CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

CHARLES EHRESMANN

Élargissement complet d'un foncteur local

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, nº 4 (1969), p. 405-419

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_4_405_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE Vol. XI, 4
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

ELARGISSEMENT COMPLET D'UN FONCTEUR LOCAL

par Charles EHRESMANN

Le but de cet article est d'esquisser la démonstration d'un théorème généralisant aux foncteurs locaux le théorème d'élargissement complet d'une espèce de structures locale [4] . Alors que ce dernier permet par exemple de construire les variétés différentiables à partir du groupoïde des difféomorphismes entre ouverts d'espaces localement convexes, la construction faite ici est une axiomatisation de la construction de la catégorie des applications différentiables entre variétés différentiables à partir de la catégorie des applications différentiables entre ouverts d'espaces localement convexes.

La démonstration est divisée en trois parties. On construit d'abord la complétion d'une application locale f, ce qui revient à «recoller» entre eux des éléments «compatibles» de la source de f. On montre ensuite que, si f est sous-jacente à un foncteur local, sa complétion est sous-jacente à un foncteur local complet. Enfin, partant d'un foncteur local fidèle p de K vers C, on montre que son élargissement algébrique [2] (dont la source a pour objets les structures obtenues par «transport» à l'aide d'un inversible de C d'un objet de K) définit un foncteur local. La complétion de ce dernier est l'élargissement complet de p.

Le texte qui suit représente une partie du cours donné en 1968 et 1969 en introduction à la théorie des variétés différentiables. On admet connues la terminologie et les notations de [0] et, pour les catégories ordonnées, celles du paragraphe 2 de [1] .

1. Complétion d'une application locale.

Etant donné un ensemble ordonné (E, α) et une partie B de E admettant une borne supérieure (resp. borne inférieure) b dans (E, α), on appelle b *agrégat de* B et on le note $\bigvee B$ (resp. b *intersection de* B et on le note $\bigwedge B$).

On appelle *classe locale* un ensemble ordonné $(E, \propto)$ tel que:

1° $(E, \propto)$ est une classe inductive (i. e. [1] toute partie non vide de E admet une intersection).

2° *(Axiome de distributivité)* Soient $x \in E$ et A une partie majorée dans $(E, \propto)$; on a $x \wedge (\bigvee A) = \bigvee \{ x \wedge a \mid a \in A \}$, si x et $\bigvee A$ sont majorés. Il s'ensuit que cette égalité est aussi vraie si x et $\bigvee A$ ne sont pas majorés.

Si $(E, \propto)$ est une classe locale, une *sous-classe locale de* $(E, \propto)$ est un sous-ensemble ordonné $(E', \propto)$ de $(E, \propto)$ tel que:

1° $\bigvee A \in E'$ si A est une partie de E' majorée par un élément de E'.

2° $x \wedge x' \in E'$ si $x \in E'$ et $x' \in E'$ sont majorés par $x'' \in E'$.

On voit que $(E', \propto)$ est alors une classe locale.

On appelle *application locale* une application inductive [1]

$$f = ((E', \propto), \underline{f}, (E, \propto)),$$

où $(E, \propto)$ et $(E', \propto)$ sont des classes locales.

HYPOTHESE. On suppose que $f = ((E', \propto), \underline{f}, (E, \propto))$ est une application locale.

DEFINITION. *Deux éléments* x *et* x' *de* E *sont dits* f*-compatibles si* $f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x')$. *Une partie* B *de* E *est dite* f*-compatible si ses éléments sont deux à deux* f*-compatibles.*

Par exemple une partie majorée dans $(E, \propto)$ est f-compatible.

PROPOSITION. *Si* x *et* x' *sont deux éléments* f*-compatibles et si* y *et* y' *sont respectivement majorés par* x *et par* x', *alors* y *et* y' *sont aussi* f*-compatibles.*

Δ. On a $y \wedge x' = y \wedge (x \wedge x')$, où y et $x \wedge x'$ sont majorés par x, d'où

$$f(y \wedge x') = f(y) \wedge f(x \wedge x') = f(y) \wedge f(x) \wedge f(x') = f(y) \wedge f(x').$$

Ainsi y et x' sont f-compatibles; de même y et y' sont f-compatibles. ∇

PROPOSITION. *Si* A *et* A' *sont des parties majorées dans* $(E, \propto)$ *et si* x *et* x' *sont* f*-compatibles pour tout* $x \in A$ *et tout* $x' \in A'$, *alors les agrégats* a *de* A *et* a' *de* A' *sont* f*-compatibles.*

Δ. La relation $a \wedge a' = \vee\{x \wedge x' \mid x \in A,\ x' \in A'\}$ entraîne:

$$f(a\wedge a') = \vee\{f(x)\wedge f(x') \mid x \in A,\ x' \in A'\}$$
$$= (\vee f(A))\wedge(\vee f(A')) = f(a)\wedge f(a'). \quad \nabla$$

DEFINITION. *On appelle partie f-saturée une partie B de E qui est f-compatible, saturée par induction et par agrégation dans $(E,\propto)$. Si de plus $f(B)$ admet un agrégat dans $(E',\propto)$, on dit que B est f-complète.*

L'intersection d'une famille de parties f-saturées (resp. f-complètes) est f-saturée (resp. f-complète).

PROPOSITION. *Soit B une partie f-compatible. Il existe une plus petite partie f-saturée $\overline{B}$ contenant B. Si $f(B)$ admet un agrégat dans $(E',\propto)$, $\overline{B}$ est f-complète, et $\vee f(B) = \vee f(\overline{B})$. Si $\vee B$ existe, $\vee B = \vee\overline{B}$.*

Δ. Soit B' l'ensemble des éléments de E qui sont majorés par un élément de B. Alors B' est f-compatible (proposition ci-dessus). L'ensemble $\overline{B}$ des éléments $\vee A$, où A est une partie de B' majorée dans $(E,\propto)$, est aussi f-compatible. $\overline{B}$ est saturé par induction, car $z \propto \vee A$ entraîne

$$z = \vee\{x\wedge z \mid x\in A\} \in \overline{B}, \quad \text{si} \quad A \subset B'.$$

De plus $\overline{B}$ est saturé par agrégation, d'après l'égalité:

$$\bigvee_{i\in I}(\vee A_i) = \vee(\bigcup_{i\in I} A_i).$$

Ainsi $\overline{B}$ est f-saturé. Enfin $\overline{B}$ est évidemment contenu dans toute partie f-saturée contenant B. ∇

DEFINITION. *La partie $\overline{B}$ associée à B dans la proposition précédente est appelée partie f-saturée engendrée par B. On dit que f est complète si toute partie f-complète admet un agrégat dans $(E,\propto)$.*

Si f est complète, toute partie f-compatible B telle que $f(B)$ ait un agrégat dans $(E',\propto)$ admet un agrégat dans $(E,\propto)$, car la partie f-saturée $\overline{B}$ engendrée par B admet un agrégat, lequel est aussi un agrégat de B dans $(E,\propto)$.

THEOREME. *Soit F l'ensemble des parties f-complètes. $(F,\subset)$ est une classe locale pour la relation d'inclusion; l'application $g: B \to \vee f(B)$, si $B\in F$, définit une application locale complète de $(F,\subset)$ vers $(E',\propto)$;*

l'application j *associant à* $x \in E$ *l'ensemble de ses minorants dans* $(E, \propto)$ *définit un isomorphisme de* $(E, \propto)$ *sur une sous-classe locale de* $(F, \subset)$, *et l'on a* $\underline{f} = gj$.

Δ. 1° Toute intersection de parties f-complètes étant f-complète, F définit une sous-classe inductive du treillis des parties de E, de sorte que $(F, \subset)$ est inductive. Comme une famille $(B_i)_{i \in I}$ d'éléments de F admet son intersection ensembliste pour intersection dans $(F, \subset)$, tandis que son agrégat est la partie f-saturée $\bar{B}$ engendrée par sa réunion ensembliste B si $f(B)$ est majoré, on voit que $(F, \subset)$ est une classe locale.

2° Si x est un élément de E, on a

$$j(x) \in F \quad \text{et} \quad g(j(x)) = \vee f(j(x)) = f(x).$$

Soit B un élément de F contenu dans $j(x)$; comme B est majoré par x, il admet un agrégat b et, B étant saturé par agrégation, $b \in B$. Il s'ensuit $B = j(b) \in j(E)$, et $j(E)$ est saturé par induction dans $(F, \subset)$. Comme $x \propto y$ ssi $j(x) \subset j(y)$, la bijection j définit un isomorphisme de $(E, \propto)$ sur la sous-classe locale $(j(E), \subset)$ de $(F, \subset)$.

3° Si $(B_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de F majorée dans $(F, \subset)$ et si B est sa réunion ensembliste, on a

$$g(\bigvee_{i \in I} B_i) = \vee f(\bar{B}) = \vee f(B) = \vee(\bigcup_{i \in I} f(B_i)) = \bigvee_{i \in I}(\vee f(B_i)) = \bigvee_{i \in I} g(B_i).$$

4° Soient B et B' deux éléments de F tels que la réunion de B et B' soit une partie f-compatible. Alors

$$\begin{aligned} g(B) \wedge g(B') &= (\vee f(B)) \wedge (\vee f(B')) \\ &= \vee\{ f(x) \wedge f(x') \mid x \in B,\ x' \in B' \} \\ &= \vee\{ f(x \wedge x') \mid x \in B,\ x' \in B' \} \\ &= \vee f(B \cap B') = g(B \cap B'), \end{aligned}$$

car $B \cap B'$ est formé des éléments $x \wedge x'$, où $x \in B$ et $x' \in B'$. Cette formule est valable en particulier lorsque B et B' sont contenus dans un même élément de F.

5° Montrons que B et B' sont g-compatibles ssi leur réunion ensembliste A est une partie f-compatible. La condition est suffisante d'après la partie 4. Inversement supposons que B et B' soient g-compatibles et soient x et x' des éléments de A. Si x et x' appartiennent à B

(resp. à B'), ils sont f-compatibles par hypothèse. Si $x \in B$ et $x' \in B'$, alors $j(x)$ et $j(x')$ sont g-compatibles, puisqu'ils sont majorés par B et B' dans $(F, \subset)$. On en déduit

$$f(x) \wedge f(x') = g(j(x)) \wedge g(j(x')) = g(j(x) \cap j(x'))$$
$$= g(j(x \wedge x')) = f(x \wedge x'),$$

c'est-à-dire x et x' sont f-compatibles.

6° Soit M une partie g-compatible telle que $\vee g(M)$ existe. L'ensemble D réunion de M est f-compatible, en vertu de la partie 5. Par suite M admet $\bar{D}$ pour agrégat dans $(F, \subset)$. Ceci prouve que g définit une application locale complète de $(F, \subset)$ vers $(E', \propto)$. ∇

2. Complétion d'un foncteur local.

DEFINITION. On appelle *catégorie locale* une catégorie inductive [1] $(C^{\cdot}, \propto)$ telle que $(C, \propto)$ soit une classe locale. On appelle *foncteur local* (resp. *local strict*) un triplet $\bar{q} = ((C^{\cdot}, \propto), \underline{q}, (G^{\cdot}, \propto))$, où $(C^{\cdot}, \propto)$ et $(G^{\cdot}, \propto)$ sont des catégories locales, où $(C^{\cdot}, \underline{q}, G^{\cdot})$ est un foncteur et où $q = ((C, \propto), \underline{q}, (G, \propto))$ est une application locale (resp. locale stricte).

On montre facilement les résultats suivants, que nous n'utiliserons pas: Si $(C^{\cdot}, \propto)$ est une catégorie inductive et si $(C_o^{\cdot}, \propto)$ est une classe locale, $(C^{\cdot}, \propto)$ est une catégorie locale. Un foncteur ordonné

$$\bar{q} = ((C^{\cdot}, \propto), \underline{q}, (G^{\cdot}, \propto))$$

entre catégories locales est local (resp. local strict) ssi sa restriction

$$q_o = ((C_o^{\cdot}, \propto), \underline{q_\iota}, (G_o^{\cdot}, \propto))$$

aux classes ordonnées des unités est une application locale (resp. locale stricte).

Les foncteurs locaux entre catégories locales $(C^{\cdot}, \propto)$ telles que C appartienne à un univers $\mathfrak{U}$ forment une catégorie admettant un foncteur d'oubli vers la catégorie des applications associée à $\mathfrak{U}$. Les sous-structures de la catégorie locale $(C^{\cdot}, \propto)$ sont appelées ses *sous-catégories locales*. Ce sont les couples $(K^{\cdot}, \propto)$ tels que $K^{\cdot}$ soit une sous-catégorie de $C^{\cdot}$ et que $(K, \propto)$ soit une sous-classe locale de $(C, \propto)$.

HYPOTHESE. On suppose que $\bar{q} = ((C^{\cdot}, \propto), \underline{q}, (G^{\cdot}, \propto))$ est un foncteur local et soit q l'application locale sous-jacente. On désigne par a et b les applications locales de $(G,\propto)$ vers $(G_0^{\cdot},\propto)$ définies par les applications source et but de $G^{\cdot}$, par q_0 la restriction de q aux unités.

DEFINITION. *Une partie* B *de* G *est dite compatible dans* $(G^{\cdot},\propto)$ *si* B *est* a*-compatible et* b*-compatible;* $\bar{q}$ *est dit complet (resp. relativement complet si toute partie* q*-complète (resp.* q*-complète* B *telle que* $\alpha(B)$ *et* $\beta(B)$ *soient majorés) admet un agrégat dans* $(G,\propto)$.

PROPOSITION. *Soit* B *une partie de* G *et considérons les conditions:*

1° B est q-compatible et $q(B)$ est compatible dans $(C^{\cdot},\propto)$.

2° B est compatible dans $(G^{\cdot},\propto)$ et $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ sont q-compatibles.

La condition 2 entraîne 1. Si de plus q est une application locale stricte, la condition 2 est aussi conséquence de 1.

Δ. Soient y et y' deux éléments de B.

1° Supposons la condition 2 vérifiée et soient $z = q(y \wedge y')$, $z' = q(y) \wedge q(y')$. On a $z \propto z'$ et les relations:

$$\alpha(z) \propto \alpha(z') \propto \alpha(q(y)) \wedge \alpha(q(y')) = q(\alpha(y) \wedge \alpha(y')) = q(\alpha(y \wedge y')) = \alpha(z)$$

prouvent que $\alpha(z) = \alpha(z') = \alpha(q(y)) \wedge \alpha(q(y'))$. De même

$$\beta(z) = \beta(z') = \beta(q(y)) \wedge \beta(q(y')), \quad \text{d'où} \quad z = z',$$

car $(C^{\cdot},\propto)$ est une catégorie ordonnée. Donc y et y' sont q-compatibles, et $q(y)$ et $q(y')$ sont compatibles dans $(C^{\cdot},\propto)$.

2° Supposons la condition 1 satisfaite. Posons $e = \alpha(y \wedge y')$ et $e' = \alpha(y) \wedge \alpha(y')$. Alors e est majoré par e' et l'on trouve:

$$q(e) \propto q(e') = q(\alpha(y) \wedge \alpha(y')) \propto q(\alpha(y)) \wedge q(\alpha(y')) =$$
$$= \alpha(q(y) \wedge q(y')) = \alpha(q(y \wedge y')) = q(e);$$

par suite $q(e) = q(e') = q(\alpha(y)) \wedge q(\alpha(y'))$ et, si q est stricte, $e = e'$. Il s'ensuit que B est a-compatible et que $\alpha(B)$ est q-compatible. De même B est b-compatible et $\beta(B)$ est q-compatible. ∇

COROLLAIRE. *Si* q *est un foncteur local strict et si* B *est une partie* q*-complète,* B *est compatible dans* $(G^{\cdot},\propto)$ *et* $\alpha(B)$ *et* $\beta(B)$ *sont* q*-compatibles.*

Δ. $q(B)$ étant majoré, il est compatible dans $(C^{\cdot}, \alpha)$. ∇

DEFINITION. *On appelle catégorie ordonnée fortement régulière une catégorie ordonnée régulière* [1] $(G^{\cdot}, \alpha)$ *vérifiant la condition:*
(P) Si f *est un élément de* G *et* E *une partie de* $G_0^{\cdot}$ *telle que* $\alpha(f) = \vee E$ *(resp. que* $\beta(f) = \vee E$*), on a* $f = \vee(fE)$ *(resp.* $f = \vee(Ef)$*).*

(On désigne par fE *l'ensemble des pseudoproduits* fe'*, où* $e' \in E$*).*

Comme exemples de catégories ordonnées fortement régulières, citons les groupoïdes inductifs [3], c'est-à-dire les catégories inductives $(G^{\cdot}, \alpha)$ telles que $G^{\cdot}$ soit un groupoïde et que, si $x \in G$ et si e est une unité majorée par $\alpha(x)$, alors il existe un et un seul élément x' plus petit que x et ayant e pour source. Dans ce cas, x' est dit *élément induit par* x *sur* e. On montre qu'un groupoïde inductif est ordonné (i. e. que $y \alpha x$ entraîne $y^{-1} \alpha x^{-1}$) et que $e' \in G_0^{\cdot}$ si $e' \alpha e$, où e est une unité.

Soit $(H, \subset)$ la classe locale formée des classes q-complètes, et soit Q l'application $B \to \vee q(B)$ de H dans C qui définit (paragraphe 1) une application locale de $(H, \subset)$ vers (C, α). Soit j l'application de G sur une partie de H associant à x l'ensemble de ses minorants dans (G, α). Comme dans le paragraphe 1, nous notons $\overline{B}$ la partie q-saturée engendrée par une partie q-compatible B.

THEOREME (de complétion d'un foncteur local). *Supposons que* $\overline{q}$ *soit un foncteur local strict et* $(G^{\cdot}, \alpha)$ *une catégorie ordonnée fortement régulière. Alors, avec les notations précédentes,* $(H^{\odot}, \subset)$ *est une catégorie locale régulière, la loi de composition étant définie par:*

$$(B', B) \to B' \odot B = \overline{B'.B} \quad ssi \quad \overline{\alpha(B')} = \overline{\beta(B)}.$$

Q *définit un foncteur local complet* $\overline{Q}$ *de* $(H^{\odot}, \subset)$ *vers* $(C^{\cdot}, \alpha)$ *et* j *définit un isomorphisme de* $(G^{\cdot}, \alpha)$ *sur une sous-catégorie locale de* $(H^{\odot}, \subset)$.

1° Si B et B' appartiennent à H, alors $B'.B$ est q-compatible. En effet, soient $x'.x$ et $y'.y$ des éléments de $B'.B$, où x et y appartiennent à B, x' et y' à B'. Comme

$$\alpha(y' \wedge x') = \alpha(y') \wedge \alpha(x') = \beta(y) \wedge \beta(x) = \beta(y \wedge x),$$

le composé $z' = (y' \wedge x').(y \wedge x)$ est défini, et $z' \alpha z = y'.y \wedge x'.x$. De

$$\alpha(z')\propto\alpha(z)\propto\alpha(y)\wedge\alpha(x) = \alpha(y\wedge x) = \alpha(z'),$$

on déduit $\alpha(z') = \alpha(z)$; de même $\beta(z') = \beta(z)$, d'où $z = z'$. De plus

$$q(z) = q(y'\wedge x').\, q(y\wedge x) = (q(y')\wedge q(x')).(q(y)\wedge q(x)) =$$
$$= (q(y').\, q(y))\wedge(q(x').\, q(x)) = q(y'.\,y)\wedge q(x'.\,x).$$

Il en résulte que $B'.B$ engendre une partie q-saturée $\overline{B'.B}$; celle-ci est q-complète, $q(\overline{B'.B})$ étant majoré par le pseudoproduit $(\vee q(B'))(\vee q(B))$. Remarquons que, $(G^{\cdot},\propto)$ étant régulière, $B'.B$ est saturé par induction.

2° Soit B un élément de H. La partie $\alpha(B)$ étant q-compatible d'après le corollaire précédent, elle engendre une partie q-complète $\overline{\alpha(B)}$ et $\overline{\alpha(B)}$ est contenu dans $X = \overline{\alpha(\overline{\alpha(B)})}$. La partie $\alpha(B)$ est saturée par induction dans $(G_0^{\cdot},\propto)$ (mais non dans $(G,\propto)$), puisque les relations $x\in B$, $e\in G^{\cdot}$ et $e\propto\alpha(x)$ entraînent $e = \alpha(xe)$, où $xe\in B$. Si D est contenu dans $\overline{\alpha(B)}$ et majoré, on trouve

$$\alpha(\vee D) = \vee\alpha(D)\in\overline{\alpha(B)},$$

de sorte que $\alpha(\overline{\alpha(B)})$, et a fortiori X, sont contenus dans $\overline{\alpha(B)}$, c'est-à-dire $X = \overline{\alpha(B)}$. Ainsi l'application $B\to\overline{\alpha(B)}$ est une rétraction. D'une façon analogue, $B\to\overline{\beta(B)}$ est une rétraction. On voit que $B = \bar{A}$ a pour conséquence $\overline{\alpha(B)} = \overline{\alpha(\bar{A})} = \overline{\alpha(A)}$.

3° Notons $B'\odot B$ l'élément $\overline{B'.B}$ de H lorsque B et B' sont des éléments de H tels que $\overline{\alpha(B')} = \overline{\beta(B)}$. Supposons qu'il en soit ainsi, et posons $C = B'\odot B$. Etant donné que $\alpha(B'.B)$ est contenu dans $\alpha(B)$, on trouve

$$\overline{\alpha(C)} = \overline{\alpha(\overline{B'.B})} = \overline{\alpha(B'.B)}\subset\overline{\alpha(B)}.$$

Pour tout élément x de B, on a $\beta(x) = \bigvee_{i\in I}\alpha(y_i)$, où $y_i\in B'$. En vertu de la condition (P), $x = \bigvee_{i\in I}\alpha(y_i)x$. Il s'ensuit $\alpha(x) = \bigvee_{i\in I}\alpha(y_ix)$, où $y_ix\in B'B = B'.B$. Donc $\alpha(B)$ est contenu dans $\overline{\alpha(C)}$ et $\overline{\alpha(B)} = \overline{\alpha(C)}$. On obtient de même $\overline{\beta(B)} = \overline{\beta(C)}$.

3° Si le composé $D = B''\odot(B'\odot B)$ est défini, la condition (P) entraîne $D = \overline{B''.B'.B}$, car

$$z.\bigvee_{i\in I}(y_i.\,x_i) = \bigvee_{i\in I}z_i.\,y_i.\,x_i,\quad \text{où}\quad z_i = z\beta(y_i)\in B'',$$

si $y_i\in B'$, $z\in B''$ et $x_i\in B$. L'associativité en résulte, $\overline{B''.B'.B}$ étant aussi égal à $(B''\circledcirc B')\circledcirc B$. Donc $H^{\circledcirc}$ est une catégorie. Elle admet pour classe d'objets l'ensemble des classes q_o-complètes, car l'application $\overline{\alpha(B)} \to \alpha(\overline{\alpha(B)})$ est une bijection. De plus $j(y)\circledcirc j(x)$ est défini ssi $\alpha(y) = \beta(x)$, et dans ce cas il est égal à $j(y.x)$.

4° Soient B et B' des éléments de H tels que $B' \subset B$, $\overline{\alpha(B)} = \overline{\alpha(B')}$ et $\overline{\beta(B)} = \overline{\beta(B')}$. Si $y \in B$, on a $\alpha(y) = \bigvee_{i \in I} \alpha(y_i)$, $\beta(y) = \bigvee_{j \in J} \beta(y'_j)$, où $y_i \in B'$, $y'_j \in B'$; d'où $y = \bigvee_{i \in I}(y \wedge y_i) \vee \bigvee_{j \in J}(y \wedge y'_j)$, et $B = B'$.

5° Soient B et B' des éléments de H contenus dans $B'' \in H$. Alors $B \cap B' = \{ y \wedge y' \mid y \in B, y' \in B' \}$. Si $x = \bigvee_{i \in I} x_i = \bigvee_{j \in J} x'_j$, avec $x_i \propto \alpha(y_i)$, $x'_j \propto \alpha(y'_j)$, $y_i \in B$, $y'_j \in B'$, on a $x = \bigvee_{m \in (I \times J)} z_m$, où

$$z_{(i,j)} = x_i \wedge x'_j \propto \alpha(y_i) \wedge \alpha(y'_j) = \alpha(y_i \wedge y'_j) \in \alpha(B \cap B'),$$

de sorte que $\overline{\alpha(B \cap B')} = \overline{\alpha(B)} \cap \overline{\alpha(B')}$. Même résultat pour β.

6° Si B_i est contenu dans B pour tout $i \in I$ et si A est la réunion de $(B_i)_{i \in I}$, de l'égalite $\bar{A} = \bigvee_{i \in I} B_i$, on déduit

$$\overline{\alpha(\bigvee_{i \in I} B_i)} = \overline{\alpha(\bar{A})} = \overline{\bigcup_{i \in I} \overline{\alpha(B_i)}} = \bigvee_{i \in I} \overline{\alpha(B_i)}.$$

Par suite $(H^{\circledcirc}, \subset)$ est une catégorie locale.

7° Soient B un élément de H et E une unité de $H^{\circledcirc}$ contenue dans $\overline{\alpha(B)}$. Si B' est l'ensemble des éléments y de B tels que $\alpha(y) \in E$, on a $\overline{B'} = B'$ et $\overline{\alpha(B')} = E$, de sorte que le pseudoproduit BE est identique à B' et admet E pour unité à droite. De même $E'B$ admet E' pour unité à gauche, si $E' \in H^{\circledcirc}_o$ et $E' \subset \overline{\beta(B)}$.

8° Supposons B'' contenu dans $B' \circledcirc B$, où $B'' \in H$. Notons D (resp. D') l'ensemble des $y \in B$ (resp. $y' \in B'$) tels qu'il existe $y' \in B'$ (resp. $y \in B$) avec $y'.y \in B''$; on montre que $B'' = \bar{D}' \circledcirc \bar{D}$. Ainsi $(H^{\circledcirc}, \subset)$ est une catégorie locale régulière , et $\bar{Q} = ((C^{\bullet}, \propto), \underline{Q}, (H^{\circledcirc}, \subset))$ est un foncteur local. ∇

DEFINITION. *Avec les notations du théorème, on appelle* $(H^{\circledcirc}, \subset)$ *la* $\bar{q}$-*complétion de* $(G^{\bullet}, \propto)$ *et* $\bar{Q}$ *le foncteur local complété de* $\bar{q}$.

REMARQUE. On peut montrer que le foncteur local complété de $\bar{q}$ résoud le problème du prolongement «universel» de $\bar{q}$ en un foncteur local complet de même but. En fait la complétion d'une application locale est un cas particulier de prolongement universel d'un foncteur p en un foncteur P de même but, de sorte que, si F est un foncteur (vers la source de P) section partielle de P et si $P.F$ admet une limite inductive, alors F admet une limite inductive dans P. Si de plus p est sous-jacent à un foncteur double, on peut demander que le prolongement obtenu soit aussi sous-jacent à un foncteur double de même but. Le théorème de complétion d'un foncteur local donne une solution de ce problème dans le cas où le foncteur double est associé à un foncteur local. (On sait [3] qu'à une catégorie ordonnée est canoniquement associée une catégorie double.) Le problème général pourrait être abordé à l'aide de méthodes analogues à celles qui sont employées dans [5].

DEFINITION. *On dit que le foncteur local $\bar{q}$ est suprarégulier si*

$$q(xe) = q(x)q(e) \quad \text{et} \quad q(e'x) = q(e')q(x)$$

lorsque $e \propto \alpha(x)$ *et* $e' \propto \beta(x)$.

PROPOSITION. *Si l'on suppose de plus dans le théorème que $\bar{q}$ est suprarégulier et fidèle, alors $\bar{Q}$ est fidèle.*

$\triangle$. 1° Montrons que, si x et x' sont deux éléments de G tels que $\alpha(x)$ et $\alpha(x')$ soient q-compatibles ainsi que $\beta(x)$ et $\beta(x')$, et que $q(x)$ et $q(x')$ soient majorés par un z, alors x et x' sont q-compatibles. En effet, posons

$$e = \alpha(x) \wedge \alpha(x') \quad \text{et} \quad e' = \beta(x) \wedge \beta(x').$$

Le pseudoproduit $z' = q(e')z\,q(e)$ est l'intersection de $q(x)$ et $q(x')$ et il admet $q(e)$ pour source et $q(e')$ pour but; par suite z' est aussi égal à $q(e')q(x)q(e)$. Il s'ensuit que $q(xe) = q(x)q(e)$ majore z', de sorte que, q étant une application ordonnée stricte, e' est majoré par $\beta(xe)$. On en déduit

$$q(e'xe) = q(e')q(xe) = q(e')q(x)q(e) = z',$$
$$\beta(e'xe) = e' \quad \text{et} \quad \alpha(e'xe) = e .$$

De même $e'x'e$ appartient à $e'.G.e$ et $q(e'x'e) = z'$. Ceci entraîne $e'xe = e'x'e$, car $\bar{q}$ est fidèle. Donc

$$e'xe = x \wedge x' \in e'.G.e \quad \text{et} \quad q(x \wedge x') = q(x) \wedge q(x').$$

2° Soient B et B' deux éléments de H de source E, de but E' et tels que $\bar{Q}(B) = \bar{Q}(B')$. Si x est un élément de B et x' un élément de B', d'aprés la partie 1, x et x' sont q-compatibles. Il en résulte que la réunion A de B et B' est q-compatible; la partie q-saturée $\overline{A}$ qu'elle engendre est un élément de H majorant B et B', de source E et de but E'. Donc, $(H^{\odot}, \subset)$ étant une catégorie ordonnée, $B = \overline{A} = B'$. Ainsi $\overline{Q}$ est fidèle. ∇

COROLLAIRE. *Si les conditions de la proposition sont vérifiées, l'application* $\delta : B \to (\overline{\beta(B)}, Q(B), \overline{\alpha(B)})$, *où* $B \in H$, *est une bijection de* H *sur l'ensemble* H' *des triplets* (E', z, E), *où* E *et* E' *sont des unités de* $H^{\odot}$ *et* $z \in \overline{Q}(E').C.\overline{Q}(E)$, *tels que, si* A *est l'ensemble des* x *appartenant à* $E'.G.E$ *vérifiant* $q(x) \propto z$, *alors* $\overline{\alpha(A)} = E$ *et* $\overline{\beta(A)} = E'$.

Δ. Si B appartient à H, $\delta(B)$ appartient évidemment à H'. Soit $h = (E', z, E) \in H'$; la partie 1 de la démonstration précédente prouve que A est q-compatible; par suite $\overline{A} \in H$ et $h = \delta(\overline{A})$. ∇

3. Elargissement complet.

HYPOTHESE. Soient $p = (C^{\cdot}, \underline{p}, K^{\cdot})$ un foncteur fidèle, $K^{\cdot}_{\gamma}$ le groupoïde des inversibles de $K^{\cdot}$ et p_{γ} le foncteur de $K^{\cdot}_{\gamma}$ vers $C^{\cdot}_{\gamma}$ restriction de p.

On notera $T^{\cdot}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets

$$(x', x, y), \text{ où } y \in K,\ x' \in C^{\cdot}_{\gamma}.\beta(p(y)),\ x \in C^{\cdot}_{\gamma}.\alpha(p(y)),$$

la loi de composition étant définie par:

$$(\hat{x}', \hat{x}, \hat{y}).(x', x, y) = (\hat{x}', x, \hat{y}.y) \text{ si, et seulement si,}$$
$$\alpha(\hat{y}) = \beta(y) \quad \text{et} \quad x' = \hat{x}.$$

Soit r la relation sur T définie par:

$$(x', x, y) \sim (x'.p(z'), x.p(z), z'^{-1}.y.z), \text{ si}$$
$$z \in \alpha(y).K^{\cdot}_{\gamma} \quad \text{et} \quad z' \in \beta(y).K^{\cdot}_{\gamma}.$$

PROPOSITION. *1° r est une relation d'équivalence bicompatible sur $T^{\cdot}$, et il existe une catégorie $L^{\cdot}$ quotient strict de $T^{\cdot}$ par r.*

2° L'application $y \to (p(\beta(y)), p(\alpha(y)), y) \bmod r$ définit un fonc- k de $K^{\cdot}$ sur une sous-catégorie $K'^{\cdot}$ de $L^{\cdot}$.

3° $K'^{\cdot}$ est une catégorie quotient de $K^{\cdot}$ par le sous-groupoïde de $K^{\cdot}$ noyau de p_{γ}. En particulier k est un isomorphisme ssi p_{γ} est bien fidèle.

4° L'application $(x', x, y) \, mod \, r \to x'.p(y).x^{-1}$ *définit un foncteur fidèle* P *de* $L^{\cdot}$ *vers* $C^{\cdot}$ *et* P_γ *est bien fidèle.*

Cette proposition est démontrée dans [2] (chapitre V), où l'on indique quel problème universel résoud P.

$L^{\cdot}_o$ s'identifie à la classe quotient de l'ensemble des couples (x, s) tels que $s \in K^{\cdot}_o$ et $x \in C^{\cdot}_\gamma . p(s)$ par la relation d'équivalence:

$$(x, s) \sim (x.p(y), s') \text{ s'il existe } y \in s.K^{\cdot}_\gamma . s'.$$

DEFINITION. *Avec les notations de la proposition, on appelle* P *l'élargissement de* p.

Soit $\overline{p} = ((C^{\cdot}, \alpha), \underline{p}, (K^{\cdot}, \alpha))$ *un foncteur local.* Notons $\overline{p}_\gamma$ le foncteur ordonné $((C^{\cdot}_\gamma, \alpha), \underline{p}\,\iota, (K^{\cdot}_\gamma, \alpha))$ restriction de $\overline{p}$. On obtient une catégorie ordonnée $(T^{\cdot}, \alpha)$ en munissant T de la relation d'ordre:

$$(\hat{x}', \hat{x}, \hat{y}) \, \alpha \, (x', x, y) \quad \text{ssi} \quad \hat{x} \, \alpha \, x, \quad \hat{x}' \, \alpha \, x', \quad \hat{y} \, \alpha \, y.$$

THEOREME (d'élargissement local). *Avec les notations précédentes, on suppose que* $\overline{p}$ *est un foncteur local strict, que* $(K^{\cdot}, \alpha)$ *est fortement régulière, que* $(C^{\cdot}_\gamma, \alpha)$ *et* $(K^{\cdot}_\gamma, \alpha)$ *sont des groupoïdes inductifs et que* $\overline{p}_\gamma$ *est relativement complet. Alors il existe une catégorie locale* $(L^{\cdot}, \alpha)$ *fortement régulière, où* α *est la relation sur* L *quotient par* r *de la relation d'ordre* α *sur* T, *et* P *définit un foncteur local strict*

$$\overline{P} = ((C^{\cdot}, \alpha), \underline{P}, (L^{\cdot}, \alpha)).$$

Δ. 1° Soient $t = (x', x, y) \in T$ et $u = t \, mod \, r$. Si $u' \in L$, on a $u' \, \alpha \, u$ ssi il existe $t' \in T$ tel que $t' \, \alpha \, t$ et $u' = t' \, mod \, r$. En effet l'existence d'un tel t' entraîne évidemment $u' \, \alpha u$. Inversement soit $u' \, \alpha \, u$. Il existe des représentants $\hat{t} = (\hat{x}', \hat{x}, \hat{y})$ de u et $\hat{t}' = (\hat{x}''', \hat{x}'', \hat{y}')$ de u' tels que $\hat{t}' \, \alpha \, \hat{t}$. Par définition, il existe des inversibles z et z' tels que

$$\hat{y} = z'^{-1}.y.z, \quad x'.p(z') = \hat{x}' \quad \text{et} \quad x.p(z) = \hat{x}.$$

Comme $(H^{\cdot}_\gamma, \alpha)$ est un groupoïde inductif, il existe un unique élément $\hat{z}'$ induit par z' sur $\beta(\hat{y})$ et un élément $\hat{z}$ induit par z sur $\alpha(\hat{y})$. Si l'on pose

$$y' = \hat{z}'.\hat{y}'.\hat{z}^{-1}, \quad x''' = \hat{x}'''.p(\hat{z}')^{-1}, \quad x'' = \hat{x}''.p(\hat{z})^{-1},$$

le triplet (x''', x'', y') est un représentant $t' \in u'$ tel que $t' \, \alpha \, t$. L'application associant t' à u' est une bijection sur l'ensemble des minorants de t dans $(T, \propto)$ de l'ensemble des minorants de u dans $(L, \propto)$.

2° On en déduit aisément qu'il existe un ensemble ordonné $(L, \propto)$ quotient de $(T, \propto)$ par r. Montrons qu'une famille $\xi = (u_i)_{i \in I}$ d'éléments majorés de L admet un agrégat dans $(L, \propto)$. Soient

$$u = (x', x, y) \bmod r \quad \text{et} \quad \hat{u} = (\hat{x}', \hat{x}, \hat{y}) \bmod r$$

deux majorants de ξ. D'après la partie 1, pour tout i il existe des représentants $t_i = (x'_i, x_i, y_i)$ et $\hat{t}_i = (\hat{x}'_i, \hat{x}_i, \hat{y}_i)$ de u_i tels que

$$t_i \propto (x', x, y) \quad \text{et} \quad \hat{t}_i \propto (\hat{x}', \hat{x}, \hat{y}).$$

Il existe des agrégats $\bar{t} = (\bar{x}', \bar{x}, \bar{y})$ de $(t_i)_{i \in I}$ et $\bar{t}' = (\bar{x}''', \bar{x}'', \bar{y}')$ de $(\hat{t}_i)_{i \in I}$; il existe aussi des inversibles z_i et z'_i vérifiant

$$\hat{y}_i = z_i'^{-1} . y_i . z_i, \quad x'_i . p(z'_i) = \hat{x}'_i \quad \text{et} \quad x_i . p(z_i) = \hat{x}_i .$$

Les familles $(\alpha(z_i))_{i \in I}$ et $(\beta(z_i))_{i \in I}$ admettent $\alpha(\bar{y}')$ et $\alpha(\bar{y})$ respectivement pour agrégats. Comme $p(z_i) = x_i^{-1} . \hat{x}_i$ est majoré par $x^{-1} \hat{x}$, la famille $(p(z_i))_{i \in I}$ admet un agrégat. Le foncteur local $\bar{p}_\gamma$ étant relativement complet, il en résulte que $(z_i)_{i \in I}$ admet un agrégat z dans $(K^{\cdot}_\gamma, \propto)$; de même $(z'_i)_{i \in I}$ a un agrégat z' dans $(K^{\cdot}_\gamma, \propto)$; le composé $\bar{y} . z$ est défini; les inversibles $\bar{x} . p(z)$ et $\bar{x}''$ de $C^{\cdot}$ sont égaux, car ils sont majorés par $\hat{x}$ et ont même source; d'une manière analogue $\bar{x}' . p(z') = \bar{x}'''$. Enfin $z' . \bar{y}' = \bar{y} . z$, ces deux éléments étant l'agrégat de la famille $(y_i . z_i)_{i \in I}$ dans $(K, \propto)$. Il s'ensuit $\bar{t} \sim \bar{t}' \bmod r$, de sorte que $\bar{u} = \bar{t} \bmod r$ est l'agrégat de $(u_i)_{i \in I}$ dans $(L, \propto)$. Ainsi $(L, \propto)$ est une classe inductive. La démonstration du théorème s'achève alors sans difficultés. ∇

REMARQUE. Les démonstrations qui sont seulement esquissées ici seront données en détail dans [6] .

Le théorème précédent montre que $\bar{P}$ remplit les conditions du théorème de complétion d'un foncteur local. On peut donc poser:

DEFINITION. *Avec les hypothèses du théorème la $\bar{P}$-complétion de $(L^{\cdot}, \propto)$ est appelée élargissement p-complet de $(K^{\cdot}, \propto)$ au-dessus de $(C^{\cdot}, \propto)$.*

EXEMPLES. 1° Si $p = p_\gamma$ et si p est un foncteur d'hypermorphismes, on retrouve le théorème d'élargissement complet d'une espèce de structures locales [4] .

2° Prenons pour p le foncteur d'oubli vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications de la catégorie Δ^r des applications r fois différentiables au sens de [7] entre ouverts d'espaces vectoriels topologiques localement convexes (resp. des applications r fois Fréchet-différentiables entre ouverts d'espaces de Banach). Si l'on munit $\mathfrak{M}$ et Δ^r des relations d'ordre «restrictions», p est sous-jacent à un foncteur local $\bar{p}$ vérifiant les conditions du théorème d'élargissement local. Donc (Δ^r, α) admet un élargissement p-complet $(\mathfrak{D}^r, \alpha)$ au-dessus de $(\mathfrak{M}, \alpha)$. Celui-ci est la catégorie des applications r fois différentiables entre variétés r fois différentiables modelées sur un espace localement convexe (resp. sur un espace de Banach). La construction de cet élargissement complet est équivalente à la construction usuelle: Si B est une partie $\bar{p}$-complète unité de $\mathfrak{D}^r$, l'ensemble des couples (x, s) tels que $(x, x, s) \bmod r \in B$ forme un atlas complet V compatible avec le pseudogroupe des difféomorphismes appartenant à Δ^r, et la donnée de cet atlas détermine entièrement B. Comme $\bar{p}$ est fidèle et suprarégulier, P est fidèle (dernière proposition paragraphe 2), de sorte qu'une application différentiable s'identifie à un triplet (V', h, V), où V et V' sont des atlas complets et où h est une application entre les ensembles sous-jacents à V et à V' «compatible» avec V et V', i.e. telle que $x'^{-1} h x$ définisse une application r fois différentiable d'un ouvert de s vers s', pour tout $(x, s) \in V$ et $(x', s') \in V'$.

Bibliographie.

0. C. EHRESMANN, *Algèbre 1ère partie*, C. D. U., Paris (1968).
1. C. EHRESMANN, Catégories structurées généralisées, *Cahiers de Top. et Géo. diff.* X, 1, Dunod (1968).
2. C. EHRESMANN, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris (1965).
3. C. EHRESMANN, Catégories structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 80, Paris (1963), 349 - 426.
4. C. EHRESMANN, Espèces de structures sous-inductives, *Cahiers Top. et Géo. diff.* VII, Paris (1965).
5. C. EHRESMANN, *Prolongements universels d'un foncteur par adjonction de limites*, Dissertationes Math. 64, Varsovie (1969).
6. M.-C. LEBLOND, Catégories de foncteurs ordonnés (à paraître dans *Esquisses Mathématiques*).
7. A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, *Jour. d'Analyse Math. Jérusalem* XIII (1964), 1-114.

Département de Mathématiques
Tours 45 - 55
Faculté des Sciences
9 Quai Saint-Bernard
75 - PARIS (5^e).