

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

CONSTANTINO M. DE BARROS

Sur les catégories ordonnées régulières

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, n° 1 (1969), p. 23-55

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_1_23_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES CATEGORIES ORDONNEES REGULIERES^(*)

par Constantino M. de BARROS

Dans de nombreuses constructions de la théorie des groupoïdes ou catégories ordonnés un rôle important est joué par le pseudoproduit associé (cf. [5], [6], [7], [11]).

Dans ce travail on résoud les deux problèmes suivants : caractériser les classes multiplicatives dont la loi de composition est le pseudoproduit associé à une catégorie ordonnée régulière (resp. vérifiant en plus l'hypothèse suivante : la classe des unités est héréditaire). On montre que les objets introduits sous le nom de pseudomonoïdes totalement réguliers donnent une réponse très satisfaisante à la deuxième question posée.

En passant on fait une étude des pseudogroupoïdes. Ces objets sont solutions du deuxième problème quand la catégorie sous-jacente est un groupoïde. Un demi-groupe inverse (cf. [3], [9]) est un pseudogroupoïde dont la loi de composition est partout définie. Quelques résultats établis pour les pseudogroupoïdes donnent comme corollaire des théorèmes connus pour les demi-groupes inverses (voir [3], chap. 1, § 1.9, chap. 7 et [9] chap. 2, § 7).

La solution du deuxième problème contient comme cas particuliers les solutions obtenues auparavant :

(1) pour les groupoïdes inductifs et sous-préinductifs (Ehresmann [4], [5]);

(2) pour les groupoïdes fonctoriellement ordonnés dont la classe des unités est préinductive (= toute classe formée de deux unités admet une borne inférieure) (Dubikajtis [4]);

(3) pour les catégories ordonnées régulières dont la classe des unités est héréditaire et, munie de l'ordre induit, est préinductive ou sous-

(*) Ce travail a été financé par le Conselho Nacional de Pesquisas (Brésil) contract TC 8233. Il développe l'exposé fait par l'auteur à l'occasion des Journées sur l'Algèbre des Catégories (Paris-Dijon 1967).

préinductive (= toute classe constituée de deux unités et majorée par une unité admet une borne inférieure), [1], [2].

Les notations et la terminologie qui ne sont pas indiquées explicitement dans le texte sont conformes à celles d'Ehresmann [8].*

1. Soit $C^\circ = (C, \circ)$ un *système multiplicatif*, c'est-à-dire C est une classe munie d'une loi de composition interne partiellement définie, notée $\circ$. On indique par $C^\circ * C^\circ$ la classe des couples composables. Si (g, f) est un couple composable, on note $g \circ f$ le composé de f et g . On dit que $g \circ f$ est défini si $(g, f) \in C^\circ * C^\circ$. On note κ° la fonction de $C^\circ * C^\circ$ dans C définie par $(g, f) \mapsto g \circ f$. On note C_o la classe des éléments idempotents, i.e.

$$C_o = \{ e \mid e \in C, e \circ e \text{ est défini et } e \circ e = e \}.$$

On note C_o° la classe des éléments unités de C° , i.e.

$$C_o^\circ = \{ e \mid e \in C_o \text{ et } f \circ e = f, \text{ resp. } e \circ f = f, \text{ si } f \circ e, \text{ resp. } e \circ f, \text{ est défini} \}.$$

On dira que $(C, \circ)$ est un *pseudomonoïde* si $(C, \circ)$ est un système multiplicatif vérifiant l'axiome suivant :

(PM) Si $f, g, h \in C$, si $h \circ g$ et $g \circ f$ sont définis, alors $h \circ (g \circ f)$ est défini si, et seulement si, $(h \circ g) \circ f$ est défini; dans ce cas

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Soit C° un système multiplicatif. On dira qu'une sous-classe U de C est *symétrique*, resp. *stable*, *commutative*, si U vérifie l'axiome (SY), resp. (ST), (CO), ci-dessous :

(SY) Pour tout $(e, e') \in U \times U$, si $e \circ e'$ est défini, alors $e' \circ e$ est défini.

(ST) Pour tout $(e, e') \in U \times U$, si $e \circ e'$ est défini, alors $e \circ e' \in U$.

(CO) Pour tout $(e, e') \in U \times U$, si $e \circ e'$ et $e' \circ e$ sont définis, alors $e \circ e' = e' \circ e$.

LEMME 1.1. Soit $(C, \circ, U)$ un triplet satisfaisant l'axiome suivant :

$(\mu_1)(C, \circ)$ est un pseudomonoïde et U est une sous-classe de

* En particulier, on écrira « φ est une surjection de M dans $\hat{M}$ » au lieu de « $(\hat{M}, \varphi, M)$ est une application de M dans M » (Cf. [8], p. 22).

C_o telle que : (ξ) Si $e_1, e_2 \in U$, si $e_1 \circ e_2$ et $e_2 \circ e_1$ sont définis, alors $e_1 = e_1 \circ e_2$ si, et seulement si, $e_1 = e_2 \circ e_1$.

Si $e, e' \in U$ et si l'on pose $e \leq e'$ lorsque $e \circ e'$ est défini et que $e = e \circ e'$, alors

(1) $(U, \leq)$ est un système ordonné;

(2) Si de plus U est symétrique, pour tout $e, e' \in U$ tels que $e \circ e'$ soit défini et que $e \circ e' \in U$, alors $e \circ e'$ est la borne inférieure de e et e' dans $(U, \leq)$.

DEMONSTRATION.

(1) Soient $e_1, e_2 \in U$ tels que $e_1 \leq e_2$ et $e_2 \leq e_1$. On a

$$e_1 \circ e_2 \text{ est défini et } e_1 = e_1 \circ e_2,$$

$$e_2 \circ e_1 \text{ est défini et } e_2 = e_2 \circ e_1.$$

Donc $e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2$ en vertu de (ξ).

Soient $e_1, e_2, e_3 \in U$ tels que $e_1 \leq e_2$ et $e_2 \leq e_3$. Alors

$$e_1 \circ e_2 \text{ est défini et } e_1 = e_1 \circ e_2,$$

$$e_2 \circ e_3 \text{ est défini et } e_2 = e_2 \circ e_3.$$

En faisant usage de (PM) on peut écrire

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_1 \circ (e_2 \circ e_3) = (e_1 \circ e_2) \circ e_3 = e_1 \circ e_3,$$

donc $e_1 \leq e_3$.

(2) Soient $e, e' \in U$. Supposons $e \circ e'$ défini et $e \circ e' \in U$. On a $e \circ e' \leq e, e'$. En effet, en faisant usage de (PM) on peut écrire

$$e \circ e' = e \circ (e' \circ e') = (e \circ e') \circ e',$$

donc $e \circ e' \leq e'$. On a $e \circ e' = (e \circ e) \circ e' = e \circ (e \circ e')$, donc $(e \circ e') \circ e$ est défini puisque U est symétrique. On a aussi $e \circ e' = (e \circ e') \circ e$ à cause de (ξ). Par suite $e \circ e' \leq e$.

Soit $e_1 \in U$ tel que $e_1 \leq e', e$. Alors $e_1 \leq e \circ e'$; en effet, $e_1 \leq e', e$ entraîne

$$e_1 \circ e' \text{ est défini et } e_1 = e_1 \circ e',$$

$$e_1 \circ e \text{ est défini et } e_1 = e_1 \circ e.$$

Comme , par hypothèse, $e \circ e'$ est défini, en faisant usage de (PM) on a

$$e_1 = e_1 \circ e' = (e_1 \circ e) \circ e' = e_1 \circ (e \circ e'),$$

donc $e_1 \leq e \circ e'$. ■

Dorénavant, chaque fois que l'on considérera un triplet $(C, \circ, U)$ vérifiant l'axiome (μ_1) , on supposera toujours la classe U munie de l'ordre défini ci-dessus.

REMARQUE 1.1. La donnée d'un système ordonné $(U, \leq)$ est équivalente à la donnée d'un pseudomonóide $(U, \circ)$ commutatif, symétrique, tel que $U = U_\circ$ et que, de plus, si $(e, e') \in U \times U$ et si la borne inférieure $e \wedge e'$ de e et e' (par rapport à l'ordre associé à $(U, \circ)$) est définie, alors $e \circ e'$ est défini.

2. On dit qu'un triplet $F = ((\hat{M}, \leq), \varphi, (M, \leq))$ est un *morphisme ordonné* si $(\hat{M}, \leq)$ et $(M, \leq)$ sont des systèmes ordonnés et φ est une surjection de M dans $\hat{M}$ telle que

$$(\sigma) \text{ Si } x, x' \in M \text{ et si } x \leq x', \text{ alors } \varphi(x) \leq \varphi(x').$$

On dira qu'un morphisme ordonné F est de classe (σ') , resp. (σ'') , (σ_2) , s'il vérifie en plus l'axiome (σ') , resp. (σ'') , (σ_2) , ci-dessous :

(σ') Si $x, x' \in M$, si $x \leq x'$ et si $\varphi(x) = \varphi(x')$, alors $x = x'$, i.e. F est strictement croissant.

(σ'') Pour tout $a \in M$, si $y \leq \varphi(a)$, alors il existe $x \in M$ tel que $x \leq a$ et $\varphi(x) = y$.

(σ_2) Pour tout $a \in M$, si $y \leq \varphi(a)$, alors la classe des éléments x de M tels que $x \leq a$ et $\varphi(x) \leq y$ admet un plus grand élément, noté $\varphi_a^*(y)$, tel que $\varphi(\varphi_a^*(y)) = y$.

3. Soit $(C, \cdot, \leq)$ un triplet tel que $C^\cdot$ soit un système multiplicatif et $(C, \leq)$ un système ordonné. Si $(g, f) \in C \times C$ et si la classe des couples $(g', f') \in C^\cdot * C^\cdot$ tels que $g' \leq g$ et $f' \leq f$ est non vide et admet un plus grand élément $(\bar{g}, \bar{f})$ dans $(C^\cdot * C^\cdot, \leq)$, on dira que g et f ont $\bar{g} \cdot \bar{f}$ pour pseudoproduit dans $(C^\cdot, \leq)$ et l'on posera $g \odot f = \bar{g} \cdot \bar{f}$.

Si $((C, \leq), \kappa^\cdot, (C^\cdot * C^\cdot, \leq))$ est un morphisme ordonné et si $g \odot f$

est défini, alors $g \circ f$ est le plus grand élément de la classe

$$\{b \mid \text{il existe } (g', f') \in C^* * C^* \text{ tel que } b = g' \cdot f' \text{ et } g' \leq g, f' \leq f\}.$$

4. Si C^* est une catégorie, les fonctions source et but qui associent à un élément f de C son unité à droite et son unité à gauche respectivement seront notées α et β . On notera $[\beta, \alpha]$ la fonction de C dans $C_0^* \times C_0^*$ définie par $f \mapsto (\beta(f), \alpha(f))$.

On dit qu'un triplet $(C, \cdot, \leq)$ est une *catégorie ordonnée régulière* [7] si C^* est une catégorie et si $(C^*, \leq)$ vérifie les trois axiomes ci-dessous :

(CR1) Les triplets $((C_0^*, \leq), \alpha, (C, \leq))$ et $((C_0^*, \leq), \beta, (C, \leq))$ sont des morphismes ordonnés de classe (σ_2) .

(CR2) $((C, \leq), \kappa^*, (C^* * C^*, \leq))$ est un morphisme ordonné de classe (σ^*) .

(CR3) $((C_0^* \times C_0^*, \leq), [\beta, \alpha], (C, \leq))$ est un morphisme ordonné de classe (σ') .

Soit $(C^*, \leq)$ une catégorie ordonnée régulière. On a les résultats suivants (cf. [7], propositions 4, 8, 9 et 10 du §2) :

(ε_1) Soient $f \in C$ et $e, e' \in C_0^*$ tels que $e \leq \alpha(f)$ et $e' \leq \beta(f)$; si $f \circ e$ (resp. $e' \circ f$) est défini, alors $f \circ e = \alpha_f^*(e)$ (resp. $e' \circ f = \beta_f^*(e')$).

(ε_2) Soient $e, e' \in C_0^*$; la borne inférieure de e et e' dans $(C_0^*, \leq)$, notée $e \wedge e'$, est définie si, et seulement si, e et e' admettent une borne inférieure $\bar{e}$ dans $(C, \leq)$, et l'on a : $\bar{e} = e \wedge e'$.

(ε_3) Soient $g, f \in C$; le pseudoproduit $g \circ f$ est défini si, et seulement si, $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini; dans ce cas, on a

$$g \circ f = (g \circ \bar{e}) \cdot (\bar{e} \circ f), \text{ où } \bar{e} = \alpha(g) \wedge \beta(f).$$

(ε_4) Soient $f, f_1, f_2 \in C$. Si $f_1, f_2 \leq f$, si $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ et $\beta(f_1) = \beta(f_2)$, alors $f_1 = f_2$.

De (ε_1), (ε_2) et tenant compte que $e = \alpha(e) = \beta(e)$ si $e \in C_0^*$, on déduit

(ε_5) Si $e, e' \in C_0^*$, alors $e \circ e'$ est défini si, et seulement si, $e \wedge e'$ est défini.

De la définition du pseudoproduit on déduit aisément les deux propriétés suivantes :

(ε_6) Si $f, g \in C$ et si $g \circ f$ est défini, alors

$$\alpha(g \circ f) \leq \alpha(f) \quad \text{et} \quad \beta(g \circ f) \leq \beta(g).$$

(ε_7) Le triplet $((C, \leq), \kappa^\odot, (C^\odot * C^\odot, \leq))$ est un morphisme ordonné.

LEMME 4.1. Soit $(C^\bullet, \leq)$ une catégorie ordonnée régulière. Le système multiplicatif $(C, \odot)$ est un pseudomonôme.

DEMONSTRATION. Soient $h, g, f \in C$ tels que $h \odot g$, $g \circ f$ et $(h \odot g) \circ f$ sont définis. On a

$$h \odot g = \bar{h} \cdot \bar{g}, \text{ où } \bar{h} = h \odot \bar{e}, \bar{g} = \bar{e} \circ g \text{ et } \bar{e} = \alpha(h) \wedge \beta(g).$$

Donc $\alpha(\bar{h} \cdot \bar{g}) \wedge \beta(f)$ est défini en vertu de (ε_3). Or $\alpha(\bar{h} \cdot \bar{g}) = \alpha(\bar{g})$, donc $\alpha(\bar{g}) \wedge \beta(f)$ est défini. Par conséquent $\bar{g} \circ f$ est défini à cause de (ε_3). Or $\alpha(\bar{h}) = \beta(\bar{g})$ et $\beta(\bar{g} \circ f) \leq \beta(\bar{g})$, donc $\alpha(\bar{h}) \wedge \beta(\bar{g} \circ f)$ est défini à cause aussi de (ε_3). Par suite $\bar{h} \odot (\bar{g} \circ f)$ est défini. De plus $\bar{h} \leq h$ et $\bar{g} \circ f \leq g \circ f$ en vertu de (ε_7).

Soient $h', k \in C$ tels que $h' \cdot k$ est défini, $h' \leq h$ et $k \leq \bar{g} \circ f$. L'axiome (CR2) entraîne qu'il existe $(g', f') \in C^\bullet * C^\bullet$ tel que $g' \leq \bar{g}$, $f' \leq f$ et $k = g' \cdot f'$. Donc $h' \cdot k = h' \cdot (g' \cdot f')$, par conséquent $h' \cdot g'$ est défini, d'où $h' \leq \bar{h}$ et $g' \leq \bar{g}$ à cause de la définition de $\bar{h} \cdot \bar{g}$. Par suite $h' \leq \bar{h}$ et $g' \cdot f' \leq \bar{g} \circ f$ en vertu de la définition de pseudoproduit. Mais $h' \cdot (g' \cdot f')$ est défini, donc $h' \cdot (g' \cdot f') \leq \bar{h} \odot (\bar{g} \circ f)$ par la même raison. Par suite $\bar{h} \odot (\bar{g} \circ f)$ est le pseudoproduit de h et $g \circ f$.

De même $(h \odot g) \circ f$ est défini si $h \odot g$, $g \circ f$ et $h \odot (g \circ f)$ sont définis.

Supposons maintenant que $h \odot g$, $g \circ f$, $(h \odot g) \circ f$ et $h \odot (g \circ f)$ sont définis. On a $(h \odot g) \circ f = k_1 \cdot f_1$, où $k_1 \leq h \odot g$ et $f_1 \leq f$, d'où :

$$k_1 = h_1 \cdot g_1, \quad h_1 \leq h \quad \text{et} \quad g_1 \leq g.$$

Par suite $g_1 \cdot f_1 \leq g \circ f$ et $(h \odot g) \circ f = h_1 \cdot g_1 \cdot f_1 \leq h \odot (g \circ f)$.

De même $h \odot (g \circ f) \leq (h \odot g) \circ f$. ■

LEMME 4.2. Soit $(C^*, \leq)$ une catégorie ordonnée régulière. Soient $f, g \in C$. Pour que l'on ait $g \leq f$, il faut et il suffit que: $\alpha(g) \leq \alpha(f)$, $\beta(g) \leq \beta(f)$, $\beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$ est défini et $g = \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$.

DEMONSTRATION. Supposons $g \leq f$. Alors $\alpha(g) \leq \alpha(f)$ et $\beta(g) \leq \beta(f)$. Donc $\alpha^2(f) \wedge \alpha^2(g)$ et $\beta^2(g) \wedge \beta^2(f)$ sont définis. De la propriété (ε_5) il en résulte que $\alpha(f) \circ \alpha(g)$ et $\beta(g) \circ \beta(f)$ sont définis; de même $\alpha(f) \circ \beta(\alpha(g))$ et $\alpha(\beta(g)) \circ \beta(f)$. Par suite $f \circ \alpha(g)$ et $\beta(g) \circ f$ sont définis à cause de (ε_2) et (ε_3) .

En vertu de (ε_1) et des conditions $g \leq f$ et $\beta(g) \leq \beta(f)$ on peut écrire $\beta(g) \circ f = \beta_f^*(\beta(g))$. Donc $g \leq \beta(g) \circ f$. Par conséquent $\alpha(g) \leq \alpha(\beta(g) \circ f)$. Par suite $\alpha(\beta(g) \circ f) \wedge \beta(\alpha(g))$ est défini, donc $(\beta(g) \circ f) \circ \alpha(g)$ est défini à cause de (ε_3) .

En faisant usage de (ε_7) on peut écrire $g = g \circ \alpha(g) \leq f \circ \alpha(g)$ et

$$(4.1) \quad g = \beta(g) \circ g \leq \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g)).$$

La propriété (ε_6) entraîne

$$(4.2) \quad \alpha(\beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))) \leq \alpha(f \circ \alpha(g)) \leq \alpha(g),$$

$$(4.3) \quad \beta(\beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))) \leq \beta(g).$$

Soit $f' = \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$. On a $g \leq f'$ en vertu de la formule (4.1), donc $\alpha(g) \leq \alpha(f')$ et $\beta(g) \leq \beta(f')$. Par suite $\alpha(g) = \alpha(f')$ et $\beta(g) = \beta(f')$ à cause des formules (4.2) et (4.3). Par suite $g = f'$ en vertu de la propriété (ε_4) .

Réciproquement, supposons $\alpha(g) \leq \alpha(f)$, $\beta(g) \leq \beta(f)$ et $(\beta(g) \circ f) \circ \alpha(g)$ défini. Alors $\beta(g) \circ f \leq \beta(f) \circ f = f$ en vertu de (ε_7) . Par suite $g = (\beta(g) \circ f) \circ \alpha(g) \leq f \circ \alpha(f) = f$. ■

5. Etant donné un triplet $(C, \circ, \leq)$ tel que $(C, \circ)$ soit un système multiplicatif et $(C, \leq)$ un système ordonné, on dit que U est une classe de pseudounités de $(C^\circ, \leq)$ si U satisfait les deux conditions suivantes :

(PU1) U est une sous-classe de $C_\circ$;

(PU2) Pour tout $f \in C$ la classe

$$\{e \mid e \in U, (f, e) \in C^\circ * C^\circ \text{ et } f \circ e = f\},$$

resp.

$$\{e' \mid e' \in U, (e', f) \in C^\circ * C^\circ \text{ et } e' \circ f = f\},$$

est non vide et admet un plus petit élément, noté $\alpha(f)$, resp. $\beta(f)$. De plus $e \leq \alpha(e)$, $\beta(e)$ si $e \in U$.

Si U est une classe de pseudounités de $(C^\circ, \leq)$, on note $C^\bullet$ le système multiplicatif tel que, si $g, f \in C$, alors $g \bullet f$ est défini si, et seulement si, $\alpha(g) = \beta(f)$ et $g \circ f$ défini; dans ce cas $g \bullet f = g \circ f$.

On dira qu'un triplet $(C^\circ, \leq, U)$ est un *pseudomonoïde ordonné régulier* s'il vérifie les quatre axiomes suivants :

(POR1) C° est un pseudomonoïde et $(C, \leq)$ est un système ordonné.

(POR2) a. U est une classe de pseudounités de $(C^\circ, \leq)$;

b. Si $(g, f) \in C \times C$, alors $g \circ f$ est défini si, et seulement si, $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini et appartient à U .

(POR3) a. Si $(f, e) \in C \times U$ et si $e \leq \alpha(f)$, alors $\alpha(f \circ e) = e$;

b. Si $(e', f) \in U \times C$ et si $e' \leq \beta(f)$, alors $\beta(e' \circ f) = e'$.

(POR4) a. $((C, \leq), \kappa^\circ, (C^\circ * C^\circ, \leq))$ est un morphisme ordonné; si $g \circ f$ est défini, il existe $g' \leq g$, $f' \leq f$ tels que $g \circ f = g' \bullet f'$.

b. Si $(g, f) \in C \times C$ et si $\alpha(g) = \beta(f)$, alors

$$\alpha(g \circ f) = \alpha(f) \text{ et } \beta(g \circ f) = \beta(g).$$

c. Si $(g, f) \in C \times C$, alors $g \leq f$ si, et seulement si, $\alpha(g) \leq \alpha(f)$, $\beta(g) \leq \beta(f)$, $\beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$ est défini et $g = \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$.

Des axiomes (POR1) et (POR2), il résulte

$$e = \alpha(e) = \beta(e) \text{ si } e \in U,$$

$$\alpha(g \circ f) \leq \alpha(f) \text{ et } \beta(g \circ f) \leq \beta(g) \text{ si } (g, f) \in C^\circ * C^\circ.$$

LEMME 5.1. Soit $(C^\circ, \leq, U)$ vérifiant (POR1), (POR2), (POR4)a et :

(R*) Si $e, e' \in U$, si $f \in C$, si $e \leq \alpha(f)$ et si $e' \leq \beta(f)$, on a

$$f \circ e = \alpha_f^*(e) \text{ et } e' \circ f = \beta_f^*(e').$$

Alors :

$$(1) U = C_o^\bullet;$$

(2) si $(g, f) \in C^o * C^o$, alors $g \circ f$ est défini et $g \circ f = g \bullet f$.

DEMONSTRATION.

(1) Soit $e \in U$. Alors $e \bullet e$ est défini et $e \bullet e = e$ puisque $e \circ e$ est défini et

$$e = \alpha(e) = \alpha(e \circ e) = \beta(e) = \beta(e \circ e).$$

Si $f \in C$ et si $f \bullet e$ est défini, alors $f \bullet e = f \circ e$ et $\alpha(f) = \beta(e) = e$, donc $f \bullet e = f \circ e = f \circ \alpha(f) = f$.

De même, si $e \bullet f$ est défini, alors $e \bullet f = f$.

Par conséquent $U \subset C_o^\bullet$.

Soit maintenant $e \in C_o^\bullet$. Alors $e \bullet e$ est défini et $e \bullet e = e$, donc $e = \alpha(e) = \beta(e)$. Par suite $e \in U$.

(2) Soit $(g, f) \in C^o * C^o$. A cause de (POR 2) b, $\bar{e} = \alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini. Or $\bar{e} \leq \alpha(g), \beta(f)$; donc $\alpha(g) \wedge \bar{e}$ et $\bar{e} \wedge \beta(f)$ sont définis, par conséquent $g \circ \bar{e}$ et $\bar{e} \circ f$ sont définis en vertu de (POR 2) b. Posons $\bar{g} = g \circ \bar{e}$ et $\bar{f} = \bar{e} \circ f$. A cause de (R^*) on a $\alpha(\bar{g}) = \bar{e}$ et $\beta(\bar{f}) = \bar{e}$. Donc $\bar{g} \bullet \bar{f}$ est défini; $\bar{g} \bullet \bar{f}$ est le pseudoproduit de g et f par rapport à $(C, \bullet, \leq)$. En effet, soient $g', f' \in C$ tels que $g' \leq g, f' \leq f$ et que $g' \bullet f'$ est défini. La condition (R^*) entraîne $\bar{g} = \alpha_g^*(\bar{e})$ et $\bar{f} = \beta_f^*(\bar{e})$. Donc $g' \leq \bar{g}$ et $f' \leq \bar{f}$. On a aussi $g \circ f = \bar{g} \circ \bar{f}$. En effet si de plus $g' \bullet f' = g \circ f$, l'axiome (POR 4) a entraîne

$$g \circ f = g' \bullet f' = g' \circ f' \leq \bar{g} \circ \bar{f} \leq g \circ f,$$

d'où $g \circ f = \bar{g} \circ \bar{f}$. ■

LEMME 5.2. Si $(C^o, \leq, U)$ est un pseudomonoïde ordonné régulier, alors il vérifie la condition (R^*) . Par suite $((U, \leq), \alpha, (C, \leq))$ et $((U, \leq), \beta, (C, \leq))$ sont des morphismes ordonnés de classe (σ_2) .

DEMONSTRATION. Soit $(f, e) \in C \times U$ tel que $e \leq \alpha(f)$. L'axiome (POR 4) a entraîne $f \circ e \leq f \circ \alpha(f) = f$. Supposons $g \leq f$ et $\alpha(g) \leq e$; le même axiome entraîne $g = g \circ \alpha(g) \leq f \circ e$.

De même $e' \circ f = \beta^*(e')$ si $(e', f) \in U \times C$ et $e' \leq \beta(f)$. ■

THEOREME 5.1. Si $(C^*, \leq)$ est une catégorie ordonnée régulière, alors $(C^\circ, \leq, C_\circ^*)$ est un pseudomonoiïde ordonné régulier. Si $(C, \circ, \leq, U)$ est un pseudomonoiïde ordonné régulier, il existe une unique catégorie $C^\bullet$ telle que $(C^\bullet, \leq)$ soit une catégorie ordonnée régulière, que $U = C_\circ^\bullet$ et que $\circ$ soit le pseudoproduit associé à $(C^\bullet, \leq)$.

DEMONSTRATION. Soit $(C^*, \leq)$ une catégorie ordonnée régulière. La définition du pseudoproduit entraîne que $C_\circ^*$ est une classe de pseudo-unités de $(C, \circ)$. Les axiomes (POR 1), (POR 2), (POR 3) et (POR 4)c sont satisfaits en vertu des lemmes 4.1, 4.2 et des propriétés (ε_1) et (ε_3) . Les conditions a et b de (POR 4) sont des conséquences immédiates de la définition de pseudoproduit et de l'axiome (CR 2).

Supposons maintenant que $(C^\circ, \leq, U)$ est un pseudomonoiïde ordonné régulier. De (POR 4)b il résulte $\alpha(g \bullet f) = \alpha(f)$ et $\beta(g \bullet f) = \beta(g)$ si $g \bullet f$ est défini. De cela, de l'associativité (PM) et de (1) du lemme 5.1, on déduit que $(C, \bullet)$ est une catégorie telle que $C_\circ^\bullet = U$. Du lemme 5.2, de l'axiome (POR) a et de (2) du lemme 5.1, il en résulte que $(C, \bullet, \leq)$ est une catégorie ordonnée régulière.

Pour montrer $(C, \circ, U) = (C, \bullet, U)$ il suffit de montrer, d'après (2) du lemme 5.1, que, si $g, f \in C$ et si $g \circ f$ est défini, alors $g \bullet f$ est défini.

Supposons $g \circ f$ défini. En appliquant (ε_3) pour le pseudoproduit associé à $(C, \bullet, \leq)$, on voit que $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini, donc $g \bullet f$ est défini à cause de (POR 2)b.

Il reste à montrer l'unicité.

Soient $(C, ., \leq)$ et $(\hat{C}, \bullet, \leq)$ des catégories ordonnées régulières telles que $(C, \circ, \leq, C_\circ^*) = (\hat{C}, \circ, \leq, \hat{C}_\circ^\bullet)$. En vertu de la définition de pseudoproduit on a $(C, .) = (\hat{C}, \bullet)$. ■

6. Si $(C, \leq)$ est un système ordonné et si U est une sous-classe de C , on dit que U est héréditaire dans $(C, \leq)$ si, pour tout $(h, e) \in C \times U$ tel que $h \leq e$, on a $h \in U$.

LEMME 6.1. Soit $(C^*, \leq)$ une catégorie ordonnée régulière. Les quatre conditions ci-dessous sont équivalentes.

(H) $C_0^\bullet$ est héréditaire dans $(C, \leq)$.

(S) Si $e_1, e_2 \in C_0^\bullet$ et si $e_2 \odot e_1$ est défini, alors $e_2 \odot e_1 \in C_0^\bullet$.

(C) ξ_1 . Si $e_1, e_2 \in C_0^\bullet$, si $e_2 \odot e_1$ est défini, alors $e_2 = e_2 \odot e_1$ si, et seulement si, $e_2 = e_1 \odot e_2$;

ξ_2 . Si $e_1, e_2 \in C_0^\bullet$, alors $e_2 \leq e_1$ si, et seulement si, $e_2 = e_2 \odot e_1$.

($\hat{C}$) Si $e_2, e_1 \in C_0^\bullet$ et si $e_2 \odot e_1$ est défini, alors $e_2 \odot e_1 = e_2 \wedge e_1$.

DEMONSTRATION. (H) entraîne (S). En effet, soient $e_1, e_2 \in C_0^\bullet$ tels que $e_2 \odot e_1$ est défini. On a $e_2 \odot e_1 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1$, où $\bar{e}_2 \leq e_2$ et $\bar{e}_1 \leq e_1$, en vertu de la définition de pseudoproduit. Donc $\bar{e}_2, \bar{e}_1 \in C_0^\bullet$ à cause de (H).

Par conséquent

$$e = \bar{e}_2 = \bar{e}_1, \text{ donc } e_2 \odot e_1 = e.$$

Donc $e_2 \odot e_1 \in C_0^\bullet$.

(S) entraîne (H). Soit $(b, e) \in C \times C_0^\bullet$ tel que $b \leq e$. Alors $\beta(b), \alpha(b) \leq e = \alpha(e) = \beta(e)$. En faisant usage du lemme 2 on peut écrire $b = \beta(b) \odot (e \odot \alpha(b))$, donc $b \in C_0^\bullet$.

(S) entraîne ξ_1 de (C). En effet, soient $e_1, e_2 \in C_0^\bullet$ et supposons $e_2 \odot e_1$ défini et $e_2 = e_2 \odot e_1$. Alors

$$e_2 = (e_2 \odot e_1) \odot e_2 = e_2 \odot (e_1 \odot e_2).$$

Donc

$$\alpha(e_2) = e_2 \leq \alpha(e_1 \odot e_2) = e_1 \odot e_2 \leq \alpha(e_2) = e_2,$$

puisque $e_1 \odot e_2$ appartient à $C_0^\bullet$ en vertu de (S). Par suite $e_2 = e_1 \odot e_2$.

De même $e_2 = e_1 \odot e_2$ entraîne $e_2 = e_2 \odot e_1$.

(H) et (S) entraînent ξ_2 de (C). En effet, on a $e_2 \leq e_1$ si, et seulement si,

$$e_2 = e_2 \odot (e_1 \odot e_2) = (e_1 \odot e_2) \odot e_2 = e_1 \odot e_2 = e_2 \odot e_1 = e_2.$$

(C) entraîne ($\hat{C}$). En effet, en vertu de (ε_3) on a :

$$e_2 \odot e_1 = (e_2 \odot (e_2 \wedge e_1)) \cdot ((e_2 \wedge e_1) \odot e_1).$$

Or $e_2 \wedge e_1 \leq e_2, e_1$, donc

$$e_2 \wedge e_1 = (e_2 \wedge e_1) \odot e_2 = e_2 \odot (e_2 \wedge e_1) \text{ et } e_2 \wedge e_1 = (e_2 \wedge e_1) \odot e_1$$

en vertu de (C) . Par suite

$$e_2 \odot e_1 = (e_2 \wedge e_1) \cdot (e_2 \wedge e_1) = e_2 \wedge e_1.$$

$(\hat{C})$ entraîne (S) trivialement. ■

On dit que $(C, ., \leq)$ est une *catégorie ordonnée totalement régulière* si $(C^*, \leq)$ est une catégorie ordonnée régulière telle que C_0^* soit héréditaire dans $(C, \leq)$.

Un *morphisme de catégories ordonnées régulières* est un triplet $((\hat{C}^*, \leq), \varphi, (C^*, \leq))$ tel que $(\hat{C}^*, \leq)$ et $(C^*, \leq)$ sont des catégories ordonnées régulières et φ une surjection de C dans $\hat{C}$, ces données satisfaisant les trois conditions suivantes :

(MC1) $(\hat{C}^*, \varphi, C^*)$ est un foncteur (covariant);

(MC2) $((\hat{C}^*, \leq), \varphi, (C^*, \leq))$ est un morphisme ordonné;

(MC3) Pour tout $e, e' \in C_0^*$, on a :

(γ_1) si $e \wedge e'$ est défini, alors $\varphi(e) \wedge \varphi(e')$ est défini et

$$\varphi(e \wedge e') = \varphi(e) \wedge \varphi(e');$$

(γ_2) si $f \in C$, si $e, e' \in C_0^*$, si $e \leq \alpha(f)$ et si $e' \leq \beta(f)$, alors

$$\varphi(\alpha_f^*(e)) = \alpha_{\varphi(f)}^*(\varphi(e)) \text{ et } \varphi(\beta_f^*(e')) = \beta_{\varphi(f)}^*(\varphi(e')).$$

LEMME 6.2. Soit φ une surjection de C dans $\hat{C}$. Si $((\hat{C}^*, \leq), \varphi, (C^*, \leq))$ est un morphisme de catégories ordonnées régulières, alors

(M1) Si $f, g \in C$ et si $g \odot f$ est défini, alors $\varphi(g) \odot \varphi(f)$ est défini et $\varphi(g \odot f) = \varphi(g) \odot \varphi(f)$;

(M2) Pour tout $f \in C$, on a

$$\alpha(\varphi(f)) = \varphi(\alpha(f)) \text{ et } \beta(\varphi(f)) = \varphi(\beta(f)).$$

Si $(\hat{C}^*, \leq)$ et $(C^*, \leq)$ sont des catégories ordonnées totalement régulières et si φ vérifie (M1) et (M2), alors $((\hat{C}^*, \leq), \varphi, (C^*, \leq))$ est un morphisme de catégories ordonnées régulières.

DEMONSTRATION. Soit $((\hat{C}^*, \leq), \varphi, (C^*, \leq))$ un morphisme de catégories ordonnées régulières. En faisant usage de (ε_1) et (ε_3) on peut écrire :

$$\begin{aligned}\varphi(g \circ f) &= \varphi(\overline{g}) \cdot \varphi(\overline{f}) = \varphi(\alpha_g^*(e)) \cdot \varphi(\beta_f^*(e)) \\ &= \alpha_{\varphi(g)}^*(\varphi(e)) \cdot \beta_{\varphi(f)}^*(\varphi(e)) = \overline{\varphi(g)} \cdot \overline{\varphi(f)} = \varphi(g) \circ \varphi(f),\end{aligned}$$

où $e = \alpha(g) \wedge \beta(f)$.

Soit φ vérifiant (M1) et (M2). Supposons que $(\hat{C}^*, \leq)$ et $(C^*, \leq)$ sont des catégories ordonnées totalement régulières. De la définition du pseudoproduit $\circ$ et de (M1) et (M2), il résulte que $(\hat{C}^*, \varphi, C^*)$ est un foncteur. La condition $(\hat{C})$ du lemme 6.1 entraîne (γ_1) de (MC3). La propriété (ε_1) et la condition (M1) entraînent (γ_2) de (MC3). ■

On note $\mathfrak{M}_o$ une classe de classes contenant, avec une classe toutes ses sous-classes, avec deux classes leur produit cartésien. On note $\mathfrak{M}$ la catégorie dont les éléments sont les applications $(\hat{M}, \varphi, M)$, où $\hat{M}, M \in \mathfrak{M}_o$.

On note Γ_o la classe constituée par toutes les catégories ordonnées totalement régulières $(C^*, \leq)$ telles que $C \in \mathfrak{M}_o$. On note Γ la catégorie ayant Γ_o pour classe d'objets et dont les éléments sont les morphismes de catégories ordonnées régulières.

On note $(\mathfrak{M}, p_\Gamma, \Gamma)$ le foncteur d'oubli de Γ vers $\mathfrak{M}$; c'est un foncteur d'homomorphismes saturé (Cf. [8], Chap. 2, §3).

7. On dira qu'un triplet $(C, \circ, U)$ est un *pseudomonoïde fléché* s'il vérifie, en plus de l'axiome (μ_1) , les axiomes (μ_2) et (μ_3) ci-dessous :

(μ_2) a. Pour tout $f \in C$, la classe des éléments $e \in U$ (resp. $e' \in U$) tels que $f \circ e$ (resp. $e' \circ f$) est défini et $f \circ e = f$ (resp. $e' \circ f = f$) est non vide et admet un plus petit élément noté $\alpha(f)$ (resp. $\beta(f)$). On note α (resp. β) la fonction de C dans U définie par $f \mapsto \alpha(f)$ (resp. $f \mapsto \beta(f)$).

b. Si $f, g \in C$, alors $g \circ f$ est défini si, et seulement si, $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini dans $(U, \leq)$. De plus U est stable.

(μ_3) Pour tout $f \in C$, on a :

(Rd) Si $e \in U$, si $e \leq \alpha(f)$ et si $f \circ e$ est défini, alors $\alpha(f \circ e) = e$;

(Rg) Si $e' \in U$, si $e' \leq \beta(f)$ et si $e' \circ f$ est défini, alors $\beta(e' \circ f) = e'$.

LEMME 7.1. Soit $(C, \circ, U)$ un pseudomonoié fléché. Si $e_2, e_1 \in U$ et si $e_2 \circ e_1$ est défini (donc $e_2 \wedge e_1$ est aussi défini), on a alors $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \wedge e_1$. Par suite U est stable, symétrique et commutative.

DEMONSTRATION. En effet, $\beta(e_2 \circ e_1) \leq e_2$ et $\alpha(e_2 \circ e_1) \leq e_1$. Donc

$$\beta(e_2 \circ e_1) = \beta(e_2 \circ e_1) \circ e_2 \quad \text{et} \quad \alpha(e_2 \circ e_1) = e_1 \circ \alpha(e_2 \circ e_1).$$

En faisant usage de l'associativité (PM) on peut écrire

$$\begin{aligned} e_2 \circ e_1 &= (e_2 \circ e_1) \circ \alpha(e_2 \circ e_1) = (\beta(e_2 \circ e_1) \circ (e_2 \circ e_1)) \circ \alpha(e_2 \circ e_1) \\ &= ((\beta(e_2 \circ e_1) \circ e_2) \circ e_1) \circ \alpha(e_2 \circ e_1) = \\ &= (\beta(e_2 \circ e_1) \circ e_1) \circ \alpha(e_2 \circ e_1). \end{aligned}$$

Par conséquent $e_2 \circ e_1 \leq e_1$, d'après $e_2 \circ e_1 \in U$ et (μ_1) .

De même $e_2 \circ e_1 \leq e_2$.

En faisant usage de l'axiome (μ_1) on peut écrire

$$\begin{aligned} e_2 \wedge e_1 &= (e_2 \wedge e_1) \circ (e_2 \wedge e_1) = ((e_2 \wedge e_1) \circ e_2) \circ (e_1 \circ (e_2 \wedge e_1)) \\ &= ((e_2 \wedge e_1) \circ (e_2 \circ e_1)) \circ (e_2 \wedge e_1) = (e_2 \wedge e_1) \circ (e_2 \circ e_1). \end{aligned}$$

Par suite $e_2 \wedge e_1 \leq e_2 \circ e_1$. ■

LEMME 7.2. Soit $(C, \circ, U)$ un pseudomonoié fléché. Alors

(1) Il existe une relation unique d'ordre sur C , notée aussi $\leq$, qui induise dans U la relation d'ordre sur U définie par le lemme 1.1 et telle que, pour $g, f \in C$, on ait $g \leq f$ si, et seulement si, $\alpha(g) \leq \alpha(f)$, $\beta(g) \leq \beta(f)$, $\beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$ est défini et $g = \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$;

(2) U est une classe de pseudounités de $(C, \circ, \leq)$;

(3) U est héréditaire dans $(C, \leq)$.

DEMONSTRATION. (1) L'anti-symétrie est conséquence de la définition de $(C, \leq)$, de l'associativité (PM) et de la condition (ξ) de (μ_1) . La transitivité de $(C, \leq)$ résulte de l'associativité (PM).

De (ξ) , de l'axiome (μ_1) et du lemme 7.1 on déduit : si $e_1, e_2 \in U$, alors $e_1 = e_1 \circ e_2$ si, et seulement si, $e_1 = e_1 \circ (e_2 \circ e_1)$.

L'unicité est évidente.

(2) est une conséquence de (1) et de l'axiome (μ_2) a.

Le lemme 7.1 entraîne que U est héréditaire. En effet, si $(b, e) \in C \times U$ et si $b \leq e$, alors $b = \beta(b) \circ (e \circ \alpha(b))$. ■

LEMME 7.3. Soit $(C, \circ, U)$ un pseudomonôïde fléché. Alors $(C, \circ, \leq, U)$ satisfait les axiomes $(POR1)$, $(POR2)$, $(POR3)$, $(POR4)_c$ et la condition (R^*) . De plus :

(1) $((U, \leq), \alpha, (C, \leq))$ et $((U, \leq), \beta, (C, \leq))$ sont des morphismes ordonnés de classe (σ_2) .

(2) $((U \times U, \leq), [\beta, \alpha], (C, \leq))$ est de classe (σ') .

DEMONSTRATION. Du lemme 7.2 et des axiomes (μ_2) et (μ_3) il résulte que $(C^\circ, \leq, U)$ vérifie les axiomes $(POR1)$, $(POR2)$, $(POR3)$ et $(POR4)_c$. La propriété (1) est une conséquence de (R^*) . La propriété (2) est immédiate d'après la définition de $(C, \leq)$. Il reste à montrer (R^*) .

Soit $(e, f) \in U \times C$ tel que $e \leq \alpha(f)$. Donc $\alpha(f) \circ e$ est défini et $e = \beta(e)$. Par conséquent $f \circ e$ est défini en vertu de $(\mu_2)_b$. Par suite $\alpha(f \circ e) = e$ à cause de (Rd) . On a $f \circ e \leq f$; en effet,

$$f \circ e = \beta(f \circ e) \circ (f \circ e) = \beta(f \circ e) \circ (f \circ \alpha(f \circ e))$$

$$\text{et } \beta(f) \circ (f \circ e) = f \circ e.$$

Donc $\beta(f \circ e) \leq \beta(f)$.

Soit $g \in C$ tel que $g \leq f$ et $\alpha(g) \leq e$. Alors $\beta(g) \circ f$, $f \circ \alpha(g)$, $\alpha(g) \circ e$ et $\beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$ sont définis et $\alpha(g) = \alpha(g) \circ e$ et $g = \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g))$. Or, en vertu du lemme 7.1, U est commutative et symétrique, donc $g = \beta(g) \circ (f \circ \alpha(g)) = \beta(g) \circ (f \circ (e \circ \alpha(g)))$ et $\beta(g) \circ (f \circ e)$, $(f \circ e) \circ \alpha(g)$ sont définis. Par suite $g \leq f \circ e$. Par conséquent $f \circ e = \alpha_f^*(e)$.

De même on a $e' \circ f = \beta_f^*(e')$ si $e' \leq \beta(f)$. ■

PROPOSITION 7.1. Pour qu'un triplet $(C, \circ, U)$ soit un pseudomonôïde fléché, il faut et il suffit qu'il vérifie les axiomes (μ_1) , (μ_2^*) et (μ_3^*) , où

(μ_2^*) a. Il existe des fonctions α et β de C dans U telles que

(i₁) Si $f \in C$, alors $f \circ \alpha(f)$, $\beta(f) \circ f$ sont définis et $f = f \circ \alpha(f) = \beta(f) \circ f$;

(i₂) Si $e \in U$, alors $e = \alpha(e) = \beta(e)$;

(i_3) Si $f, g \in C$ et si $g \circ f$ est défini, alors $\alpha(g \circ f) \leq \alpha(f)$
et $\beta(g \circ f) \leq \beta(g)$;

b. Si $e, e' \in U$, alors $e \circ e'$ est défini si, et seulement si, $e \wedge e'$ est défini dans $(U, \leq)$. Si $f, g \in C$, alors $g \circ f$ est défini si, et seulement si, $\alpha(g) \circ \beta(f)$ est défini.

(μ_3') Pour tout $f \in C$, on a :

($\overset{\circ}{R}d$) Si $(f, e) \in C \times U$ et si $f \circ e$ est défini (donc $\alpha(f) \circ e$ est défini en vertu de (μ_2') b), alors $\alpha(f \circ e) = \alpha(f) \circ e$;

($\overset{\circ}{R}g$) Si $(e', f) \in U \times C$ et si $e' \circ f$ est défini, alors $\beta(e' \circ f) = e' \circ \beta(f)$.

DEMONSTRATION. (μ_1) et (μ_2) entraînent (μ_2') . En effet, (i_1) et (i_2) en sont des conséquences immédiates, en vertu des définitions de $\alpha(f)$ et $\beta(f)$. Montrons (i_3). Soient $g, f \in C$ tels que $g \circ f$ est défini; donc $g \circ (f \circ \alpha(f))$ est défini. En tenant compte de l'associativité (PM) on peut écrire $g \circ f = g \circ (f \circ \alpha(f)) = (g \circ f) \circ \alpha(f)$, donc $\alpha(g \circ f) \leq \alpha(f)$.

De même $\beta(g \circ f) \leq \beta(g)$.

La condition b de (μ_2') est une conséquence immédiate de (μ_2) b en vertu de (i_2).

(μ_1) , (μ_2) et (μ_3) entraînent (μ_3') . En effet, soit $(f, e) \in C \times U$ tel que $f \circ e$ est défini; alors $\alpha(f) \circ e \in U$ à cause du lemme 7.2, donc $\alpha(f) \circ e \leq \alpha(f)$, en vertu aussi du lemme 7.2. Par conséquent

$$\alpha(f \circ e) = \alpha(f \circ (\alpha(f) \circ e)) = \alpha(f) \circ e$$

à cause de (Rd).

De même on a ($\overset{\circ}{R}g$).

(μ_2') a entraîne (μ_2) a trivialement.

L'équivalence entre les axiomes (μ_2) b et (μ_2') b est évidente, puisque $e = \alpha(e) = \beta(e)$ si $e \in U$. ■

Du lemme 7.1 et de la proposition 7.1 on déduit aisément :

PROPOSITION 7.2. Pour qu'un triplet $(C, \circ, U)$ soit un pseudomonoïde fléché, il faut et il suffit que $(C, \circ, U)$ satisfasse les deux axiomes suivants :

$(\overset{\circ}{\mu}_1)(C, \circ)$ est un pseudomonoïde et U est une sous-classe de

C_o stable, symétrique et commutative.

(μ_2) Pour tout $f \in C$ il existe d'unique éléments de U , notés $\alpha(f)$ et $\beta(f)$, tels que

- a. $f \circ \alpha(f)$, $\beta(f) \circ f$ sont définis et $f = f \circ \alpha(f) = \beta(f) \circ f$;
- b. Si $g \in C$ et si $\alpha(g) \circ \beta(f)$ est défini, alors $g \circ f$ est défini; si $e \wedge e'$ existe dans $(U, <)$, $e \circ e'$ est défini.
- c. Si $g \in C$ et si $g \circ f$ est défini, alors $\alpha(g) \circ f$ et $g \circ \beta(f)$ sont définis;
- d. Si $e, e' \in U$, si $f \circ e$ et $e' \circ f$ sont définis, alors $\alpha(f) \circ e$ et $e' \circ \beta(f)$ sont définis, $\alpha(f \circ e) = \alpha(f) \circ e$ et $\beta(e' \circ f) = e' \circ \beta(f)$.

LEMME 7.4. Soit $(C, \circ, U)$ un pseudomonoiïde fléché. Alors

$$(1) U = C_o^\bullet;$$

$$(2) \text{ Si } (g, f) \in C^\circ * C^\circ, \text{ alors } g \circ f \text{ est défini et } g \circ f = g \circ f.$$

DEMONSTRATION. Du lemme 7.3 il résulte que $(C^\circ, \leq, U)$ satisfait les conditions, la preuve du lemme 5.1 étant applicable. ■

8. On dit qu'un triplet $(C, \circ, U)$ est un pseudomonoiïde totalement régulier si $(C, \circ, U)$ est un pseudomonoiïde fléché satisfaisant en plus l'axiome suivant :

- (μ_u) a. Si g, g', f et f' sont des éléments de C tels que $g' \leq f'$, $g \leq f$ et $g' \circ g, f' \circ f$ sont définis, alors $g' \circ g \leq f' \circ f$;
 - b. Si $f, g \in C$ et si $\alpha(g) = \beta(f)$, alors
- $$\alpha(f) \leq \alpha(g \circ f) \text{ et } \beta(g) \leq \beta(g \circ f).$$

Un morphisme de pseudomonoiïdes totalement réguliers est un triplet $((\hat{C}^\circ, \hat{U}), \varphi, (C^\circ, U))$ tel que $(\hat{C}, \varphi, C)$ soit une application, $(\hat{C}^\circ, \hat{U})$ et (C°, U) des pseudomonoiïdes totalement réguliers vérifiant :

(MP1) Si $f, g \in C$ et si $g \circ f$ est défini, alors $\varphi(g) \circ \varphi(f)$ est aussi défini et $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \circ \varphi(f)$;

(MP2) Pour tout $f \in C$ on a

$$\alpha(\varphi(f)) = \varphi(\alpha(f)) \text{ et } \beta(\varphi(f)) = \varphi(\beta(f)).$$

THEOREME 8.1. *Si $(C^\bullet, \leq)$ est une catégorie ordonnée totalement régulière, alors $(C, \odot, C_o^\bullet)$ est un pseudomonôïde totalement régulier. Si $(C, \circ, U)$ est un pseudomonôïde totalement régulier, il existe une catégorie unique ordonnée totalement régulière $(C^\bullet, \leq)$ telle que $(C, \odot, C_o^\bullet) = (C, \circ, U)$. Soient $(\hat{C}^\bullet, \leq)$ et $(C^\bullet, \leq)$ des catégories ordonnées totalement régulières et φ une surjection de C dans $\hat{C}$; alors $((\hat{C}^\bullet, \leq), \varphi, (C^\bullet, \leq))$ est un morphisme de catégories ordonnées régulières si, et seulement si, $((\hat{C}, \odot, \hat{C}_o^\bullet), \varphi, (C, \odot, C_o^\bullet))$ est un morphisme de pseudomonôïdes totalement réguliers.*

DEMONSTRATION. Soit $(C^\bullet, \leq)$ une catégorie ordonnée totalement régulière. Les lemmes 4.1, 6.1 et les propriétés (ε_1) , (ε_3) et (ε_7) entraînent que $(C, \odot, C_o^\bullet)$ est un pseudomonôïde totalement régulier.

Soit $(C, \circ, U)$ un pseudomonôïde totalement régulier. De (μ_u) b il résulte que $\alpha(g \bullet f) = \alpha(f)$ et $\beta(g \bullet f) = \beta(g)$ si $g \bullet f$ est défini. De cela, de l'associativité (PM) et de (1) du lemme 7.4 on déduit que $(C, \bullet)$ est une catégorie telle que $C_o^\bullet = U$. De (1) et (2) du lemme 7.3 et de (μ_u) a, il en résulte que $(C^\bullet, \leq)$ est une catégorie ordonnée régulière, où $(C, \leq)$ est le système ordonné associé à (C°, U) . $C_o^\bullet$ est héréditaire; en effet, soit $(h, e) \in C \times C_o^\bullet$ tel que $h \leq e$. Donc $h = \beta(h) \circ (e \circ \alpha(h))$. Or $C_o^\bullet = U$ en vertu de (1) du lemme 7.4, donc $h \in C_o^\bullet$ à cause des lemmes 6.1 et 7.1.

Les relations d'ordre associées à $(C, \odot, C_o^\bullet)$ et à $(C, \circ, U)$ coïncident en vertu du lemme 4.2 et de la définition de la relation d'ordre associée à $(C, \circ, U)$.

Pour montrer que $(C, \circ, U) = (C, \odot, C_o^\bullet)$ il reste, d'après le lemme 7.4, à montrer que, si $g, f \in C$ et si $g \odot f$ est défini, alors $g \circ f$ est défini et $g \odot f = g \circ f$.

Supposons $g \odot f$ défini. En appliquant (ε_3) pour le pseudoproduit associé à $(C^\bullet, \leq)$, on voit que $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ est défini, donc que $g \circ f$ est défini à cause de la condition b de (POR2).

Il reste à montrer l'unicité.

Soient $(C^\bullet, \leq)$ et $(\hat{C}^\bullet, \leq)$ des catégories ordonnées régulières

telles que $(C, \circ, C_\circ^\bullet) = (\hat{C}, \circ, C_\circ^\bullet)$. En vertu de la définition du pseudo-produit, on a $(C, \cdot) = (\hat{C}, \bullet)$. Du lemme 4.2 il en résulte $(C, \leq) = (\hat{C}, \leq)$.

La dernière partie du théorème est conséquence du lemme 6.2. ■

On note $\Lambda_\circ$ la classe des pseudomonoides totalement réguliers (C°, U) tels que C appartienne à $\mathfrak{M}_\circ$.

On note Λ la catégorie dont les éléments sont les morphismes de pseudomonoides totalement réguliers $((\hat{C}^\circ, \hat{U}), \varphi, (C^\circ, U))$ tels que $\hat{C}$ et C appartiennent à $\mathfrak{M}_\circ$. On note $(\mathfrak{M}, p_\Lambda, \Lambda)$ le foncteur d'oubli défini par

$$((\hat{C}^\circ, \hat{U}), \varphi, (C^\circ, U)) \mapsto (\hat{C}, \varphi, C).$$

Du théorème 7.1 on déduit

THEOREME 7.2. *Le procédé de déduction $(C^\bullet, \leq) \mapsto (C, \circ, C_\circ^\bullet)$ définit une bijection de $\Gamma_\circ$ sur $\Lambda_\circ$. Plus précisément le procédé de déduction*

$$((\hat{C}^\bullet, \leq), \varphi, (C^\bullet, \leq)) \mapsto ((\hat{C}, \circ, \hat{C}_\circ^\bullet), \varphi, (C, \circ, C_\circ^\bullet))$$

définit un isomorphisme covariant (cf. [8], p. 60) du foncteur d'oubli $(\mathfrak{M}, p_\Gamma, \Gamma)$ sur $(\mathfrak{M}, p_\Lambda, \Lambda)$.

9. Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoid. Soient $g, f \in C$.

On dit que g et f sont *régulièrement conjugués* si $f \circ g, g \circ f, f \circ (g \circ f)$ et $g \circ (f \circ g)$ sont définis et si

$$f = f \circ (g \circ f) \text{ et } g = g \circ (f \circ g).$$

Si g et f sont régulièrement conjugués, alors $f \circ g, g \circ f \in C_\circ$. En effet, si $e' = f \circ g$, alors

$$e' = f \circ g = ((f \circ g) \circ f) \circ g = (f \circ g) \circ (f \circ g),$$

donc $e' \in C_\circ$. De même $g \circ f$ est idempotent.

LEMME 9.1. *Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoid. Soient $e, e' \in C_\circ$ tels que $e \circ e'$ et $e' \circ e$ sont définis. Si $e \circ e'$ et $e' \circ e$ sont régulièrement conjugués, alors $e \circ e', e' \circ e \in C_\circ$.*

DEMONSTRATION. En effet,

$$\begin{aligned} e \circ e' &= ((e \circ e') \circ (e' \circ e)) \circ (e \circ e') = (((e \circ e') \circ e') \circ e) \circ (e \circ e') \\ &= ((e \circ e') \circ e) \circ (e \circ e') = (e \circ e') \circ (e \circ (e \circ e')) = (e \circ e') \circ (e \circ e'). \end{aligned}$$

De même on montre que $e' \circ e \in C_o$. ■

On dira que la classe C_o est *effective* si, pour tout $(e, e') \in C_o \times C_o$ tel que e et e' sont régulièrement conjugués, on a $e = e'$.

LEMME 9.2. Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoid. Pour que C_o soit commutatif, il faut et il suffit que C_o soit effectif et que $e \circ e' \in C_o$ si $e, e' \in C_o$ et si $e \circ e', e' \circ e$ sont définis.

DEMONSTRATION. Les conditions sont nécessaires. En effet, soient $e, e' \in C_o$ tels que $e \circ e'$ et $e' \circ e$ sont définis. A cause de la commutativité de C_o et de l'associativité (PM) on peut écrire

$$\begin{aligned} e \circ e' &= (e \circ e) \circ e' = e \circ (e \circ e') = e \circ (e' \circ e) = e \circ (e' \circ (e' \circ e)) \\ &= (e \circ e') \circ (e' \circ e) = (e \circ e') \circ (e \circ e'). \end{aligned}$$

Supposons $e = e \circ (e' \circ e)$ et $e' = e' \circ (e \circ e')$. Alors

$$e = (e \circ e') \circ e = (e' \circ e) \circ e = e' \circ e \quad \text{et} \quad e' = e' \circ (e \circ e') = e' \circ (e' \circ e) = e' \circ e.$$

Par conséquent $e = e'$.

La condition est suffisante. Soient $e, e' \in C_o$ tels que $e \circ e'$ et $e' \circ e$ sont définis, donc $e \circ e', e' \circ e \in C_o$.

En faisant usage de l'associativité (PM) on peut écrire

$$\begin{aligned} e \circ e' &= (e \circ e') \circ (e \circ e') = (e \circ e') \circ (e \circ (e \circ e')) \\ &= ((e \circ e') \circ e) \circ (e \circ e') = (((e \circ e') \circ e') \circ e) \circ (e \circ e') \\ &= ((e \circ e') \circ (e' \circ e)) \circ (e \circ e'). \end{aligned}$$

De même $e' \circ e = ((e' \circ e) \circ (e \circ e')) \circ (e' \circ e)$. Or C_o est effective, donc $e \circ e' = e' \circ e$. ■

COROLLAIRE 9.1. Si C_o est symétrique, alors C_o est commutative si, et seulement si, C_o est stable et effective.

PROPOSITION 9.1. Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoid satisfaisant l'axiome suivant :

(PG)a. Pour tout $f \in C$ il existe un élément unique de C , noté $f^\#$, tel que f et $f^\#$ sont régulièrement conjugués;

b. Si $(g, f) \in C \times C$ et si $g \circ f$ est défini, alors $f^\# \circ g^\#$ est défini et $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$.

Alors C_o est symétrique et commutatif.

DEMONSTRATION. Soit $e \in C_o$. Les égalités

$$(e \circ e) \circ e = e = e \circ (e \circ e)$$

entraînent que e est régulièrement conjugué à e , donc $e = e^\#$. Si $e' \in C_o$ et si $e \circ e'$ est défini, $e' \circ e = e'^\# \circ e^\#$ est défini et égal à $(e \circ e')^\#$, d'après (PG). Le lemme 9.1 montre que $e \circ e' \in C_o$, donc

$$e \circ e' = (e \circ e')^\# = e' \circ e. \blacksquare$$

LEMME 9.3. Soit $(C, \circ)$ un pseudomonioïde tel que C_o soit commutatif. Pour tout $f \in C$, il existe au plus un élément régulièrement conjugué à f .

DEMONSTRATION. Soient $g, g', f \in C$ tels que g et f (resp. g' et f) sont régulièrement conjugués. Alors $f = f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f$, donc

$$g' \circ f = g' \circ (f \circ (g \circ f)) = (g' \circ f) \circ (g \circ f),$$

$$f \circ g' = ((f \circ g) \circ f) \circ g' = (f \circ g) \circ (f \circ g').$$

Or $f = f \circ (g' \circ f) = (f \circ g') \circ f$, donc $g' \circ f, g \circ f, f \circ g, f \circ g'$ appartiennent à C_o . En faisant usage de la commutativité de C_o on peut écrire

$$g \circ f = g \circ (f \circ (g' \circ f)) = (g \circ f) \circ (g' \circ f) = (g' \circ f) \circ (g \circ f) = g' \circ f,$$

$$f \circ g = ((f \circ g') \circ f) \circ g = (f \circ g') \circ (f \circ g) = (f \circ g) \circ (f \circ g') = f \circ g'.$$

Mais $g = g \circ (f \circ g)$ et $g' = (g' \circ f) \circ g'$. Par conséquent

$$g = g \circ (f \circ g) = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = (g' \circ f) \circ g' = g'. \blacksquare$$

PROPOSITION 9.2. La donnée d'un pseudomonioïde $(C, \circ)$ vérifiant l'axiome (PG) est équivalente à la donnée d'un triplet $(C, \circ, \#)$ tel que $(C, \circ)$ est un pseudomonioïde, C_o est commutative et $\#$ est une surjection de C dans C définissant un anti-automorphisme involutif et conjugué de $(C, \circ)$, c'est-à-dire :

(AA1) Si $(g, f) \in C \times C$ et si $g \circ f$ est défini, alors $\#(f) \circ \#(g)$ est défini et $\#(g \circ f) = \#(f) \circ \#(g)$;

(AA2) Si $f \in C$, alors $f = \#(\#(f))$;

(AA3) Si $f \in C$, alors $f \circ \#(f)$ et $f \circ (\#(f) \circ f)$ sont définis (donc aussi $\#(f) \circ f$ est défini) et $f = f \circ (\#(f) \circ f)$.

DEMONSTRATION. Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde satisfaisant l'axiome (PG) . Alors $C_\circ$ est commutative en vertu de la proposition 9.1. Pour montrer que la surjection $\#$ de C dans C définie par $f \mapsto f^\#$ est un anti-automorphisme involutif et conjugué il suffit, d'après l'axiome (PG) , de montrer que $f = (f^\#)^\#$ pour tout $f \in C$, mais cela est vrai puisque f et $f^\#$ sont régulièrement conjugués.

Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde muni d'un anti-automorphisme involutif et conjugué $\# : C \rightarrow C$. Des conditions $(AA1)$, $(AA2)$ et $(AA3)$ on déduit que f et $\#(f)$ sont régulièrement conjugués.

$C_\circ$ étant commutative, le lemme 9.3 entraîne que $\#(f)$ est l'unique élément de C tel que f et $\#(f)$ soient régulièrement conjugués. ■

PROPOSITION 9.3. Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde et soit $\#$ une surjection de C dans C définissant un anti-automorphisme involutif et conjugué. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :

- (1) $C_\circ$ est commutative;
- (2) $C_\circ$ est effective;
- (3) Si $e \in C_\circ$, alors $e = \#(e)$.

DEMONSTRATION. (1) entraîne (2) en vertu de la proposition 9.3. (2) entraîne (3) trivialement. (3) entraîne (1). En effet, $C_\circ$ étant symétrique il suffit, d'après le corollaire 9.1, de montrer que $C_\circ$ est stable. Soient $e_1, e_2 \in C_\circ$ tels que $e_1 \circ e_2$ est défini. Alors

$$\begin{aligned} e_1 \circ e_2 &= (e_1 \circ e_2) \circ (\#(e_1 \circ e_2) \circ (e_1 \circ e_2)) = (e_1 \circ e_2) \circ ((e_2 \circ e_1) \circ (e_1 \circ e_2)) \\ &= (e_1 \circ e_2) \circ (e_2 \circ (e_1 \circ (e_1 \circ e_2))) = (e_1 \circ e_2) \circ (e_2 \circ (e_1 \circ e_2)) \\ &= ((e_1 \circ e_2) \circ e_2) \circ (e_1 \circ e_2) = (e_1 \circ e_2) \circ (e_1 \circ e_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMME 9.4. Soit $(C, \circ)$ un pseudomonoïde. Alors $C_\circ$ est effectif si, et seulement si, $C_\circ$ satisfait la condition suivante :

(&) Si $e, e' \in C_\circ$, si $e \circ e'$ et $e' \circ e$ sont définis et $e = e \circ e'$, et si $e' \circ e \in C_\circ$, alors $e = e' \circ e$.

DEMONSTRATION. Supposons que $C_\circ$ est effective. Si $e = e \circ e'$, alors

$$\begin{aligned}
e &= e \circ e = (e \circ e') \circ e = e \circ (e' \circ e) = e \circ ((e' \circ e) \circ e), \\
e' \circ e &= e' \circ (e \circ e) = e' \circ ((e \circ e') \circ e) = e' \circ (e \circ (e' \circ e)) \\
&= e' \circ ((e \circ e) \circ (e' \circ e)) = (e' \circ (e \circ e)) \circ (e' \circ e) \\
&= ((e' \circ e) \circ e) \circ (e' \circ e) = (e' \circ e) \circ (e \circ (e' \circ e)),
\end{aligned}$$

or $e, e' \circ e \in C_o$, donc $e = e' \circ e$.

Réciproquement, supposons ($\&$). Soient $e_1, e_2 \in C_o$ tels que e_1 et e_2 sont régulièrement conjugués. On a $e_1 = e_1 \circ (e_2 \circ e_1)$ et $e_2 = e_2 \circ (e_1 \circ e_2)$. Soit $e = e_1 \circ e_2$ et soit $e' = e_2 \circ e_1$. Alors $e, e' \in C_o$. De plus

$$\begin{aligned}
e_1 &= e_1 \circ e' = e' \circ e_1 = (e_2 \circ e_1) \circ e_1 = e_2 \circ e_1 = e_1 \circ e_2, \\
e_2 &= e_2 \circ e = e \circ e_2 = (e_1 \circ e_2) \circ e_2 = e_1 \circ e_2.
\end{aligned}$$

Par suite $e_1 = e_2$. ■

On dira que $(C, \circ)$ est un *pseudogroupoïde* si $(C, \circ)$ est un pseudomonoid vérifiant l'axiome (PG) et l'axiome suivant :

(AB) Si $(g, f) \in C \times C$, alors $g \circ f$ est défini si, et seulement si, $\alpha^{\#}(g) \circ \beta^{\#}(f)$ est défini, où $\alpha^{\#}(g) = g^{\#} \circ g$ et $\beta^{\#}(f) = f \circ f^{\#}$.

Des propositions 9.2, 9.3 et du lemme 9.4 il résulte :

THEOREME 9.1. *La donnée d'un pseudogroupoïde $(C, \circ)$ est équivalente à la donnée d'un triplet $(C, \circ, \#)$ tel que $(C, \circ)$ soit un pseudomonoid, $\#$ une fonction de C dans C définissant un anti-automorphisme involutif et conjugué de $(C, \circ)$ vérifiant l'axiome (AB) et que C_o satisfasse une des conditions suivantes : (i) C_o est commutative; (ii) C_o est effective; (iii) si $e \in C_o$, alors $e = \#(e)$; (iv) C_o vérifie la condition ($\&$).*

Un morphisme de pseudogroupoïdes est un triplet $((\hat{C}, \circ), \varphi, (C, \circ))$ tel que $(\hat{C}, \circ), (C, \circ)$ sont des pseudogroupoïdes et φ une surjection de C dans $\hat{C}$ telle que, pour tout $(g, f) \in C^{\circ} * C^{\circ}$, $\varphi(g) \circ \varphi(f)$ soit défini et $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \circ \varphi(f)$.

LEMME 9.5. *Soit $((\hat{C}, \circ), \varphi, (C, \circ))$ un morphisme de pseudogroupoïdes. Alors*

- (1) Si $f \in C$, alors $\varphi(f^{\#}) = (\varphi(f))^{\#}$;
- (2) Si $f \in C$, alors $\varphi(\alpha^{\#}(f)) = \alpha^{\#}(\varphi(f))$ et $\varphi(\beta^{\#}(f)) = \beta^{\#}(\varphi(f))$;
- (3) $\varphi(C_o) \subset \hat{C}_o$;

(4) Si $\hat{S} \subset \hat{C}$ et si $\hat{S} \cap \varphi(C)$ est un sous-pseudogroupoïde de $\hat{C}^\circ$, alors $\varphi^{-1}(\hat{S})$ est un sous-pseudogroupoïde de C° . En particulier $\varphi^{-1}(\hat{e})$, où $\hat{e} \in \hat{C}_o \cap \varphi(C)$, et $\text{Ker } \varphi$ sont des sous-pseudogroupoïdes, où $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(\hat{C}_o)$.

DEMONSTRATION. (1) est une conséquence immédiate de l'axiome (PG). (2) résulte de (1). (3) est évident.

Montrons (4). Soient $f, g \in \varphi^{-1}(\hat{S})$. Si $g \circ f$ est défini, alors $\varphi(g) \circ \varphi(f)$ est défini et appartient à $\hat{S}$. Or $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \circ \varphi(f)$, donc $g \circ f \in \varphi^{-1}(\hat{S})$.

Soit $f \in \varphi^{-1}(\hat{S})$. En faisant usage de (1), on a $f^\# \in \varphi^{-1}(\hat{S})$ puisque $(\varphi(f))^\# \in \hat{S}$ et $\varphi(f^\#) = (\varphi(f))^\#$. ■

THEOREME 9.2. Soit $((\hat{C}, \circ), \varphi, (C, \circ))$ un morphisme de pseudogroupoïdes. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :

- (I₁) $\varphi: C \rightarrow \hat{C}$ est injective;
- (I₂) $\varphi|_{\text{Ker } \varphi}: \text{Ker } \varphi \rightarrow \hat{C}$ est injective;
- (I₃) $C_o = \text{Ker } \varphi$ et $\varphi|_{C_o}: C_o \rightarrow \hat{C}$ est injective.

DEMONSTRATION. (I₂) entraîne (I₃), c'est-à-dire $C_o = \text{Ker } \varphi$. En effet, à cause de (4) du lemme 9.5, $C_o \cap \varphi^{-1}(\hat{e})$ est non vide si $\hat{e} \in \varphi(C)$.

(I₃) entraîne (I₁). En effet, soient $g, f \in C$ tels que $\varphi(g) = \varphi(f)$. Alors $\varphi(\alpha^\#(g)) = \varphi(\alpha^\#(f)) = \varphi(\beta^\#(f^\#))$. Par conséquent $\alpha^\#(g) = \beta^\#(f^\#)$, par suite $g \circ f^\#$ est défini en vertu de (AB).

De même $f^\# \circ g$ est défini. Par conséquent

$$\begin{aligned}\varphi(g \circ f^\#) &= \varphi(g) \circ \varphi(f^\#) = \varphi(g) \circ (\varphi(f))^\# = \varphi(g \circ g^\#), \\ \varphi(f^\# \circ g) &= \varphi(f^\#) \circ \varphi(g) = (\varphi(f))^\# \circ \varphi(g), \\ &= (\varphi(f))^\# \circ \varphi(f) = \varphi(f^\# \circ f).\end{aligned}$$

Donc $g \circ f^\#, f^\# \circ g \in \text{Ker } \varphi$. Par suite $g \circ f^\# = g \circ g^\#$ et $f^\# \circ g = f^\# \circ f$ en vertu de (I₃), et

$$g = (g \circ g^\#) \circ g = (g \circ f^\#) \circ g \text{ et } f^\# = (f^\# \circ f) \circ f^\# = (f^\# \circ g) \circ f^\#,$$

c'est-à-dire g et $f^\#$ sont régulièrement conjugués. Donc $f^\# = g^\#$, i.e. $g = f$. ■

Soit $(C, \circ)$ un pseudogroupoïde. On a

$$(9.1) \quad \alpha^\#(\alpha^\#(f)) = \alpha^\#(f) \text{ et } \beta^\#(\beta^\#(f)) = \beta^\#(f) \text{ si } f \in C,$$

$$(9.2) \quad \alpha^\#(f) = \beta^\#(f^\#) \text{ et } \beta^\#(f) = \alpha^\#(f^\#) \text{ si } f \in C.$$

Des formules (9.1) et de l'axiome (AB) on déduit :

LEMME 9.6. Soit $(C, \circ)$ un pseudogroupoïde. Si $g, f \in C$, alors les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :

- (1) $g \circ f$ est défini;
- (2) $\alpha^\#(g) \circ f$ est défini;
- (3) $g \circ \beta^\#(f)$ est défini.

LEMME 9.7. Soit $(C, \circ)$ un pseudogroupoïde. Soient $g, f \in C$. Les six conditions ci-dessous sont équivalentes :

- (0_1) $\beta^\#(g) \circ f$, $f \circ \alpha^\#(g)$, $\beta^\#(g) \circ (f \circ \alpha^\#(g))$ sont définis et $g = \beta^\#(g) \circ (f \circ \alpha^\#(g))$;
- (0_2) $g \circ f^\#$, $f^\# \circ g$, $g \circ (f^\# \circ g)$ sont définis et $g = g \circ (f^\# \circ g)$;
- (0_3) $g^\# \circ f$ est défini et $g = \beta^\#(g) \circ f$;
- (0_4) $f \circ g^\#$ est défini et $g = f \circ \alpha^\#(g)$;
- (0_5) $g^\# \circ f$ est défini et $\alpha^\#(g) = g^\# \circ f (= f^\# \circ g)$;
- (0_6) $f \circ g^\#$ est défini et $\beta^\#(g) = f \circ g^\# (= g \circ f^\#)$.

Dans le cas où une des conditions ci-dessus est définie, on a :

- (1) $\alpha^\#(g) \circ \alpha^\#(f)$ est défini et $\alpha^\#(g) = \alpha^\#(g) \circ \alpha^\#(f)$;
 $\beta^\#(g) \circ \beta^\#(f)$ est défini et $\beta^\#(g) = \beta^\#(g) \circ \beta^\#(f)$;
- (2) $f^\# \circ g$ et $g \circ f^\#$ sont définis et $f^\# \circ g = g^\# \circ f$ et $g \circ f^\# = f \circ g^\#$.

DEMONSTRATION. (0_1) est équivalent à (0_2) . En effet, en faisant usage du lemme 9.6, de (AA1), (AA2), des formules (9.1), (9.2) et du fait que $C_\circ$ est symétrique, on obtient :

$\beta^\#(g) \circ f$ est défini si, et seulement si, $\alpha^\#(g^\#) \circ f$ est défini, c'est-à-dire si, et seulement si, $g^\# \circ f$ est défini, ce qui équivaut à $f^\# \circ g$ défini.

$f \circ \alpha^\#(g)$ est défini équivaut à $f \circ \beta^\#(g^\#)$ défini, c'est-à-dire à $f \circ g^\#$ défini, ou encore à $g \circ f^\#$ défini.

$\beta^\#(g) \circ (f \circ \alpha^\#(g))$ est défini si, et seulement si, il en est ainsi

pour $\alpha^\#(g^\#) \circ (f \circ \alpha^\#(g))$, c'est-à-dire pour $g^\# \circ (f \circ \alpha^\#(g))$, ou encore pour $(f \circ \alpha^\#(g))^\# \circ g$, i.e. pour $(\alpha^\#(g) \circ f^\#) \circ g$, c'est-à-dire pour $\alpha^\#(g) \circ (f^\# \circ g)$, et enfin pour $g \circ (f^\# \circ g)$.

Supposons $g = \beta^\#(g) \circ (f \circ \alpha^\#(g))$. Alors

$$\begin{aligned} g^\# \circ g &= g^\# \circ (\beta^\#(g) \circ (f \circ \alpha^\#(g))) = g^\# \circ (\alpha^\#(g^\#) \circ (f \circ \alpha^\#(g))) \\ &= (g^\# \circ \alpha^\#(g^\#)) \circ (f \circ \alpha^\#(g)) = g^\# \circ (f \circ \beta^\#(g^\#)) \\ &= (g^\# \circ f) \circ \beta^\#(g^\#), \end{aligned}$$

donc

$$g^\# = (g^\# \circ g) \circ g^\# = ((g^\# \circ f) \circ \beta^\#(g^\#)) \circ g^\# = (g^\# \circ f) \circ g^\#.$$

Par suite $g = g \circ (f^\# \circ g)$.

Supposons $g = g \circ (f^\# \circ g)$. Alors

$$g^\# = (f^\# \circ g)^\# \circ g^\# = (g^\# \circ f) \circ g^\# \text{ et } \beta^\#(g) \circ f = g \circ (g^\# \circ f).$$

Donc

$$\begin{aligned} g &= g \circ (g^\# \circ g) = g \circ (((g^\# \circ f) \circ g^\#) \circ g) = g \circ ((g^\# \circ f) \circ (g^\# \circ g)) \\ &= (g \circ (g^\# \circ f)) \circ (g^\# \circ g) = ((g \circ g^\#) \circ f) \circ (g^\# \circ g) = (\beta^\#(g) \circ f) \circ \alpha^\#(g). \end{aligned}$$

(0_2) entraîne (2) . En effet, si $g = g \circ (f^\# \circ g)$, alors

$$g^\# = g^\# \circ (f \circ g^\#) \text{ et } f^\# \circ g, f \circ g^\# \in C_0,$$

donc

$$\begin{aligned} f^\# \circ g &= (f^\# \circ g)^\# = g^\# \circ (f^\#)^\# = g^\# \circ f, \\ g \circ f^\# &= (g^\#)^\# \circ f^\# = (f \circ g^\#)^\# = f \circ g^\#. \end{aligned}$$

(0_2) entraîne (0_3) , (0_u) . Soient $g, f \in C$ vérifiant (0_2) . A cause de (2) , on peut écrire

$$\begin{aligned} g &= g \circ (f^\# \circ g) = g \circ (g^\# \circ f) = (g \circ g^\#) \circ f = \beta^\#(g) \circ f, \\ g &= (g \circ f^\#) \circ g = (f \circ g^\#) \circ g = f \circ (g^\# \circ g) = f \circ \alpha^\#(g). \end{aligned}$$

(0_3) entraîne (0_2) . Supposons $g^\# \circ f$ défini. Alors $f^\# \circ g$ est défini à cause des conditions $(AA1)$ et $(AA2)$. De l'axiome (AB) et du lemme 9.6 il résulte que $(g \circ g^\#) \circ (f \circ f^\#)$ et $(g \circ g^\#) \circ f$ sont définis. En faisant usage de l'associativité (PM) on peut écrire

$$(g \circ g^\#) \circ (f \circ f^\#) = ((g \circ g^\#) \circ f) \circ f^\# = g \circ f^\#.$$

Soient $g, f \in C$ vérifiant (0_3) . On a $g^\# \circ f \in C_o$; en effet

$$f^\# \circ g = f^\# \circ (g \circ (g^\# \circ f)) = (f^\# \circ g) \circ (f^\# \circ g)^\#,$$

par conséquent

$$f^\# \circ g = ((f^\# \circ g) \circ (f^\# \circ g)^\#) \circ (f^\# \circ g) = (f^\# \circ g) \circ (f^\# \circ g).$$

Donc $f^\# \circ g = (f^\# \circ g)^\# = g^\# \circ f$. Par suite $g = g \circ (g^\# \circ f) = g \circ (f^\# \circ g)$.

(0_4) entraîne (0_2) . Soit $(g, f) \in C \times C$ vérifiant (0_4) . $g^\# \circ f$ est défini. En effet, $g \circ f^\#$ étant défini à cause de l'axiome (AB) et du lemme 9.6, $(g^\# \circ g) \circ f^\#$ et $(g^\# \circ g) \circ (f^\# \circ f)$ sont définis, donc

$$(g^\# \circ g) \circ (f^\# \circ f) = ((g^\# \circ g) \circ f^\#) \circ f.$$

En faisant usage de $(AA1)$ et $(AA2)$ on peut écrire

$$f^\# \circ ((g^\# \circ g) \circ f^\#)^\# = f^\# \circ (f \circ (g^\# \circ g)) = f^\# \circ g.$$

Or $g = f \circ (g^\# \circ g)$, donc

$$g \circ g^\# = (f \circ (g^\# \circ g)) \circ g^\# = f \circ ((g^\# \circ g) \circ g^\#) = f \circ g^\#.$$

Par conséquent $g \circ f^\# = (f \circ g^\#)^\# = f \circ g^\#$. Par suite

$$g = f \circ (g^\# \circ g) = (f \circ g^\#) \circ g = (g \circ f^\#) \circ g.$$

(0_3) est équivalent à (0_5) . En effet,

$$\begin{aligned} g = g \circ (g^\# \circ f) &\iff g^\# \circ g = g^\# \circ (g \circ (g^\# \circ f)) = g^\# \circ ((g \circ g^\#) \circ f) \\ &= (g^\# \circ (g \circ g^\#)) \circ f = g^\# \circ f. \end{aligned}$$

De même (0_4) est équivalent à (0_6) .

(0_5) et (0_6) entraînent (1) . ■

LEMME 9.8. Soit $(C, \circ)$ un pseudogroupe. On a :

(1) Si $e, e' \in C_o$, si $f \in C$, si $f \circ e$ et $e' \circ f$ sont définis, alors $\alpha^\#(f) \circ e$ et $e' \circ \beta^\#(f)$ sont définis,

$$\alpha^\#(f \circ e) = \alpha^\#(f) \circ e \text{ et } \beta^\#(e' \circ f) = e' \circ \beta^\#(f).$$

(2) Si $f, g \in C$ et si $\alpha^\#(g) = \beta^\#(f)$, alors

$$\alpha^\#(g \circ f) = \alpha^\#(f) \text{ et } \beta^\#(g \circ f) = \beta^\#(g).$$

DEMONSTRATION. Soit $(f, e) \in C \times C_o$ satisfaisant les hypothèses de (1). Or $f^\# \circ f, e \in C_o$, donc

$$\begin{aligned}\alpha^\#(f \circ e) &= (f \circ e)^\# \circ (f \circ e) = (e \circ f^\#) \circ (f \circ e) = e \circ ((f^\# \circ f) \circ e) \\ &= (e \circ (f^\# \circ f)) \circ e = ((f^\# \circ f) \circ e) \circ e = (f^\# \circ f) \circ e = \alpha^\#(f) \circ e.\end{aligned}$$

De même $\beta^\#(e' \circ f) = e' \circ \beta^\#(f)$.

Supposons $\alpha^\#(g) = \beta^\#(f)$, i.e. $g^\# \circ g = f \circ f^\#$. Alors

$$\alpha^\#(g \circ f) = (g \circ f)^\# \circ (g \circ f) = (f^\# \circ g^\#) \circ (g \circ f),$$

mais $g^\# \circ (g \circ f)$ est défini, donc

$$\alpha^\#(g \circ f) = f^\# \circ ((g^\# \circ g) \circ f) = f^\# \circ ((f \circ f^\#) \circ f) = f^\# \circ f.$$

De même $\beta^\#(g \circ f) = \beta^\#(g)$. ■

THEOREME 9.3. Pour qu'un système multiplicatif $(C, \circ)$ soit un pseudogroupoïde, il faut et il suffit que $(C, \circ, C_o)$ soit un pseudomonoïde totalement régulier satisfaisant de plus l'axiome suivant :

(μ_3) Pour tout $f \in C$ il existe g tel que $f \circ g, g \circ f$ sont définis,

$$f \circ g = \beta(f) \text{ et } g \circ f = \alpha(f).$$

De plus la relation d'ordre sous-jacente à un pseudogroupoïde C° est caractérisée de la façon suivante : Si $(g, f) \in C \times C$, on a $g \leq f$ si, et seulement si, le couple (g, f) vérifie une des conditions $(0_1), \dots, (0_6)$ du lemme 9.7.

DEMONSTRATION. Supposons que $(C, \circ)$ est un pseudogroupoïde. Du théorème 9.1 et de (1) du lemme 9.8, il résulte que $(C, \circ)$ vérifie les axiomes $(\overset{\circ}{\mu}_1)$ et $(\overset{\circ}{\mu}_2)$, donc $(C, \circ)$ est un pseudomonoïde fléché en vertu de la proposition 7.2. Il reste à montrer l'axiome (μ_4) . Si $g, f \in C$, du lemme 9.7 on déduit que $g \leq f$ si, et seulement si, (g, f) vérifie (0_2) . De (2) du lemme 9.7, il résulte que C° satisfait (μ_4) b.

(I) Si $(g, f), (f, f') \in C^\circ * C^\circ$ et si $g \leq f$, alors $g \circ f' \leq f \circ f'$.

En effet, $g \circ (f' \circ f^\#)$ est défini. En faisant usage de l'associativité (PM) on peut écrire :

$$\begin{aligned}g \circ f' &= (g \circ (f^\# \circ g)) \circ f' = (g \circ (f^\# \circ g)) \circ ((f' \circ f^\#) \circ f') \\ &= ((g \circ (f^\# \circ g)) \circ (f' \circ f^\#)) \circ f' = (g \circ ((f^\# \circ g) \circ (f' \circ f^\#))) \circ f'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (g \circ ((f' \circ f'^{\#}) \circ (f^{\#} \circ g))) \circ f' = (g \circ (((f' \circ f'^{\#}) \circ f^{\#}) \circ g)) \circ f' \\
&= (((g \circ (f' \circ f'^{\#}) \circ f^{\#}) \circ g) \circ f' = (((g \circ f') \circ f'^{\#}) \circ f^{\#}) \circ g) \circ f' \\
&= (((g \circ f') \circ (f^{\#} \circ f^{\#})) \circ g) \circ f' = (((g \circ f') \circ (f \circ f')^{\#}) \circ g) \circ f' \\
&= ((g \circ f') \circ (f \circ f')^{\#}) \circ (g \circ f'),
\end{aligned}$$

donc $g \circ f' \leq f \circ f'$, puisque (0_1) et (0_2) sont équivalents.

De même on obtient

(II) Si $(f', g), (f', f) \in C^0 * C^0$ et si $g \leq f$, alors $f' \circ g \leq f' \circ f$.

De (I) et (II) on déduit aisément (μ_4) a.

Réciproquement, supposons que $(C, \circ, C_0)$ est un pseudomonóide totalement régulier vérifiant en plus l'axiome (μ_5) . L'axiome (PG) a est conséquence de l'axiome (μ_5) et des lemmes 7.1 et 9.3. L'axiome (AB) est conséquence de (μ_2) b. Si $f \in C$, notons f^{-1} l'unique élément de C tel que f^{-1} et f sont régulièrement conjugués. Alors $f = (f^{-1})^{-1}$, donc $\alpha(f) = \beta(f^{-1})$ et $\beta(f) = \alpha(f^{-1})$ en vertu de l'axiome (μ_3) .

Montrons maintenant l'axiome (PG) b.

Soit $(g, f) \in C^0 * C^0$; alors $\alpha(g) \circ \beta(f)$ est défini, à cause de l'axiome (μ_2) b. Donc $\beta(f) \circ \alpha(g)$ est défini en vertu du lemme 7.1. Par conséquent $\alpha(f^{-1}) \circ \beta(g^{-1})$ est défini. Par suite $f^{-1} \circ g^{-1}$ est aussi défini en vertu de (μ_2) b. Pour achever la preuve, il suffit de montrer que $g \circ f$ et $f^{-1} \circ g^{-1}$ sont régulièrement conjugués.

Si $(e', f) \in C_0 \times C$ et si $e' \circ f$ est défini, alors $e' \circ f \leq f$. En effet, en faisant usage de (Rg) , de (μ'_3) , de (μ_2) b et de l'associativité (PM) , on peut écrire

$$\begin{aligned}
e' \circ f &= (e' \circ f) \circ \alpha(e' \circ f) = (e' \circ (\beta(f) \circ f)) \circ \alpha(e' \circ f) \\
&= ((e' \circ \beta(f)) \circ f) \circ \alpha(e' \circ f) = (\beta(e' \circ f) \circ f) \circ \alpha(e' \circ f).
\end{aligned}$$

Supposons $g \circ f$ défini, alors $f^{-1} \circ g^{-1}$ est défini, donc $(f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$ est défini. Par conséquent $(f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \leq g^{-1}$, donc $\beta(g^{-1}) \circ \beta(((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}))$ est défini. Or $\beta(g^{-1}) = \alpha(g)$, par suite $g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1})$ est défini, i.e. $g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1}))$ est défini.

On voit aussi que $(g^{-1} \circ g) \circ f$, $(g^{-1} \circ g) \circ (f \circ f^{-1})$ et $(f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$ sont définis.

En faisant usage de l'associativité (PM), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 g \circ f &= (g \circ (g^{-1} \circ g)) \circ ((f \circ f^{-1}) \circ f) = g \circ ((g^{-1} \circ g) \circ ((f \circ f^{-1}) \circ f)) \\
 &= g \circ (((g^{-1} \circ g) \circ (f \circ f^{-1})) \circ f) = g \circ (((f \circ f^{-1}) \circ (g^{-1} \circ g)) \circ f) \\
 &= g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f)) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ (g^{-1} \circ (g \circ f))) \\
 &= g \circ (((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)) = g \circ ((f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) \circ (g \circ f)) \\
 &= (g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1}))) \circ (g \circ f) = ((g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) \circ (g \circ f).
 \end{aligned}$$

De même on peut écrire :

$$f^{-1} \circ g^{-1} = ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}). \blacksquare$$

REMARQUE 9.1. La théorie des pseudogroupoïdes quotients peut être développée de façon analogue à celle des demi-groupes inverses quotient (cf. [10]).

10. Un groupoïde est une catégorie telle que tout élément est inversible. Si C^* est un groupoïde, on note γ la surjection de C dans C définie par $f \mapsto f^{-1}$. On a $\alpha = \beta \circ \gamma$.

On dit qu'un morphisme ordonné $((\hat{C}, \leq), \varphi, (C, \leq))$ est de classe (σ_e) s'il vérifie la condition suivante :

(σ_e) . Pour tout $a \in C$, si $y \leq \varphi(a)$, alors il existe un élément unique x de C tel que $x \leq a$ et $\varphi(x) = y$.

On dira que $(C^*, \leq)$ est un *groupoïde ordonné totalement régulier* (= groupoïde fonctoriellement ordonné) si $(C^*, \leq)$ est une catégorie ordonnée totalement régulière et C^* un groupoïde.

LEMME 10.1. Soit C^* un groupoïde et $\leq$ une relation d'ordre sur C . Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :

(FO_1) C^*_0 est héréditaire dans $(C, \leq)$ et $((C, \leq), \kappa^*, (C^* * C^*, \leq))$ est un morphisme ordonné de classe (σ'') .

(FO_2) $((C^*_0, \leq), \alpha, (C, \leq))$ est un morphisme ordonné de classe (σ_e) et $((C, \leq), \kappa^*, (C^* * C^*, \leq)), ((C, \leq), \gamma, (C, \leq))$ sont des morphismes ordonnés.

(FO_3) $(C^*, \leq)$ est un groupoïde ordonné totalement régulier.

DEMONSTRATION. (FO_1) entraîne (FO_2) . $((C_0^*, \leq), \alpha, (C, \leq))$ est un morphisme ordonné. En effet, soient $g, f \in C$. Si $g \leq f = f \cdot \alpha(f)$, alors $g = g' \cdot b$, où $g' \leq f$ et $b \leq \alpha(f)$. Donc $b \in C_0^*$, par conséquent $b = \alpha(g')$. Par suite $g = g'$ et $\alpha(g) = \alpha(g')$ et $\alpha(g') \leq \alpha(f)$.

$((C, \leq), \gamma, (C, \leq))$ est un morphisme ordonné. En effet, si $g \leq f$, alors $\alpha(g) \leq \alpha(f) = f^{-1} \cdot f$, donc $\alpha(g) = b_1 \cdot f_1$, où $b_1 \leq f^{-1}$ et $f_1 \leq f$. Par conséquent $g \cdot b_1$ est défini. Donc $g \cdot b_1 \leq f \cdot f^{-1} = \beta(f)$, d'où $g \cdot b_1 \in C_0^*$. Par suite

$$g = g \cdot \alpha(g) = (g \cdot b_1) \cdot f_1 = f_1 \text{ et } g \cdot b_1 = \beta(g).$$

Par conséquent $b_1 = g^{-1}$.

$((C_0^*, \leq), \alpha, (C, \leq))$ est de classe (σ_e) . En effet, soit $e \in C_0$ tel que $e \leq \alpha(f)$. Alors $e \leq f^{-1} \cdot f$, donc $e = b_1 \cdot f_1$, où $b_1 \leq f^{-1}$ et $f_1 \leq f$. Par conséquent $f_1 \leq f$ et $e = \alpha(f_1)$.

Soient $f_1, f_2 \in C$ tels que $f_1, f_2 \leq f$ et $\alpha(f_1) = \alpha(f_2) = e \leq \alpha(f)$. Alors $\beta(f_1^{-1}) = \beta(f_2)$ et $\alpha(f_2) = \beta(f_2^{-1})$. Donc $f_2 \cdot f_1^{-1} \leq f \cdot f^{-1} = \beta(f)$, d'où $f_2 \cdot f_1^{-1} \in C_0$. Par suite $f_2 \cdot f_1^{-1} = \alpha(f_1^{-1}) = \beta(f_2)$, donc $f_1^{-1} \cdot f_2$ est défini et $f_1^{-1} \cdot f_2 = \alpha(f_2) \leq f^{-1} \cdot f$. Par conséquent $f_2 \cdot f_1^{-1} = \beta(f_2)$ et $f_1^{-1} \cdot f_2 = \alpha(f_2)$, i.e. $f_1^{-1} = f_2^{-1}$, donc $f_1 = f_2$.

(FO_2) entraîne (FO_1) . Supposons $g \cdot f$ défini et $b \leq g \cdot f$. Alors $e = \alpha(b) \leq \alpha(g \cdot f) = \alpha(f)$, $((C_0^*, \leq), \alpha, (C, \leq))$ et $((C_0^*, \leq), \beta, (C, \leq))$ sont de classe (σ_e) puisque $\beta = \gamma \circ \alpha$ et $((C, \leq), \gamma, (C, \leq))$ est un isomorphisme ordonné. Donc il existe un unique $f' \in C$ tel que $f' \leq f$ et $\alpha(f') = e$, $e' = \beta(f') \leq \beta(f) = \alpha(f^{-1})$. Par conséquent il existe un élément unique f' tel que $f' \leq f$, $\alpha(f') = e$ et il existe un unique $g' \in C$ tel que $g' \leq g$ et $\alpha(g') = e' = \beta(f')$. Par suite il existe $g', f' \in C$ tel que $g' \cdot f'$ est défini et $g' \leq g$, $f' \leq f$. Donc $b, g' \cdot f' \leq g \cdot f$. Or

$$\alpha(b) = e = \alpha(f') = \alpha(g' \cdot f') \leq \alpha(g \cdot f) = \alpha(f),$$

donc $b = g' \cdot f'$ puisque $((C_0^*, \leq), \alpha, (C, \leq))$ est de classe (σ_e) .

Soit $(b, e) \in C \times C_0$ tel que $b \leq e$. Alors $b^{-1} \leq e$. Or $e = e \cdot e$, donc $\alpha(b) = b^{-1} \cdot b \leq e$. Mais $b, \alpha(b) \leq b^{-1} \cdot b \leq e$ et $\alpha(b) = \alpha^2(b) \leq \alpha(e) = e$. Par suite $b = \alpha(b)$.

L'équivalence entre (FO_1) et (FO_2) entraîne que (FO_2) et (FO_3) sont équivalents. ■

Des théorèmes 8.1, 9.3 et du lemme 9.5 on déduit :

THEOREME 10.1. *Si $(C^*, \underline{\leq})$ est un groupoïde ordonné totalement régulier, alors $(C, \odot)$ est un pseudogroupoïde tel que $C_o = C_o^*$. Si $(C, \circ)$ est un pseudogroupoïde, alors il existe un groupoïde unique ordonné totalement régulier $(C, \bullet, \underline{\leq})$ tel que $(C, \bullet) = (C, \circ)$ et $C_o^\bullet = C_o$. Soient $(\hat{C}^\bullet, \underline{\leq})$ et $(C^*, \underline{\leq})$ des groupoïdes ordonnés totalement réguliers et φ une surjection de C dans $\hat{C}$; alors $((\hat{C}^\bullet, \underline{\leq}), \varphi, (C^*, \underline{\leq}))$ est un morphisme de groupoïdes ordonnés réguliers si, et seulement si, $((\hat{C}, \bullet), \varphi, (C, \odot))$ est un morphisme de pseudogroupoïdes.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] de BARROS, C.M., Catégories ordonnées régulières, groupoïdes ordonnés réguliers et groupes généralisés, *C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A*, t. 264 (1967), 813 - 816.
- [2] de BARROS, C.M., Quelques structures algébriques définies par des lois de compositions partielles et associatives, *C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A*, t. 265 (1967), 163 - 166.
- [3] CLIFFORD, A.H. and PRESTON, G.B., The algebraic theory of semi-groups, vol. 1, 2 (*Math. Surveys*, n° 7, *Amer. Math. Soc.*), Providence, 1961, 1967).
- [4] DUBIKAJTIS, L., Certaines extensions de la notion de groupoïde inductif et de celle de pseudogroupe, *Coll. Math.*, t. 12 (1964), 163 - 185.
- [5] EHRESMANN, C., Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 10 (1960), 307 - 336.
- [6] EHRESMANN, C., Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 13 (1963), 1 - 60.
- [7] EHRESMANN, C., Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 14 (1964), 205 - 268.
- [8] EHRESMANN, C., *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
- [9] LJAPIN, E.S., *Semigroups*, Transl. of Math., Monographs, vol. 3, *Amer. Math. Soc.*, Providence, 1963.
- [10] TALLINE, G.B., Sulla struttura algebrica della trasformazioni tra parti di un insieme, *Ann. Math. Pura Appl., Ser. 4*, t. 71 (1966), 295 - 332.
- [11] RINOW, W., Vervollständigung geordneter Kategorien, *Math. Nachr.*, Bd. 33 (1966), 129 - 175.

*Instituto de Matemática,
Universidade Federal Fluminense,
Niteroi, E. do Rio de Janeiro (Brésil).*