CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

CHARLES EHRESMANN

Propriétés infinitésimales des catégories différentiables

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 9, nº 1 (1967), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1967__9_1_1_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *IX*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Septembre 1966

PROPRIETES INFINITESIMALES DES CATEGORIES DIFFERENTIABLES

par Charles EHRESMANN

Le texte suivant est extrait d'une conférence donnée à la «Tagung über Differentialgeometrie» de Berlin (12-17 Septembre 1966). La conférence débutait par un rappel sur les catégories structurées (à l'aide de la méthode des «Esquisses» [6]), sur le prolongement local d'une catégorie topologique [1] et sur les catégories différentiables. Nous ne publions ici que les résultats de cette conférence ne figurant pas déjà dans l'article [2] supposé connu.

NOTATIONS. Toutes les variétés r-différentiables considérées sont supposées banachiques. Soit $\tilde{\mathcal{C}}^r$ la catégorie des applications r-différentiables relative à l'univers $\mathfrak{M}_0$ et soit δ^r son foncteur projection canonique vers la catégorie pleine d'applications $\mathfrak{M}$ associée à $\mathfrak{M}_0$. Soit $S(\check{\mathcal{C}}^r)$ la sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ formée des submersions. Si A est une r-variété, nous désignons par $\hat{A}$ la classe de tous les r-germes de A, par $\hat{x}$ le r-germe de A en $x \in \delta^r(A)$, par $T(A)$ l'espace des vecteurs tangents à A; désignons par A/U la sous-variété de A définie par $U \subset \delta^r(A)$. Nous notons k un entier inférieur à r.

Soient $(J^{k,r}, A^{k,r})$ et $(\tilde{J}^{k,r}, \tilde{A}^{k,r})$ respectivement les catégories $(r-k)$-différentiables des k-jets et des k-jets non holonomes relatives à $\tilde{\mathcal{C}}^r$ [2], et α^r et β^r leurs applications source et but. Si X est un k-jet d'une application constante et si $\beta^r(X) = \hat{x}$, on posera $X = \overline{x}$ sans préciser la source de X, qui résultera du contexte.

Nous désignerons par $(C^\cdot, A)$ une catégorie r-différentiable, par $\tau(A)$ la topologie sous-jacente à A, par

$$a = (A_0, \alpha, A), \quad b = (A_0, \beta, A) \quad \text{et} \quad K = (A, \kappa, A * A)$$

les applications r-différentiables définies par les applications source, but et loi de composition de $C^\bullet$.

1. Espèces de structures r-différentiables.

Soit p un foncteur fidèle d'une catégorie $\mathcal{H}$ vers $\mathfrak{M}$ et soit $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$. On appelle *espèce de structures $p(\mathcal{H}')$-structurée* [3] un triplet $\eta = ((C^\bullet, s), s', \kappa')$ tel que :

1) $(C^\bullet, s)$ est une catégorie $p((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-structurée et $s' \in \mathcal{H}_0$;

2) $\underline{\eta} = (C^\bullet, E, \kappa')$ est une espèce de structures [0], où $E = p(s')$; soit q la projection canonique de E dans $C_0^\bullet$;

3) Il existe $\bar{q} \in s_0 . \mathcal{H}' . s'$, un produit fibré $s * s'$ de $(a, \bar{q})$ dans p (chap. IV [0]) et un $K' \in s' . \mathcal{H} . s * s'$ tels que $p(K') = \kappa'$, où $a \in s_0 . \mathcal{H} . s$ et $p(a) = (C_0^\bullet, \alpha, C)$. (Il en résulte $p(\bar{q}) = q$).

On appelle *application covariante $p(\mathcal{H}')$-structurée* un quadruplet $(\eta_2, \Phi, \varphi, \eta_1)$ tel que [3] :

1) $\eta_i = ((C_i^\bullet, s_i), s_i', \kappa_i')$ est une espèce de structures $p(\mathcal{H}')$-structurée, pour $i = 1$ et 2.

2) $\Phi = ((C_2^\bullet, s_2), \underline{\Phi}, (C_1^\bullet, s_1))$ est un foncteur p-structuré;

3) $\varphi \in s_2' . \mathcal{H} . s_1'$ et $(\underline{\eta}_2, (C_2^\bullet, \underline{\Phi}, C_1^\bullet), p(\varphi), \underline{\eta}_1)$ est une application covariante (Chap. II [0]).

Une espèce de structures $\delta^r(S(\tilde{\mathcal{C}}^r))$-structurée est appelée *espèce de structures r-différentiable,* une application covariante $\delta^r(S(\tilde{\mathcal{C}}^r))$-structurée, *application covariante r-différentiable* [2] .

Soit $(\eta_2, \Phi, \varphi, \eta_1)$ une application covariante r-différentiable. Supposons que Φ soit une restriction du foncteur r-différentiable canonique [2] $j^{k',k}$ de $(J^{k,r+k}, A^{k,r+k})$ vers la catégorie r-différentiable sous-jacente à $(J^{k',r+k}, A^{k',r+k})$, où $k' < k$. Une structure z de $\underline{\eta}_1$ est appelé élément infinitésimal (ou objet géométrique) d'ordre k et $\varphi(z)$ est dit φ-covariant différentiel de z (voir [4]).

2. Catégories prolongées.

Soit $(C^\bullet, \tau(A))$ la catégorie topologique sous-jacente à $(C^\bullet, A)$. Nous désignons par $S(C^\bullet, \tau(A))$ la catégorie de ses sections locales [1], par $J^\lambda(C^\bullet, \tau(A))$ son prolongement local [1]. Soit $S^r(C^\bullet, A)$

la sous-catégorie de $S(C^{\bullet},\mathcal{T}(A))$ formée des sections r-différentiables (i. e. des sections locales (u',s,u) telles que $(A,s,A_0/u)$ soit r-différentiable) et $J^{\lambda,r}(C^{\bullet},A)$ la sous-catégorie de $J^{\lambda}(C^{\bullet},\mathcal{T}(A))$ correspondante. Soit $(C^{k\bullet},A^k)$ la catégorie $(r-k)$- différentiable prolongement d'ordre k de $(C^{\bullet}, A)$ [2] .

THEOREME. *$C^{k\bullet}$ est isomorphe à la catégorie quotient de $J^{\lambda,r}(C^{\bullet},A)$ par la relation d'équivalence :*

$$j_x^{\lambda} s \sim j_x^{\lambda} s' \quad \textit{si, et seulement si,} \quad j_x^k s = j_x^k s'.$$

THEOREME. *$((\hat{A}.J^{k,r})^o, A^{k,r}/\hat{A}.J^{k,r})$ est une catégorie $(r-k)$-différentiable J_A^k , la loi de composition étant :*

$$(Y,\ X) \to Y \circ X = K\langle Y,X\rangle$$

$$\textit{si, et seulement si, } \alpha^r(X) = \alpha^r(Y) \quad \textit{et} \quad aY = bX.$$

En effet, comme a et b sont des submersions, il existe un produit fibré naturalisé $((j_y^k a,\ v'),(j_x^k b,v))$ dans $J^{k,r}$ si $\alpha(y) = \beta(x)$. Si $\alpha^r(X) = \alpha^r(Y)$, $aY = bX$,

$$\beta^r(X) = \hat{x} \quad \text{et} \quad \beta^r(Y) = \hat{y},$$

alors $\langle Y,X\rangle$ est l'unique élément tel que

$$v.\langle Y,\ X\rangle = X \quad \text{et} \quad v'.\langle Y,\ X\rangle = Y.$$

La catégorie $(r-k)$- différentiable J_A^k a déjà été considérée dans [2] . Par suite, dans $C^{k\bullet}$, on a $Y \bullet X = (YbX) \circ X$.

Soit $V(A_0)$ la sous-variété de $T(A)$ formée des vecteurs verticaux attachés à A_0, i.e. des $X \in T(A)$ tels que $\beta^r(X) = \hat{e}$ où $e \in C_0^{\bullet}$ et $aX = \bar{e}$.

THEOREME. *$((C_\gamma^{1\bullet},\ A^1/C_\gamma^{1\bullet}),\ V(A_0),\ \kappa')$ est une espèce de structures $(r-1)$- différentiable pour la loi de composition κ' :*

$$(Z,\ X) \to (ZbX \circ X) \circ \overline{f^{-1}}, \quad \textit{où} \quad \hat{f} = \beta^r(Z),$$

$$\textit{si, et seulement si,} \quad \beta^r(X) = aZ.$$

Soit $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. On appelle *k-élément purement* *horizontal en* f un $X \in \hat{f}.\tilde{J}^{k,r}.\hat{e}$ tel que $aX = \hat{e}$ et $bX = \overline{e'}$ (en désignant par $\overline{e'}$ le jet constant sur e'). Un k-élément purement horizontal en f de (C^*, A), où C^* est la catégorie duale de $C^\bullet$, est appelé *k-élément purement vertical en f de $(C^\bullet, A)$*. Un k-élément purement vertical de $(C^\bullet, A)$ en $e \in C^\bullet_o$ est [5] *un élément de k-connexion sur $(C^\bullet, A)$*.

Soit V^k la sous-variété de $A^{k,r}$ formée des k-éléments purement verticaux de $(C^\bullet, A)$. Soit C'^k la classe des $Z \in C^k$ tels que bZ soit inversible.

THEOREME. *$((C^*, A), V^k, \kappa^*_V)$ est une espèce de structures $(r-k)$-différentiable pour la loi de composition κ^*_V :*

$$(X, g) \to X \circ \overline{g} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \beta^r(aX) = \widehat{\beta(g)}.$$

$((C'^{k\bullet}, A^k/C'^k), V^k, \kappa^V)$ est une espèce de structures $(r-k)$-différentiable pour la loi de composition κ^V :

$$(Z, X) \to (Z \circ X)(bZ)^{-1} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \alpha^r(Z) = \alpha^r(X).$$

De plus $(C'^{k\bullet}, C^\bullet)$ est un couple de catégories d'opérateurs [0] sur $\delta^{r-k}(V^k)$ relativement à (κ^V, κ^*_V).

Soit Q^k la classe des éléments de k-connexion sur $(C^\bullet, A)$.

THEOREME. *On a $Q^k \subset (J^k_A)_\gamma$ et $((C^{k\bullet}_\gamma, A^k/C^{k\bullet}_\gamma), A^{k,r}/Q^k, \kappa')$ est une espèce de structures $(r-k)$-différentiable pour la loi de composition κ' définie par:*

$$(Z, X) \to (ZX)z^{-1} = \kappa^*_V(\kappa^V(Z, X), z^{-1})$$

$$\textit{si, et seulement si,} \ \alpha^r(Z) = \alpha^r(X) \ \textit{et} \ \beta^r(Z) = \hat{z}.$$

On a alors $(ZX)z^{-1} = (Z \circ X \circ \overline{z^{-1}})(bZ)^{-1}$.

3. Germes infinitésimaux de catégorie différentiable.

Si $f \in C$, la classe $\{\beta(f), f, \alpha(f)\}$ admet une base de voisinages dans $\mathcal{T}(A)$ formée de sous-noyaux [1] r-différentiables de $(C^\bullet, A)$. Un tel sous-noyau est entièrement déterminé par la donnée de la restriction K/U de K à une sous-variété ouverte U de $A * A$ contenant

$$[f] = \{(e, e), (e', e'), (f, e), (e', f)\},$$

où $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. Nous appelons *germe local de* $(C^{\bullet}, A)$ *en* f, noté $j_f^{\lambda}(C^{\bullet}, A)$, le jet local [4] $j_{[f]}^{\lambda} K/U$ de K/U autour de $[f]$. Le *k-germe de* $(C^{\bullet}, A)$ *en* f sera par définition l'élément

$$j_f^k(C^{\bullet}, A) = (j_{(e,e)}^k K,\ j_{(e',e')}^k K,\ j_{(f,e)}^k K,\ j_{(e',f)}^k K) \in (J^{k,r})^4.$$

Soit $\mathcal{F}_p(\delta^r)$ la catégorie des foncteurs r-différentiables pointés, dont les éléments sont les triplets $\hat{F}_i = (F_i, (f'_i, f_i))$ tels que

$$f_i \in C_i, \quad f'_i = F_i(f_i) \quad \text{et} \quad F_i = ((\hat{C}_i^{\bullet}, \hat{A}_i), \underline{F}_i, (C_i^{\bullet}, A_i))$$

est un foncteur r-différentiable. Il existe une catégorie quotient $J^k\mathcal{F}(\delta^r)$ de la catégorie $\mathcal{F}_p(\delta^r)$ par la relation d'équivalence r_k :

$$\hat{F}_1 \sim \hat{F}_2 \quad \text{si, et seulement si,} \quad f_1 = f_2 = f, \quad f'_1 = f'_2 = f',$$

$$j_f^k(C_1^{\bullet}, A_1) = j_f^k(C_2^{\bullet}, A_2), \quad j_{f'}^k(\hat{C}_1^{\bullet}, \hat{A}_1) = j_{f'}^k(\hat{C}_2^{\bullet}, \hat{A}_2),$$

$$j_x^k \overline{F}_1 = j_x^k \overline{F}_2, \quad \text{pour} \quad x = f,\ \alpha(f) \text{ et } \beta(f), \quad \text{où} \quad \overline{F}_i = (\hat{A}_i, \underline{F}_i, A_i).$$

La classe de ses unités est identifiée à la classe des k-germes de catégories r-différentiables. L'élément $\hat{F}_i \bmod r_k \in J^k\mathcal{F}(\delta^r)$ est identifié à l'élément de $(J^{k,r})^{11}$ qui le détermine, et appelé *k-germe de* F_i *en* f, noté $j_f^k F_i$.

THEOREME. *$(J^k\mathcal{F}(\delta^r), (A^{k,r})^{11}/J^k\mathcal{F}(\delta^r))$ est une catégorie $(r-k)$-différentiable.*

THEOREME. *$T(A)$ définit une sous-catégorie $(r-1)$-différentiable $T(C^{\bullet},A)$ de J_A^1 et $(T(C^{\bullet}, A), T(A)^+)$ est une catégorie double $(r-1)$-différentiable, où $+$ est la loi de composition :*

$$(Y', Y) \to Y' + Y \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \beta^r(Y) = \beta^r(Y').$$

L'étude du 1-germe de $(C^{\bullet}, A)$ en f est ramenée à celle de la sous-catégorie double $(r-1)$-différentiable de $(T(C^{\bullet}, A), T(A)^+)$ définie par $T_e(A) \cup T_{e'}(A) \cup T_f(A)$.

Par récurrence, ce résultat se généralise en définissant sur la classe $\tilde{T}^k(A)$ des k-vitesses non holonomes de A une structure de catégorie 2^k-uple $(r-k)$-différentiable.

Soit $f \in C$, $e = \alpha(f)$, $e' = \beta(f)$. Supposons donné un élément de

k-connexion X de $(C^\bullet, A)$ en e et un élément de k-connexion X' de (C^*, A) en e'. Pour tout $Z \in \tilde{T}^k_f(A)$, on a

$$Z' = (X'bZ) \circ Z \circ (XaZ) \in \tilde{T}^k_f(e'Ae),$$

où $e'Ae = A/e'.C.e$. Dans ce cas, l'étude du k-germe de $(C^\bullet, A)$ en f est ramenée à celle du k-germe en f de $(C^\bullet_f, A/C_f)$, où

$$C_f = e.C.e \cup e'.C.e' \cup e'.C.e.$$

Supposons $k=1$. Par restriction de la loi de composition de $T(C^\bullet, A)$, on voit que $P = T_{e'}(e'Ae') \times T_e(eAe)$ opère sur $T_f(e'Ae)$ relativement à la loi

$$((Z', Z), Y) \to Z' \circ Y \circ Z = Z' \circ \overline{f} + Y + \overline{f} \circ Z.$$

THEOREME. *$T_f(e'Ae)$ admet pour facteurs topologiques T_1 et T_2, où T_1 est formé des $\overline{f} \circ Z$ tels que $Z \in T_e(eAe)$ et T_2 des $Z' \circ \overline{f}$ où $Z' \in T_{e'}(e'Ae')$, et le sous-espace engendré par T_1 et T_2 admet un supplémentaire topologique T_3. L'espace P admet pour facteur topologique l'espace P_1 formé des (Z', Z) tels que $(Z', Z)\overline{f} = \overline{f}$.*

En particulier, l'étude de $T_f(e'Ae)$ revient à celle de $T_e(eAe)$ et de T_3 lorsque f vérifie la condition :

(0) Pour tout $Z' \in T_{e'}(e'Ae')$, il existe $Z \in T_e(eAe)$ tel que $Z' \circ \overline{f} = \overline{f} \circ Z$.

En effet, on a alors $T_1 = T_2$. Si f est inversible, f vérifie *(0)* et $T_3 = \{\overline{f}\}$.

4. Prolongements d'espèces de structures différentiables.

Soit $\eta = ((C^\bullet, A), A', \kappa')$ une espèce de structures r-différentiable. Soit $G^k(\eta)$ la sous-variété de $A^{k,r}$ formée des $S \in \hat{A}'.J^{k,r}.\hat{A}_0$ tels que $qS = \alpha^r(S)$, où q désigne la projection canonique r-différentiable de A' dans A_0. Nous notons K' l'application r-différentiable de $A * A'$ dans A définie par κ'.

THEOREME. *$\eta^k = (J^k_A, A^{k,r}/\hat{A}'.J^{k,r}, \kappa^k)$ est une espèce de structures $(r-k)$-différentiable pour la loi de composition κ^k :*

$$(X, Z) \to X \circ Z = K'\langle X, Z \rangle$$

si, et seulement si, $qZ = aX$ *et* $\alpha^r(X) = \alpha^r(Z)$.

La catégorie des hypermorphismes associée est isomorphe à $J^k_{A*A'}$ *.*

$\langle X, Z \rangle$ est l'unique $Y \in \widehat{A * A'} . J^{k,r}$ tel que $v . Y = X$ et $v' . Y = Z$, où $((j^k_x a, v), (j^k_z q, v'))$ est le produit fibré naturalisé canonique dans $J^{k,r}$, et $\hat{x} = \beta^r(X)$, $\hat{z} = \beta^r(Z)$.

THEOREME. $\eta'^k = ((C'^{k\bullet}, A^k/C'^k), G^k(\eta), \kappa'^k)$ *est une espèce de structures* $(r-k)$*-différentiable pour la loi de composition* κ'^k *:*

$$(X, S) \to XS = (X \circ S)(bX)^{-1}$$
$$\textit{si, et seulement si,} \quad \alpha^r(X) = \alpha^r(S).$$

L'espèce de structures $(r-1)$-différentiable η^1 admet une sous-espèce de structures $(r-1)$-différentiable

$$(T(C^\bullet, A), T(A'), \kappa''),$$

notée $T(\eta)$.

THEOREME. $\eta''^k = ((C'^{k\bullet}, A^k/C'^k), A^{k,r}/\hat{A}' . J^{k,r}, \kappa''^k)$ *est une espèce de structures* $(r-k)$*-différentiable pour la loi de composition* κ''^k *:*

$$(X, S) \to XqS \circ S$$
$$\textit{si, et seulement si,} \quad \alpha^r(X) = q\beta^r(S).$$

Ces théorèmes, ainsi que ceux du n° 2, se généralisent en remplaçant partout les prolongements holonomes par des prolongements non-holonomes.

Supposons $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. Soit

$$M = j^1_f m \in \widehat{T(A)} . J^{1,r-1} . j^{r-1,r}(\hat{A})$$

un germe d'ordre 1 en f de champ de vecteurs vertical sur A, i.e. tel que

$$aM = j^1_f \bar{a}, \quad \text{où} \quad \bar{a}(f') = \overline{a(f')} \in T(A_o).$$

Soit $\Sigma = j^1_{e'} \sigma \in \hat{A} . J^{1,r} . \hat{A}_o$ tel que $\beta^r(\Sigma) = \hat{f}$ et $b\Sigma = \hat{e}'$.

THEOREME. *Au couple* (M, Σ) *est canoniquement associé un élément* $v(M, \Sigma)$ *de* $T_f(A)$ *tel que* $bv(M, \Sigma) = \bar{e}'$.

En effet, pour $t > 0$ assez petit, soit *exp tm* l'automorphisme local de A, défini au voisinage de f par

$$exp\ tm(f') = G_{f'}(t),$$

où $G_{f'}$ est l'unique courbe intégrale du champ m d'origine f'. Posons $\sigma_t = (exp\ tm)\sigma$; comme $b\sigma_0 = \alpha(\sigma)$, l'application $b\sigma_t$ est un automorphisme local de A_o, de sorte qu'il existe un et un seul $x_t \in C_o^{\bullet}$ tel que $b\sigma_t(x_t) = e'$. Le 1-jet en 0 de l'application $t \to \sigma_t(x_t)$ dépend seulement de M et de Σ, et c'est le vecteur $v(M,\Sigma)$ cherché.

Soit $S = j_e^1 s \in G^1(\eta)$. Soit $v_S = Sav(M,\Sigma) \in T_{s(e)}A'$. Le composé $v(M,\Sigma) \circ v_S$ est défini dans $T(\eta)$; c'est un vecteur $\mathfrak{L}(M,\Sigma)S$ d'origine $fs(e)$ tel que $q\mathfrak{L}(M,\Sigma)S = \overline{e'}$. Ce vecteur sera appelé *dérivée de Lie de* S *relativement* à (M,Σ) et l'application

$$S \to \mathfrak{L}(M,\Sigma)S, \quad \text{où} \quad S \in G^1(\eta) \quad \text{et} \quad \alpha^r(S) = \hat{e},$$

est dite *dérivée de Lie relativement à* (M,Σ), notée $\mathfrak{L}(M,\Sigma)$.

M pourra par exemple être le 1-germe de champ vertical en f déduit d'un 1-germe $N = j_{e'}^1 n$ en e' de champ de vecteurs vertical le long de A_o (i.e. $N \in \widehat{T(A)}.J^{1,r-1}.j^{r-1,r}(\hat{A}_o)$, $an(e'') = \overline{e''}$ où $e'' \in \alpha(n)$). Ceci signifie que

$$M = j_f^1 m \quad \text{où} \quad m(f') = n(\beta(f'))\circ\overline{f'}.$$

Si $f = e$ et si $\Sigma = j_e^1(A, \iota, A_o)$, on posera $\mathfrak{L}(M,\Sigma) = \mathfrak{L}(M)$.

EXEMPLE. Soit V une variété r-différentiable et X un 1-germe de champ de vecteurs sur V en x. Soit $(C^{\bullet}, A)$ le groupoïde $(r-1)$-différentiable des 1-jets d'automorphismes locaux de V (ce groupoïde est le prolongement d'ordre 1 de $((V\times V)^{\perp}, V\times V)$, où $(V\times V)^{\perp}$ est le groupoïde des couples associé à $\delta^r(V)$). Au germe de champ X est canoniquement associé un 1-germe M de champ de vecteurs vertical en $\hat{x}$ sur A. Soit $\eta = ((C^{\bullet}, A), A', \kappa')$ l'espèce de structures $(r-1)$-différentiable canonique telle que A' soit une variété de tenseurs sur V. Un 1-germe en x de champ de tenseurs sur V s'identifie à un élément S de $G^1(\eta)$. La dérivée de Lie $\mathfrak{L}(M)(S)$ de S relativement à M est la dérivée de Lie au sens usuel de S relativement à X.

Index bibliographique.

[0] Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

[1] Catégories topologiques, I, II, III, Proc. Nederlands Ak. van Wetenschappen, 69, 2, 1966, 133-175.

[2] Prolongements de catégories différentiables, Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, VI, 1964.

[3] Sous-structures et applications K-covariantes, C.R.A.S. 256, 1963.

[4] Catégories inductives et pseudogroupes, Ann. Inst. Fourier, X, 1960.

[5] Sur les connexions d'ordre supérieur, Atti V Cong. Un. Mat. Italiana, 1956.

[6] Introduction to structured categories, Univ. of Kansas, Dep. of Math., Technical Report 10,1966, 95 pages.