet initial, A_I est aussi un objet initial de $\overline{\mathcal{C}}$, et même de $\mathcal{C}_1$ donc de $\mathcal{C}^\Lambda$.

2° Tout ce qui vient d'être dit est encore vrai avec une classe $\mathcal{G}$ de «petites catégories $H^\cdot$». La complétion $\mathcal{C}_\Lambda$ sera de «même taille» que $\mathcal{C}$ si la classe $\mathcal{G}$ est encore «petite par rapport à $\mathcal{C}$». Dans ce cas, la catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ doit être remplacée par la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ ayant pour objets les A_X, où $X \in \mathcal{C}_0$, et les A_ϕ, où $\alpha(\phi) \in \mathcal{G}$. A partir de là, les catégories $\mathcal{C}_1^1$, $\mathcal{C}_1^\mu$, etc..., $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2, \ldots$, $\mathcal{C}_\mu$, $\mathcal{C}_\Lambda$ se définissent comme dans le cas où $\mathcal{G} = \{ H^\cdot \}$.

3° Les complétions inductives de $\mathcal{C}$ s'obtiennent en remplaçant $\mathcal{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ par $\mathcal{A}_{\mathbf{C}_\alpha}$, Γ_β par Γ_α et les classes $\mathcal{C}_\phi$ par leurs analogues $\mathcal{C}^\phi$.

4° Les résultats précédents ne sont pas nouveaux; la méthode nous paraît cependant assez différente de celle indiquée dans [Eh, b].

Références.

[*] L. COPPEY, Théories algébriques et extension de préfaisceaux, *Cahiers Topo. Géo. diff. XIII-1*, Paris (1972).

[Eh] C. EHRESMANN, a) *Algèbre 1^e partie*, C. D. U., Paris, 1968.

b) Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *Cahiers Topo. Géo. diff. IX-1-2*, Paris (1967).