

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

MARIO CHARTRELLE

## Sur la catégorie des applications quasi-continues

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 11, n° 2 (1969), p. 215-226

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1969\\_\\_11\\_2\\_215\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_2_215_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LA CATEGORIE DES APPLICATIONS QUASI-CONTINUES

par Mario CHARTRELLE

### Introduction.

Les quasi-topologies s'introduisent d'une manière naturelle dès qu'on veut considérer de « bonnes » structures sur l'ensemble des applications continues entre deux espaces topologiques quelconques [ 2 ]. Dans cet article nous allons étudier les propriétés algébriques de la catégorie  $P^o$  des applications quasi-continues associée à un univers  $U$ , et de son foncteur d'oubli  $\hat{\theta}$  vers la catégorie  $\mathfrak{M}^o$  des applications.

Le 1<sup>er</sup> paragraphe commence par rappeler les définitions relatives aux quasi-topologies (introduites par Kowalsky sous le nom de Limesraum [ 8 ]) et les premières propriétés de la catégorie  $P^o$  [ 2 ]. Nous démontrons ensuite que toute quasi-topologie  $\pi$  sur  $E \in U$  peut être « universellement » plongée dans une quasi-topologie séparée et dans une quasi-topologie compacte associées à  $U$ .

Le 2<sup>ème</sup> paragraphe est consacré à l'étude de la quasi-topologie  $\lambda(\pi', \pi)$  de la convergence locale [ 2 ] sur l'ensemble des applications quasi-continues de  $\pi$  vers  $\pi'$ . Nous montrons que celle-ci a des propriétés analogues à celles [ 3 ] de la topologie de la convergence compacte sur l'ensemble des applications continues entre espaces topologiques localement compacts (à laquelle elle s'identifie si  $\pi$  et  $\pi'$  s'identifient à des topologies et si  $\pi$  est localement compacte :  $(P^o, \lambda)$  est une catégorie fortement  $\hat{\theta}$ -dominée [ 5 ],  $\hat{\theta}$ -hyperdominée et tensoriellement  $\hat{\theta}$ -dominée [ 3 ]. En particulier  $P^o$  est une catégorie cartésienne fermée au sens de [ 7 ], et  $(P^o, \hat{\theta})$  est un couple complet fermé selon [ 1 ] (résultat implicitement admis dans la dernière phrase de [ 1 ]).

Les notations et la terminologie sont celles de [ 4 ].

## 1. Quasi-topologies.

Soient  $E$  un ensemble et  $(F(E), \mathcal{C})$  la classe locale de tous les filtres sur  $E$  ordonnée par la relation d'inclusion.

On appelle *idéal* de  $F(E)$  un filtre de  $(F(E), \mathcal{C})$ . c'est-à-dire une partie  $I$  de  $F(E)$  saturée par co-induction ( $F \in I$  et  $F \subset F'$  entraînent  $F' \in I$ ) et telle que, si  $F \in I$  et  $F' \in I$ , alors  $F \wedge F' \in I$  (en notant  $F \wedge F'$  le filtre intersection dont les éléments sont les ensembles  $A \cup A'$ , où  $A \in F$  et  $A' \in F'$ ).

Si  $(E', f, E)$  est une application et  $F$  un filtre sur  $E$ , on note  $fF$  le filtre sur  $E'$  engendré par  $f(F)$ .

### 1. DEFINITIONS.

a) On appelle *quasi-topologie sur  $E$*  une application  $\pi$  de  $E$  dans l'ensemble des idéaux de  $F(E)$  telle que le filtre  $x^\infty$  des sur-ensembles de  $x$  appartienne à  $\pi(x)$  pour tout  $x \in E$ .

Si  $F \in \pi(x)$ , on dit que  $F$  *quasi-converge* vers  $x$  et on écrit  $F \pi x$ .

$(E, \pi)$  est appelé *espace quasi-topologique*.

(b) La quasi-topologie  $\pi$  est *séparée* si  $\pi(x) \wedge \pi(y) = \emptyset$  lorsque  $x \neq y$ .

(c) *Point pseudo-adhérent*. *Ensemble pseudo-fermé* : Soit  $(E, \pi)$  un espace quasi-topologique. Si  $F$  est un filtre sur  $E$ , tel qu'il existe un ultrafiltre  $F'$  qui contient  $F$  et qui quasi-converge vers  $x$ , on dit que  $x$  est un *point pseudo-adhérent* à  $F$ . Une partie  $E' \subset E$  est dite *pseudo-fermée* (pour  $\pi$ ) si elle contient ses points pseudo-adhérents, i.e. les points pseudo-adhérents à un filtre auquel appartient  $E'$ .

d) *Quasi-topologie compacte* : On dit que l'espace quasi-topologique  $(E, \pi)$  est *compact* si tout ultrafiltre sur  $E$  quasi-converge, si tout filtre qui admet un seul point pseudo-adhérent quasi-converge et si  $\pi$  est séparée.

e) On appelle *application quasi-continue* un triplet  $(\pi', f, \pi)$ , où  $\pi'$  et  $\pi$  sont des quasi-topologies sur  $E'$  et  $E$  respectivement, et où  $(E', f, E)$  est une application telle que  $F \pi x$  entraîne  $fF \pi' f(x)$  pour

tout  $x \in E$ . On pose :

$$\pi = \alpha(\pi', f, \pi) \text{ et } \pi' = \beta(\pi', f, \pi).$$

PROPRIETES.

a) Si  $\pi$  est une quasi-topologie sur  $E$ , l'ensemble des parties  $V$  de  $E$  telles que  $V \in \hat{\Lambda}\pi(x)$  pour tout  $x \in V$  définit une topologie  $\hat{\tau}(\pi)$  sur  $E$ . Et tout filtre quasi-convergeant vers  $x$  dans  $\pi$  converge vers  $x$  dans  $\hat{\tau}(\pi)$ .

b) Si  $(\pi', f, \pi)$  est une application quasi-continue,  $(\hat{\tau}(\pi'), f, \hat{\tau}(\pi))$  est continue.

2. Soient  $U$  un univers et  $P_o$  l'ensemble des espaces quasi-topologiques  $(E, \pi)$  tels que  $E \in U$ ,  $P^o$  la catégorie des applications quasi-continues entre éléments de  $P_o$  munie de la loi de composition :

$$(\pi'', f', \bar{\pi}') \circ (\pi', f, \pi) = (\pi'', f' \circ f, \pi)$$

si, et seulement si,  $\bar{\pi}' = \pi'$ .

On identifie la quasi-topologie  $\pi$  sur  $E$  à l'unité  $i_\pi = (\pi, i_E, \pi)$  de  $P^o$ . En associant  $(E', f, E)$  à une application quasi-continue  $(\pi', f, \pi)$  on définit un foncteur d'oubli  $\hat{\theta}$  de  $P^o$  vers la catégorie  $\mathfrak{M}^o$  des applications associées à  $U$ .

PROPRIETES. [ 2 ]

a)  $\hat{\theta}$  est un foncteur d'homomorphismes saturé.

b)  $P^o$  est à  $I$ -produits pour tout  $I \in U$  : Si  $(\pi_i)_{i \in I}$  est une famille de quasi-topologies, et si  $(E_i, \pi_i) \in P_o$  et  $I \in U$ , la quasi-topologie produit est  $\pi = \prod_{i \in I} \pi_i$ , quasi-topologie sur  $E = \prod_{i \in I} E_i$  telle que l'on ait  $F\pi(x_i)_{i \in I}$  si, et seulement si,  $p_i F \pi_i x_i$  pour tout  $i \in I$ , où  $p_i$  est la projection canonique de  $E$  sur  $E_i$ . Si  $\pi_i$  est séparée (resp. compacte) pour tout  $i \in I$ , il en est de même pour  $\pi$ .

c)  $\hat{\theta}$  est  $\mu$ -étalant : Si  $E' \subset E$ , la  $\hat{\theta}$ -sous-structure  $\pi/E'$  de  $\pi$  sur  $E'$  est la quasi-topologie définie par  $F \in (\pi/E')(x)$ , où  $x \in E'$ , si, et seulement si,  $\bar{F}\pi x$  (en appelant  $\bar{F}$  le filtre engendré par  $F$  sur  $E$ ). On l'appelle *quasi-topologie induite par  $\pi$  sur  $E'$* . Si  $\pi$  est séparée (resp. si  $\pi$  est compacte et  $E'$  pseudo-fermé),  $\pi/E'$  est séparée (resp.

compacte). Si  $\pi$  est séparée et  $\pi/E'$  compact, alors  $E'$  est pseudo-fermé pour  $\pi$ .

d) Les propriétés b et c entraînent que  $\hat{\theta}$  est un foncteur à  $C \cdot$ -limites projectives, si  $C \cdot$  est une catégorie et  $C \in U$ . Soit  $\hat{\pi}$  le foncteur de  $P^o$  vers la catégorie  $\mathcal{J}^o$  des applications continues qui, à une application quasi-continue  $(\pi', f, \pi)$ , associe l'application continue  $(\hat{\tau}(\pi'), f, \hat{\tau}(\pi))$ .

PROPOSITION. *Le foncteur  $\hat{\tau}$  admet un coadjoint.*

PREUVE. Si  $T$  est une topologie sur  $E$ , on peut définir une quasi-topologie  $\hat{\pi}(T)$  sur  $E$  comme suit :

$$\hat{\pi}(T)(x) = \{ F \in F(E) \mid V(x) \subset F \},$$

où  $V(x)$  est le filtre des voisinages de  $x$  dans  $T$ , pour tout  $x \in E$ . Considérons

$$\hat{\tau}(\hat{\pi}(T)) = \{ M \subset E \mid M \in \bigwedge \hat{\pi}(T)(x), \forall x \in M \}.$$

Comme  $\bigwedge \hat{\pi}(T)(x) = V(x)$ , on a  $\hat{\tau}(\hat{\pi}(T)) = T$ . Soit  $\pi'$  une quasi-topologie sur  $E'$ , et  $\hat{f} = (T, f, \hat{\tau}(\pi'))$  une application continue. Montrons que  $\hat{f}$  se relève dans  $P^o$  en une application quasi-continue unique de  $\pi'$  vers  $\hat{\pi}(T)$ . Si  $F'$  est un filtre appartenant à  $F(E')$  tel que  $F' \pi' y$ , alors  $F'$  converge vers  $y$  pour  $\hat{\tau}(\pi')$ .  $(T, f, \hat{\tau}(\pi'))$  étant continue,  $fF'$  converge vers  $f(y)$  pour  $T$ . Donc  $fF'$  quasi-converge vers  $f(y)$  pour  $\hat{\pi}(T)$ , par définition. Ainsi  $f$  se relève en une application quasi-continue  $\hat{f}' = (\hat{\pi}(T), f, \pi')$ . D'autre part  $\hat{f}'$  est unique, car on a  $f'(y) = f(y)$  pour tout  $y \in \hat{\theta}(\pi')$ . Ainsi  $\hat{\pi}(T)$  est une  $\hat{\tau}$ -structure colibre associée à  $T$ . Il s'ensuit qu'il existe un foncteur  $\hat{\pi}$  de  $\mathcal{J}^o$  vers  $P^o$  adjoint de  $\hat{\tau}$ ; à l'application continue  $(T', f, T)$ , il associe l'application quasi-continue  $(\hat{\pi}(T'), f, \hat{\pi}(T))$ .

COROLLAIRE. *Le foncteur  $\hat{\pi}$  admet  $\hat{\tau}$  pour adjoint.*

Si  $\pi$  est une quasi-topologie et s'il existe une topologie  $T$  telle que  $\pi = \hat{\pi}(T)$ , on dit que  $\pi$  s'identifie à la topologie  $T$ .

3. En notant  $P^o_s$  (resp.  $P^o_c$ ) la sous-catégorie pleine de  $P^o$  formée des

applications quasi-continues entre espaces quasi-topologiques séparés (resp. compacts), on définit un foncteur injection canonique  $(P^o, i, P^o_s)$  (resp.  $(P^o, i, P^o_c)$ ).

THEOREME.  $(P^o, i, P^o_s)$  (resp.  $(P^o, i, P^o_c)$ ) admet un adjoint.

PREUVE. Soient  $\hat{U}$  un univers tel que  $U \subset \hat{U}$  et  $U \in \hat{U}$ , et  $(E, \pi)$  un espace quasi-topologique tel que  $E \in U$ .

1°) On considère  $I = \{f \in P \mid f = (\pi', \underline{f}, \pi), \pi' \text{ séparé (resp. } \pi' \text{ compact)}\}$ .

On forme  $\hat{\pi} = \prod_{f \in I} \beta(f)$ ; montrons que ce produit est un élément de  $\hat{P}^o$ , en notant  $\hat{P}^o$  la catégorie des applications quasi-continues associée à  $\hat{U}$ . Pour cela, il suffit de montrer que l'ensemble  $\hat{E}$  sous-jacent à  $\hat{\pi}$  appartient à  $\hat{U}$ , ou encore,  $\hat{U}$  étant un univers, que  $I \in \hat{U}$ . Or :

$$I \subset \pi' \circ \bigcup_{E' \in P^o} \pi' \circ P \circ \pi, \text{ où } \pi' \circ P \circ \pi = \{f \in P \mid \alpha(f) = \pi, \beta(f) = \pi'\}.$$

Soit  $\pi'$  une quasi-topologie sur  $E' \in U$ ; on a  $\pi' \in \mathfrak{A}(E')$ , en posant :

$$A_{E'} = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E'))) \text{ et } \mathfrak{A}(E') = A_{E'} \circ \mathfrak{M} \circ E'.$$

On a  $E' \in \{E'\}$ ; comme  $E' \in U$ , alors  $\{E'\} \in U$ , et  $A_{E'} \in U$ , d'où

$$\mathfrak{A}(E') \subseteq \{A_{E'}\} \times \mathcal{P}(A_{E'} \times E') \times \{E'\} \in U,$$

c'est-à-dire  $\mathfrak{A}(E') \in U$ . Si  $f = (\pi', \underline{f}, \pi) \in P$ , on trouve

$$f \in \mathfrak{A}(E') \times \mathcal{P}(E' \times E) \times \mathfrak{A}(E) \in U,$$

car  $\underline{f} \in \mathcal{P}(E' \times E)$ . Il s'ensuit  $\pi' \circ P \circ \pi \in U$ . Par ailleurs

$$P^o = \{\pi' \mid E' = \hat{\theta}(\pi') \in U\} \subset \bigcup_{E' \in U} \mathfrak{A}(E').$$

Comme  $U \in \hat{U}$ , on a  $\bigcup_{E' \in U} \mathfrak{A}(E') \in \hat{U}$ . Donc

$$P^o \in \hat{U} \text{ et } \pi' \circ \bigcup_{E' \in P^o} \pi' \circ P \circ \pi \in \hat{U},$$

ce qui entraîne  $I \in \hat{U}$ . Il en résulte  $\hat{E} \in \hat{U}$ , d'où  $\hat{\pi} \in \hat{P}^o$ .

De plus  $\hat{\pi}$  est séparée (resp. compacte), d'après la propriété b.

Pour tout  $f \in I$ , soit  $p_f$  la projection canonique de  $\hat{\pi}$  vers  $\beta(f)$ ; soit  $\hat{f}$  l'unique application quasi-continue telle que  $p_f \circ \hat{f} = f$ .

2°) Considérons le cas des séparés : Soit  $\hat{f}(E) = \tilde{E} \subset \hat{E}$ , et

$\tilde{\pi} = \hat{\pi} / \tilde{E}$ . On a ainsi un sous-espace séparé  $(\tilde{E}, \tilde{\pi})$  de  $(\hat{E}, \hat{\pi})$ .  $\tilde{E}$  est équipotent à un élément  $E_1$  de  $U$ . Soit  $\underline{\varphi}$  une bijection de  $\tilde{E}$  sur  $E_1$ . Prenons sur  $E_1$  la quasi-topologie image de  $\tilde{\pi}$  par  $\underline{\varphi}$ ; notons  $\pi_1$  cette quasi-topologie et  $\varphi = (\pi_1, \underline{\varphi}, \tilde{\pi})$ . Si  $i = (\hat{\pi}, \iota, \tilde{\pi})$  désigne l'injection quasi-continue canonique et  $\tilde{f} = (\tilde{\pi}, \hat{f}, \pi)$  la restriction de  $\hat{f}$  à  $(\tilde{E}, \tilde{\pi})$ , on a  $\hat{f} = i \circ \tilde{f}$ .

Soit  $J = \varphi \circ \tilde{f}$ .  $J$  est quasi-continue et,  $\tilde{\pi}$  étant séparé, son image  $\pi_1$  par  $\varphi$  est séparée. Donc  $J \in I$ .

Si  $f = (\pi', \underline{f}, \pi) \in I$ , considérons  $f' = p_f \circ i \circ \varphi^{-1}$ ; on a  $f' \in P$  et

$$f' \circ J = p_f \circ i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{f} = p_f \circ \hat{f} = f.$$

Si  $f'' \in P$  est telle que  $f'' \circ J = f' \circ J$ , on trouve :

$$f'' \circ J = f'' \circ \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ J) = f'' \circ \varphi \circ \tilde{f} = f' \circ \varphi \circ \tilde{f}.$$

Comme  $\tilde{f}$  est une surjection sur  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{f}$  est un épimorphisme; donc

$$f'' \circ \varphi = f' \circ \varphi$$

et,  $\underline{\varphi}$  étant une bijection, on a  $f'' = f'$ . Ainsi  $(E_1, \pi_1)$  est un  $(P^o, i, P_s^o)$ -objet libre engendré par  $(E, \pi)$ .

3°) Considérons le cas des compacts.

Soit  $\bar{E}$  la pseudo-adhérence de  $\hat{f}(E)$ .  $(\hat{E}, \hat{\pi})$  étant compact,  $(\bar{E}, \hat{\pi} / \bar{E}) = (\bar{E}, \bar{\pi})$  est compact.

Soit  $\tilde{U} = \{E \in \tilde{U} \mid E \text{ équipotent à un élément de } U\}$ . Alors  $\tilde{U}$  est un univers auquel appartient  $\tilde{E} = \hat{f}(E)$ . Si  $x \in \bar{E}$ , il existe un filtre  $F_x$  qui quasi-converge vers  $x$  pour  $\hat{\pi}$  et auquel appartient  $\tilde{E}$ . Choisissons un tel filtre, et notons  $\tilde{F}_x$  le filtre induit par  $F$  sur  $\tilde{E}$ . L'application  $x \rightarrow \tilde{F}_x$  de  $\bar{E}$  dans  $F(\tilde{E})$  est une injection, la quasi-topologie  $\hat{\pi}$  étant séparée et  $F_x$  quasi-convergeant vers  $x$ . Donc  $\bar{E}$  est équipotent à une partie de  $F(\tilde{E})$ . Comme  $F(\tilde{E}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\tilde{E})) \in \tilde{U}$ , il s'ensuit  $\bar{E} \in \tilde{U}$ , de sorte qu'il existe une bijection  $\hat{\varphi}$  de  $\bar{E}$  sur un élément  $\bar{E}_1$  de  $U$ . Soit  $\bar{\pi}_1$  la quasi-topologie image de  $\bar{\pi}$  par  $\hat{\varphi}$ , et  $\hat{\varphi} = (\bar{\pi}_1, \hat{\varphi}, \bar{\pi})$ . Alors  $(\bar{E}_1, \bar{\pi}_1)$  est compact, puisque c'est l'image par la bijection  $\hat{\varphi}$  d'un compact, et  $\bar{E}_1$  est la pseudo-adhérence pour  $\bar{\pi}_1$  de  $\hat{\varphi}(\tilde{E})$ . Soient  $J = \hat{\varphi} \circ \tilde{f}$ , en notant  $\tilde{f}$  la restriction de  $\hat{f}$  à  $(\bar{E}, \bar{\pi})$ , et  $i = (\hat{\pi}, \iota, \bar{\pi})$ . On a  $J \in I$ . Soit  $f = (\pi', \underline{f}, \pi) \in I$ ;

on obtient  $f' \circ J = f$ , en posant  $f' = p_j \circ i \circ \varphi^{-1}$ . Si  $f'' \circ J = f' \circ J$ , il existe un noyau  $n$  de  $(f'', f')$  dans  $P^0$ ; c'est l'application injection quasi-continue de  $(E_2, \pi_2)$  dans  $(\bar{E}_1, \bar{\pi}_1)$ , avec

$$E_2 = \{x_1 \in \bar{E}_1 \mid f'(x_1) = f''(x_1)\} \text{ et } \pi_2 = \bar{\pi}_1 / E_2.$$

$E_2$  contient  $J(E) = \hat{\varphi}(\bar{E})$ . De plus il est pseudo-fermé dans  $\bar{\pi}_1$ ; en effet, si  $F$  est un filtre sur  $E_2$  tel que  $F \in \pi_2(x)$ , où  $x$  appartient à la pseudo-adhérence  $\bar{E}_2$  de  $E_2$ , on a

$$f'F = f''F, \quad f'F \in \pi'(f'(x)) \text{ et } f'F \in \pi'(f''(x)).$$

$\pi'$  étant séparée,  $f'(x) = f''(x)$ , donc  $x \in E_2$  c'est-à-dire  $\bar{E}_2 = E_2$ . Il en résulte  $E_2 = \bar{E}_1$ , et par suite  $f' = f''$ . Ainsi  $(\bar{E}_1, \bar{\pi}_1)$  est un  $(P^0, i, P^0)$ -objet libre engendré par  $(E, \pi)$ . Le théorème en résulte.

**2. Quasi-topologie de la convergence locale.**

Soient  $U$  un univers, et  $\pi$  et  $\pi'$  deux quasi-topologies sur  $E \in U$  et  $E' \in U$  respectivement. Si  $G$  est un filtre sur  $E' \circ \mathfrak{M} \circ E$  et  $F$  un filtre sur  $E$  (où  $\mathfrak{M}^0$  est la catégorie des applications associées à  $U$ ), les ensembles  $B(A) = \bigcup_{f \in B} f(A)$  où  $B \in G, A \in F$ , engendrent un filtre sur  $E'$ , noté  $GF$ . Si  $G$  est un filtre sur  $\pi' \circ P \circ \pi$ , on pose  $GF = \hat{\theta}(G)F$ . Pour tout  $f \in \pi' \circ P \circ \pi$ , soit  $\lambda(f)$  l'ensemble des filtres  $G$  sur  $\pi' \circ P \circ \pi$  tels que, pour tout  $x \in E$  et tout  $F \in \pi(x)$ , on ait  $GF \in \pi'(f(x))$ .

1. DEFINITION. L'application  $f \rightarrow \lambda(f)$  définit une quasi-topologie sur  $\pi' \circ P \circ \pi$ , notée  $\lambda(\pi', \pi)$ , qui est appelée *quasi-topologie de la convergence locale* [ 2 ].

PROPRIETES. [ 2 ]

a) Si  $\pi'$  est séparée,  $\lambda(\pi', \pi)$  est séparée.

b) Si  $\pi'$  et  $\pi$  s'identifient à des topologies  $T'$  et  $T$  respectivement et si  $T$  est localement compacte, alors  $\lambda(\pi', \pi) = \lambda(T', T)$  s'identifie à la topologie de la convergence compacte.

2. Soient  $E \in U$  et  $\pi$  une quasi-topologie sur  $E$ . Soit  $X_\pi$  le foncteur de  $P^0$  dans  $P^0$  qui à  $b \in P$  associe  $b \times i_\pi$ , où  $i_\pi$  est l'application quasi-continue identique de  $\pi$  vers  $\pi$ .

THEOREME. Si  $(E', \pi')$  est un espace quasi-topologique, la quasi-topologie  $\lambda(\pi', \pi)$  est un  $X_\pi$ -objet colibre associé à  $\pi'$ , le  $X_\pi$ -coprojecteur correspondant étant  $\eta_\pi(\pi') = (i_{\lambda(\pi', \pi)}, \hat{v})$ , où  $\hat{\theta}(\hat{v})$  est l'application  $v : (f, x) \rightarrow f(x)$  de  $(\pi' \circ P \circ \pi) \times E$  dans  $E'$ . Si  $C_\pi$  est le foncteur coadjoint de  $X_\pi$  associé à  $\eta_\pi$  [4], on a :  $\hat{\theta}(C_\pi(b)) = \text{Hom}_{P \circ \pi}(b, i_\pi)$  pour  $b \in P$ .

PREUVE.

a) Montrons [2] que  $v$  définit une application quasi-continue  $\hat{v}$  de  $\lambda(\pi', \pi) \times \pi$  vers  $\pi'$ . Soient  $G$  un filtre sur  $\pi' \circ P \circ \pi$  tel que  $G \in \lambda(f)$  et  $F$  un filtre sur  $E$  tel que  $F \in \pi(x)$ . Le filtre  $vG \times F$  est engendré par l'ensemble des classes  $B(A) = \bigcup_{f \in B} f(A)$ , où  $A \in F$  et  $B \in G$ ; il est donc identique au filtre  $GF$ . Par définition de  $\lambda(f)$  on a  $GF \in \pi'(f(x))$ , c'est-à-dire  $vG \times F \in \pi'(v(f, x))$ . Donc  $\hat{v} \in P$ .

b) Soient  $(E_1, \pi_1)$  un espace quasi-topologique et  $g$  une application quasi-continue de  $\pi_1 \times \pi$  dans  $\pi'$ . Soit  $g'$  l'application de  $E_1$  dans  $\pi' \circ P \circ \pi$  associant à  $x_1 \in E_1$  l'application quasi-continue  $g_{x_1}$  de  $\pi$  vers  $\pi'$  telle que  $g_{x_1}(x) = g(x_1, x)$ . Montrons [2] que  $g'$  définit une application quasi-continue  $\hat{g}'$  de  $\pi_1$  vers  $\lambda(\pi', \pi)$ . Soient  $F_1$  un filtre sur  $E_1$  tel que  $F_1 \in \pi_1(x_1)$  et  $F$  un filtre sur  $E$  tel que  $F \in \pi(x)$ . Le filtre  $g(F_1 \times F)$  est engendré par l'ensemble des classes  $g(B_1 \times A)$ , où  $B_1 \in F_1$  et  $A \in F$ . Comme

$$\begin{aligned} g(B_1 \times A) &= \bigcup_{x'_1 \in B_1} g(\{x'_1\} \times A) = \bigcup_{x'_1 \in B_1} g_{x'_1}(A) = \\ &= \bigcup_{b' \in g'(B_1)} b'(A) = g'(B_1)(A), \end{aligned}$$

les filtres  $g(F_1 \times F)$  et  $g'(F_1)F$  sont identiques. Puisque  $g$  est quasi-continue, on a  $g(F_1 \times F) \in \pi'(g(x_1, x))$ , c'est-à-dire  $g'(F_1)(F) \in \pi'(g'(x_1)(x))$ , d'où  $g'(F_1) \in \lambda(g'_{x_1})$ , et par conséquent  $\hat{g}'$  existe.

c) On a ainsi :

$$\hat{v} \circ X_\pi(\hat{g}')(x_1, x) = v(g'(x_1), x) = g'(x_1)(x) = g(x_1, x),$$

c'est-à-dire  $\hat{v} \circ X_\pi(\hat{g}') = g$ . Si  $\hat{v} \circ X_\pi(\hat{g}'') = g$ , alors  $\hat{\theta}(\hat{g}'') = \hat{\theta}(\hat{g}')$ , et par suite  $\hat{g}'' = \hat{g}'$ . Ceci prouve que  $(i_{\lambda(\pi', \pi)}, \hat{v})$  est un  $X_\pi$ -coprojecteur (résultat énoncé dans [3], complément 1 p. 208).

d) Soit  $C_\pi$  le foncteur coadjoint de  $X_\pi$ . Supposons de plus que

l'on ait  $(E'', \pi'') \in P^0$  et soit  $\eta_{\pi''}(\pi) = (i_{\lambda(\pi'', \pi)}, \hat{v}')$ . Si  $b$  est une application quasi-continue de  $\pi''$  vers  $\pi'$ , l'application quasi-continue  $C_{\pi}(b)$  de  $\lambda(\pi'', \pi)$  dans  $\lambda(\pi', \pi)$  est celle qui, à  $f' \in (\pi'' \circ P \circ \pi)$ , fait correspondre l'application quasi-continue de  $\pi$  vers  $\pi'$  qui associe  $b \circ f'(x)$  à  $x \in E$ . On a donc  $\hat{\theta}(C_{\pi}(b)) = \text{Hom}_{P^0}(b, i_{\pi})$ .

**COROLLAIRE 1.** Soient  $(E, \pi)$ ,  $(E_1, \pi_1)$ ,  $(E', \pi')$  des espaces quasi-topologiques. Une application  $f$  de  $E_1 \times E$  dans  $E'$  est quasi-continue de  $\pi_1 \times \pi$  vers  $\pi'$  si, et seulement si, ([2] et [6])

- a) Pour tout  $x_1 \in E_1$ , l'application  $x \rightarrow f(x_1, x)$  définit une application quasi-continue  $f_{x_1}$  de  $\pi$  vers  $\pi'$ .
- b) L'application  $x_1 \rightarrow f_{x_1}$  est quasi-continue de  $\pi_1$  dans  $\lambda(\pi', \pi)$ .

**COROLLAIRE 2.** Si  $(E, \pi)$  et  $(E', \pi')$  sont des espaces quasi-topologiques,  $\lambda(\pi', \pi)$  est la moins fine des quasi-topologies  $\hat{\pi}$  sur  $\pi' \circ P \circ \pi$  telles que l'application  $v : (f, x) \rightarrow f(x)$  définisse une application quasi-continue de  $\hat{\pi} \times \pi$  vers  $\pi'$  [2].

**PROPOSITION.** Soient  $(E, \pi)$  et  $(E_i, \pi_i)$  pour tout  $i \in I$  des espaces quasi-topologiques. Si  $(E', \pi')$  est l'espace quasi-topologique produit de  $((E_i, \pi_i))_{i \in I}$ , l'application  $w : (f_i)_{i \in I} \rightarrow [f_i]_{i \in I}$  définit un quasi-homéomorphisme de  $\hat{\pi} = \prod_{i \in I} \lambda(\pi_i, \pi)$  vers  $\lambda(\pi', \pi)$  (où  $f_i \in \pi_i \circ P \circ \pi$ ).

**PREUVE.** Soit  $p_i$  la projection canonique de  $E'$  vers  $E_i$ , pour tout  $i \in I$ , et  $q_i$  celle de  $L = \prod_{i \in I} (\pi_i \circ P \circ \pi)$  sur  $\pi_i \circ P \circ \pi$ . L'inverse de la bijection  $w$  est l'application  $w' : f = [f_i]_{i \in I} \rightarrow (p_i \circ f)_{i \in I}$ . Soit  $G$  un filtre sur  $L$ . On a  $G \in \hat{\pi}((f_i)_{i \in I})$  si, et seulement si,  $q_i G \in \lambda(\pi_i, \pi)(f_i), \forall i \in I$ , c'est-à-dire si, et seulement si, pour tout  $x \in E$  et tout  $F \in \pi(x)$ , on a  $q_i GF \in \pi_i(f_i(x))$ . Or ceci équivaut à  $(p_i w GF) \in \pi_i(f_i(x))$ , car  $p_i \circ w = q_i, \forall i \in I$ , ou encore à  $w GF \in \pi'((f_i)_{i \in I}(x))$ , ce qui signifie  $w G \in \lambda(\pi', \pi)([f_i]_{i \in I})$ . Ainsi  $w$  définit un quasi-homéomorphisme.

**3. THEOREME.** Il existe une catégorie  $\hat{\theta}$ -fortement dominée  $(P^0, \lambda)$ , où  $\lambda$  est le foncteur de  $P^0 \times P^0$  vers  $P^0$  qui à  $(\pi', \pi) \in P^0 \times P^0$  associe  $\lambda(\pi', \pi)$ . De plus  $(P^0, \lambda)$  est une catégorie  $\hat{\theta}$ -hyperdominée et tensoriellement  $\hat{\theta}$ -dominée en tout  $\pi \in P^0$ .

RAPPELS. Soient  $q$  un foncteur d'une catégorie  $K \cdot$  vers  $\mathfrak{M}^0$  et  $H \cdot$  une catégorie.

1°) Si  $D$  est un foncteur de  $H \cdot \times H^*$  (où  $H^*$  est la duale de  $H \cdot$ ) vers  $K \cdot$  tel que  $q \circ D = \text{Hom}_H \cdot$ , on dit que  $(H \cdot, D)$  est une *catégorie  $q$ -dominée* [4]. Si de plus pour tout triplet  $(e'', e', e)$  d'unités de  $H \cdot$  il existe un élément  $k$  de  $K$  ayant pour source un produit  $s$  de  $(D(e'', e'), D(e', e))$  dans  $K \cdot$ , pour but  $D(e'', e)$  et tel que  $q(k)$  soit l'application  $(f', f) \rightarrow f' \circ f$  de  $e'' \cdot H \cdot e' \times e' \cdot H \cdot e$  dans  $e'' \cdot H \cdot e$ , on dit que  $(H \cdot, D)$  est *fortement  $q$ -dominée* [5].

2°) Si  $(K \cdot, D')$  est une catégorie  $q$ -dominée et  $H \cdot$  une sous-catégorie pleine de  $K \cdot$ , on dit que  $(H \cdot, D')$  est une *catégorie  $q$ -hyperdominée* [3] si, pour tout triplet  $(e'', e', e)$  d'unités de  $H \cdot$ , il existe un élément  $k$  de  $D'(D'(e'', e), D'(e'', e')) \cdot K \cdot D'(e', e)$  tel que  $q(k)$  applique  $f$  sur  $\text{Hom}_K \cdot (e'', f)$ .

3°) Soient  $(H \cdot, D)$  une catégorie  $q$ -dominée, et  $e$  une unité de  $H \cdot$ ; nous noterons  $D(\cdot, e)$  le foncteur de  $H \cdot$  vers  $K \cdot$  associant  $D(f, e)$  à  $f \in H$ . On dit que  $(H \cdot, D)$  est une *catégorie tensoriellement  $q$ -dominée en  $e$*  si c'est une catégorie  $q$ -dominée, et s'il existe un foncteur  $X_e$  de  $K \cdot$  vers  $H \cdot$ , dit *foncteur produit tensoriel par  $e$* , vérifiant les conditions suivantes :

1)  $D(\cdot, e)$  est un foncteur coadjoint de  $X_e$ ; soit  $\eta$  l'application associant à  $e' \in H_0$  le coprojecteur  $\eta(e') = (D(e', e), j_{e'})$  qui sert à définir  $D(\cdot, e)$ .

2) Si  $s' \in K_0$  et  $e' \in H_0$ , il existe un inversible  $k$  de  $K \cdot$  de source  $D(e', X_e(s'))$ , de but  $D(D(e', e), s')$  tel que  $q(k)$  soit la bijection  $\eta_{e', s'}$ , associant à  $g$  l'unique  $g'$  vérifiant  $j_{e', \cdot} X_e(g') = g$ .

DEMONSTRATION DU THEOREME.

A) Soient  $(E, \pi), (E', \pi'), (E', \pi'')$  des espaces quasi-topologiques appartenant à  $P_0$ . Montrons (voir [2] et [6]) que l'application  $k : (f', f) \rightarrow f' \circ f$  est quasi-continue de  $\lambda(\pi'', \pi') \times \lambda(\pi', \pi)$  vers  $\lambda(\pi'', \pi)$ .

Soient  $f \in \pi' \circ P \circ \pi$ ,  $f' \in \pi'' \circ P \circ \pi'$ ,  $G' \in \lambda(\pi'', \pi')(f')$  et  $G \in \lambda(\pi', \pi)(f)$ . Pour tout  $x \in E$  et tout  $F \in \pi(x)$ , on a  $GF \in \pi'(f(x))$ . Puisque  $G' \in \lambda(\pi'', \pi')(f')$ , on trouve  $G'GF \in \pi''(f' \circ f(x))$ , c'est-à-dire  $G'G = k(G' \times G) \in \lambda(\pi'', \pi)(f' \circ f)$ .

B) Soient  $f \in \pi \circ P \circ \pi_1$  et  $g \in \pi'_1 \circ P \circ \pi'$ . L'application constante sur  $(g, f)$  définissant une application quasi-continue de  $\lambda(\pi', \pi)$  vers  $\lambda(\pi'_1, \pi') \times \lambda(\pi, \pi_1)$ , il résulte de A que l'application  $f' \rightarrow g \circ f' \circ f$  définit une application quasi-continue  $\lambda(g, f)$  de  $\lambda(\pi', \pi)$  vers  $\lambda(\pi'_1, \pi_1)$ . Le foncteur  $\hat{\theta}$  étant fidèle, il s'ensuit que  $(P^o, \lambda)$  est une catégorie  $\hat{\theta}$ -dominée et, d'après A, une catégorie fortement  $\hat{\theta}$ -dominée [ 5 ].

C) De la partie A et du corollaire 1, on déduit que, si  $\pi$ ,  $\pi'$ , et  $\pi''$  sont trois quasi-topologies, l'application  $f \rightarrow \text{Hom}_{P^o}(\pi'', f)$  définit une application quasi-continue  $k'$  de  $\lambda(\pi', \pi)$  vers  $\lambda(\lambda(\pi'', \pi), \lambda(\pi'', \pi'))$ . Donc  $(P^o, \lambda)$  est une catégorie  $\hat{\theta}$ -hyperdominée.

D) Soit  $\pi \in P^o_0$ . Montrons que  $(P^o, \lambda)$  est une catégorie tensoriellement  $\hat{\theta}$ -dominée en  $\pi$ . On a vu qu'il existe un foncteur  $X_\pi$  de  $P^o$  vers  $P^o$  tel que  $X_\pi(b) = b \times i_\pi$  pour tout  $b \in P^o$ , et que ce foncteur admet  $\lambda(\cdot, i_\pi)$  pour coadjoint. Donc la 1<sup>ère</sup> condition est vérifiée.

Soit  $\pi' \in P^o_0$  une quasi-topologie;  $\pi'$  engendre un  $X_\pi$ -objet colibre  $\lambda(\pi', \pi)$ , le coprojecteur correspondant étant  $\eta_\pi(\pi') = (i_{\lambda(\pi', \pi)}, \hat{v})$ . Soient  $\pi'' \in P^o_0$  une quasi-topologie et  $\varphi$  la bijection de  $\pi' \circ P \circ (\pi'' \times \pi)$  sur  $\lambda(\pi', \pi) \circ P \circ \pi''$  qui, à  $g \in \pi' \circ P \circ \pi'' \times \pi$ , associe l'unique application quasi-continue  $g'$  de  $\pi''$  vers  $\lambda(\pi', \pi)$  vérifiant  $\hat{v} \circ X_\pi(g') = g$ . Pour montrer que  $(P^o, \lambda)$  est tensoriellement  $\hat{\theta}$ -dominée en  $\pi$ , il suffit de prouver que  $\varphi$  définit un quasi-homéomorphisme de  $\lambda(\pi', \pi'' \times \pi)$  vers  $\lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi'')$ . Or  $g' = \varphi(g)$  est l'application associant à  $x'' \in \hat{\theta}(\pi'')$  l'application quasi-continue  $g_{x''} : x \rightarrow g(x'', x)$  de  $\pi$  vers  $\pi'$ . Soient  $G$  un filtre sur  $\pi' \circ P \circ (\pi'' \times \pi)$ ,  $F$  un filtre sur  $\hat{\theta}(\pi)$  et  $F''$  un filtre sur  $\hat{\theta}(\pi'')$ . Le filtre  $G(F'' \times F)$  est engendré par l'ensemble des  $m(A'' \times A) = \bigcup_{b \in M} b(A'' \times A)$  où  $m \in G$ ,  $A \in F$ ,  $A'' \in F''$ . Comme

$$b(A'' \times A) = \{b(x'', x) \mid x'' \in A'', x \in A\} = \{b_{x''}(x) \mid x'' \in A'', x \in A\} =$$

$$= \bigcup_{x'' \in A''} \varphi(b)(x'')(A) = (\varphi(b)(A''))(A),$$

on a 
$$m(A'' \times A) = (\varphi(m)(A''))(A).$$

Or l'ensemble des  $(\varphi(m)(A''))(A)$ , où  $m \in G$ ,  $A \in F$  et  $A'' \in F''$ , engendre le filtre  $(\varphi(G)F'')F$ . Donc  $G(F'' \times F) = (\varphi(G)F'')F$ . On a  $G \in \lambda(\pi', \pi'' \times \pi)(g)$  si, et seulement si,  $G(F'' \times F) \in \pi'(g(x'', x))$ , c'est-à-dire d'après ce qui précède si, et seulement si,  $\varphi(G)(F'')(F) \in \pi'(\varphi(g)(x'')(x))$ , pour tout  $F \in \pi(x)$  et  $F'' \in \pi''(x'')$ . Or cette condition équivaut à  $\varphi(G)F'' \in \lambda(\pi', \pi)(\varphi(g)(x''))$  pour tout  $F'' \in \pi''(x'')$ , donc aussi à  $\varphi(G) \in \lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi'')(\varphi(g))$ . Ceci prouve que  $\varphi$  définit un quasi-homéomorphisme de  $\lambda(\pi', \pi'' \times \pi)$  sur  $\lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi'')$ .

REMARQUE. Comme  $P^o$  est une catégorie à produits finis et admettant pour élément final l'unique quasi-topologie sur un ensemble  $\{x\}$  à un seul élément, il résulte du théorème 2 que  $P^o$  est une catégorie cartésienne fermée au sens de [7]. On peut en déduire que  $(P^o, \lambda)$  est  $\hat{\theta}$ -hyperdominée en utilisant les résultats de [7].

### Bibliographie.

- [1] P. ANTOINE, Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bull. Soc. Math. Belgique*, XVIII, 2 et 4 (1966), p. 142 et 387.
- [2] A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés de dimension infinie, *Journal d'Analyse Math.* Jérusalem 13 (1964), p. 1.
- [3] A. BASTIANI, *Topologie*, Chap. IV : Espaces fonctionnels, cours multigraphié, Amiens 1969.
- [4] C. EHRESMANN, *Algèbre*, Cours du C.D.U, Paris 1968.
- [5] C. EHRESMANN, Catégories structurées généralisées, *Cahiers de Topo. et Géo. diff.*, X, 1 (1968), p. 139.
- [6] C. EHRESMANN, Catégories topologiques III, *Indag. Math.* 28, 1 (1966)
- [7] EILENBERG-KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on Categorical Algebra*, La Jolla 1965, Springer.
- [8] H.J. KOWALSKY, Limesräume und Komplettierung, *Math. Nachr.* 12, 1954, p. 301.

M. CHARTRELLE  
29, rue de Beauvais  
80 - AMIENS