Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 515–520

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Existence de solutions pour une classe de systèmes non linéaires de Boussinesq

Abdelatif Attaoui

Analyse et modèles stochastiques, CNRS-UMR 6085, Université de Rouen, 76801 Saint Etienne du Rouvray, France

Reçu le 8 janvier 2008 ; accepté après révision le 12 mars 2008

Disponible sur Internet le 21 avril 2008

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Nous étudions une classe de systèmes de Boussinesq dont le second membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est une force de gravité qui dépend de la température. ***Pour citer cet article : A. Attaoui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Existence of solutions for a class of nonlinear Boussinesq systems. We give a few existence results of solutions for a class of Boussinesq systems, with suitable conditions on the right-hand side of the momentum equation, the forcing term depending on temperature. ***To cite this article: A. Attaoui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

We consider a class of nonlinear Boussinesq systems of the type:

$$u_t + (u\cdot\nabla)u - 2\operatorname{div}(\mu(\theta)Du) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{in } Q, \tag{1}$$

$$b(\theta)_t + u\cdot\nabla b(\theta) - \Delta\theta = 2\mu(\theta)|Du|^2 \text{in } Q, \tag{2}$$

with $\operatorname{div} u = 0$ in Q, $u = 0$ and $\theta = 0$ on Σ_T, $u(t=0) = u_0$ and $b(\theta)(t=0) = b(\theta_0)$ in Ω, where Ω is an open, Lipschitz and bounded subset of $\mathbb{R}^N$ ($N=2$ or $N=3$), with boundary $\partial\Omega$, $T>0$, $Q = \Omega\times(0,T)$ and $\Sigma_T = \partial\Omega\times(0,T)$. The unknowns are the displacement field $u : \Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^N$ and the temperature field $\theta : \Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}$. The field $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ is the so-called rate-deformation tensor field. Equation (1) is the conservation equation of momentum. In this equation, quantities μ and p respectively denote the kinematic viscosity and the pressure of the fluid. In the right-hand side of Eq. (1), the function $F(\theta)$ represents the gravity's force which is proportional to the variations of density through the temperature. Equation (2) is the energy conservation equation, in which the right-hand side $\mu(\theta)|Du|^2$ is the dissipation energy (see the hypotheses (11)–(16) of the French version). Nonlinear

Adresse e-mail : Abdelatif.Attaoui@etu.univ-rouen.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.03.022

systems similar to (1), (2) but with a constant right-hand side (with respect to θ) and with $b(\theta)=\theta$ have been in particular investigated in [4] and [9]. In the particular case where the dissipation energy is null, existence and uniqueness result of a weak solution for the system (1)–(2) has been established in [6]. One will find, for example, a presentation of the assumptions, which allow to justify the Boussinesq model in [1]. The model studied in this paper is more general than those which are described in [1,4,6,9]. Indeed, the viscosity coefficient and the external force are temperature-dependent (with nonlinear dependence), the internal energy is also assumed to be nonlinear with respect to the temperature and there is a right-hand side in the energy conservation equation which is quadratic in the spatial gradient of the velocity field. As usual, the pressure p is eliminated in the system (1), (2). In the sequel, we study the system (8), (9) of the French version. The existence of solutions of (8), (9) is based on the stability of Eqs. (8) and (9) when approximation arguments are used, or on the uniqueness of solutions of these equations when we use fixed-point arguments. We are thus constrained to distinguish the case $N=2$ and $N=3$.

The case $N=2$

It is known that if $F(\theta)\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, then the Navier–Stokes equation (8) has a unique solution for $u_0\in(L^2(\Omega))^2$ and the dissipation energy $\mu(\theta)|Du|^2$ is stable in $L^1(Q)$ with respect to approximations. The energy conservation equation (9) is thus considered naturally within the L^1 framework (see e.g [2,5]). To guarantee the uniqueness and the stability of the solution of (9), we use the framework of renormalized solutions. This notion has been introduced by R.-J. Di Perna and P.-L. Lions in [7] and [8] for the study of Boltzmann equations (see also P.-L. Lions [9] for applications to fluid mechanics models). This notion was then adapted to parabolic version for equations of type (9) with L^1 data (see e.g [2,3]). The type of solutions which we obtain depends on the behavior of the function F. If, for example, F is bounded, we obtain solutions for all given initial data $u_0\in(L^2(\Omega))^2$ and $b(\theta_0)\in L^1(\Omega)$. To study the case of more general functions F, it is necessary to investigate the regularity of the solutions of (9). Under the assumptions adopted on b, the renormalized solutions of Eq. (9) satisfy:

$$\theta\in L^\infty\big(0,T,L^1(\Omega)\big),\ \forall k>0\quad \int_0^T\!\!\int_\Omega \big|DT_k(\theta)\big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant Ck,$$

with $T_k(r)=\min(k,\max(r,-k))$ $\forall r\in\mathbb{R}$. Then, we show in a first step that $\theta\in L^r(0,T;L^q(\Omega))$ with $1<q<\infty$ and $1\leqslant r<\frac{q}{q-1}$ (a similar result is shown in [10] for $N>2$ but it cannot be used as such for $N=2$). In order to have $F(\theta)\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, we are constrained to state the following growth assumption on F:

$$\forall r\in\mathbb{R},\quad \big|F(r)\big|\leqslant a+M|r|^\alpha,\quad \text{with } a\geqslant 0,\ M\geqslant 0 \text{ and } 2\alpha\in[0,3[.$$

We show in a second step that $F(\theta)$ is identified with an element of $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ with

$$\big\|F(\theta)\big\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\leqslant C\big(a+\|\theta\|^\alpha_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}\big).$$

These arguments allow us, thanks to approximations of b and fixed-points methods, to show that (8), (9) has solutions for small initial data.

Theorem 0.1. *Under the assumptions* (11)–(16) *on the data, assume that the continuous function F satisfies $|F(r)|\leqslant a+M|r|^\alpha\forall r\in\mathbb{R}$, with $a\geqslant 0$, $M\geqslant 0$ and $2\alpha\in[0,3[$. Then*:

- *if $0\leqslant 2\alpha\leqslant 1$, there exists at least a weak-renormalized solution of the system* (8), (9) *for $N=2$* (*in the sense of Definition* 2.1 *of the French version*).
- *if $1<2\alpha<3$, there exists a real positive number η, such that if $a+\|u_0\|_{L^2(\Omega)}+\|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\eta$, then there exists at least a weak-renormalized solution of the system* (8), (9) *for $N=2$.*

The case $N=3$

The uniqueness of solution of the Navier–Stokes equation (8) and the stability of the dissipation energy are open problems if u_0 belongs only to $(L^2(\Omega))^3$. If, for example, $u_0\in(H^1_0(\Omega))^3$, and F is a continuous function from $\mathbb{R}$

into $\mathbb{R}^3$ such that $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \eta$, with η is a small enough constant, we obtain the existence of a solution of (8), (9) by the same techniques as in the case $N = 2$.

Theorem 0.2. *Assume that* (11)–(14) *and* (16) *hold true. Assume that F is a continuous function from $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}^3$, and $u_0 \in (H_0^1(\Omega))^3$ such that* $\operatorname{div} u_0 = 0$ *in Q and $u_0 \cdot n = 0$ on $\partial\Omega$. There exists a real positive number η, such that if $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \eta$, then there exists at least a weak-renormalized solution of the system* (8), (9) *for $N = 3$* (*in the sense of Definition* 2.1 *of the French version*).

1. Introduction

Nous considérons une classe de systèmes non linéaires de Boussinesq du type :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2\operatorname{div}\big(\mu(\theta)Du\big) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{dans } Q, \tag{3}$$
$$b(\theta)_t + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta\theta = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \tag{4}$$
$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } Q, \tag{5}$$
$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \tag{6}$$
$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega, \tag{7}$$

où Ω est un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, $(N = 2, 3)$, de frontière $\partial\Omega$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Les inconnues sont le champ de déplacement $u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^N$ et le champ de température $\theta : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ et $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ est le taux de déformations. L'équation (3) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Dans cette équation, les quantités μ et p désignent respectivement la viscosité cinématique et la pression du fluide. Le second membre de l'équation (3) est la fonction $F(\theta)$, où F est une force de gravité proportionnelle à des variations de densité qui dépendent de la température. La fonction μ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et bornée. La fonction F est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$, u_0 appartient à $(L^2(\Omega))^N$, à divergence nulle et $u_0 \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. L'équation (4) est l'équation de conservation de l'énergie dans laquelle le second membre $\mu(\theta)|Du|^2$ est l'énergie de dissipation. Pour cette équation, la donnée initiale $b(\theta_0)$ appartient à $L^1(\Omega)$. Des systèmes non linéaires similaires, mais avec un second membre constant (par rapport à θ) et $b(\theta) = \theta$, ont été en particulier étudiés dans [4] et [9]. Dans le cas particulier où l'énergie de dissipation est nulle, un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible de (3)–(7) a été démontré dans [6]. La variation de densité dans un fluide est induite, par exemple, par des variations de la température résultant du chauffage non uniforme du fluide. On trouvera, par exemple, une présentation des hypothèses, qui permettent de justifier le modèle de Boussinesq dans [1]. Le modèle étudié dans cette Note est plus général que ceux décrits dans [1,4,6,9], puisque l'on considère ici une énergie interne $b(\theta)$ non linéaire, une viscosité et une force extérieure qui dépendent non linéairement de la température et enfin un couplage via l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|Du|^2$.

On rappelle les espaces fonctionnels classiques pour les équations de Navier–Stokes :

$$C_\sigma^\infty(\Omega) = \big\{u \in C_0^\infty\big(\Omega; \mathbb{R}^N\big);\ \operatorname{div} u = 0\big\}, \quad L_\sigma^q(\Omega) = \text{fermeture de } C_\sigma^\infty(\Omega) \text{dans } L^q\big(\Omega; \mathbb{R}^N\big),$$
$$H_\sigma^1(\Omega) = \text{fermeture de } C_\sigma^\infty(\Omega) \text{dans } H_0^1\big(\Omega; \mathbb{R}^N\big),$$

avec $q \geqslant 1$. On remarque que la pression p peut être éliminée du système (3)–(7). Dans la suite, nous étudions le système suivant :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2\operatorname{div}\big(\mu(\theta)Du\big) = F(\theta) \quad \text{dans } \big(H_\sigma^1\big)'(\Omega),\ \text{p.p. } t \in (0, T), \tag{8}$$
$$b(\theta)_t + u \cdot \nabla b(\theta) - \Delta\theta = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \tag{9}$$

avec $\operatorname{div} u = 0$ dans Q, $u = 0$ et $\theta = 0$ sur Σ_T, $u(t=0) = u_0$ et $b(\theta)(t=0) = b(\theta_0)$ dans Ω. L'existence de solutions au problème (8), (9) repose sur la stabilité des équations (8) et (9) si on utilise des approximations ou l'unicité des solutions de ces équations si on utilise un point fixe. On est donc amené à distinguer le cas de la dimension 2 d'espace $(N = 2)$ de la dimension 3 $(N = 3)$.

1.1. Le cas de la dimension $N = 2$

On sait que si $F(\theta) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, alors l'équation de Navier–Stokes (8) a une solution unique pour $u_0 \in (L^2(\Omega))^2$ et l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|Du|^2$ est stable dans $L^1(Q)$ relativement aux approximations. L'équation de conservation de l'énergie (9) se place donc naturellement dans le cadre L^1. Nombreux sont les travaux sur les équations paraboliques à données L^1 (voir [2,5] par exemple). Pour l'unicité et la stabilité de solutions de (9), on utilise le cadre des solutions renormalisées qui possèdent ces propriétés à la différence des solutions faibles. Cette notion a été introduite par R.-J. Di Perna et P.-L. Lions dans [7] et [8] pour l'étude des équations de Boltzmann (voir aussi P.-L. Lions [9] pour des applications à des modèles de mécanique des fluides). Cette notion a été adaptée par la suite à des versions paraboliques de type (9) à données L^1 (voir, par exemple, [2,3]). Le type de solutions que l'on obtient dépend bien sûr du comportement de la fonction F. Si, par exemple, F est bornée, on obtient des solutions pour toutes données initiales $u_0 \in (L^2(\Omega))^2$ et $b(\theta_0) \in L^1(\Omega)$. Pour aborder le cas de fonctions F plus générales, il faut examiner plus précisément la régularité des solutions de (9). Sous les hypothèses que nous adoptons sur b, les solutions renormalisées des équations de type (9) vérifient les propriétés de régularité suivantes :

$$\theta \in L^\infty\big(0,T,L^1(\Omega)\big),\ \forall k > 0 \quad \int_0^T\!\!\int_\Omega \big|DT_k(\theta)\big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant Ck,$$

avec $T_k(r) = \min(k, \max(r, -k))$ $\forall r \in \mathbb{R}$. Nous démontrons alors dans une première étape que $\theta \in L^r(0,T;L^q(\Omega))$ avec $1 < q < \infty$ et $1 \leqslant r < \frac{q}{q-1}$ (un résultat similaire est démontré dans [10] pour $N > 2$ mais il ne peut pas être employé en tant que tel pour $N = 2$). Pour avoir $F(\theta) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, on est donc amené à faire une hypothèse de croissance sur F du type :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad \big|F(r)\big| \leqslant a + M|r|^\alpha, \quad \text{avec } a \geqslant 0, M \geqslant 0 \text{ et } 2\alpha \in [0,3[.$$

Nous démontrons dans une deuxième étape que $F(\theta)$ s'identifie à un élement de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ avec

$$\big\|F(\theta)\big\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C\big(a + \|\theta\|^\alpha_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}\big). \tag{10}$$

Ces arguments nous permettent via des approximations de b et des méthodes de point fixe de démontrer que (8), (9) possèdent des solutions pour des données initiales petites.

1.2. Le cas de la dimension $N = 3$

L'unicité de la solution de l'équation (8) et la stabilité de l'énergie de dissipation sont des problèmes ouverts si u_0 appartient seulement à $(L^2(\Omega))^3$. Par exemple, si $u_0 \in (H^1_0(\Omega))^3$ et F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \eta$, avec η une constante suffisamment petite, on peut alors obtenir l'existence d'une solution au problème (8), (9) par les mêmes techniques que dans le cas $N = 2$.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$b \text{ est une fonction strictement croissante de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que } b(0) = 0, \tag{11}$$

$$b'(r) \geqslant \alpha', \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ pour une constante } \alpha' > 0, \tag{12}$$

$$\mu \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ avec } m_0 \leqslant \mu(s) \leqslant m_1, (0 < m_0 \leqslant m_1), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

$$F \text{ est une fonction continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \tag{14}$$

$$u_0 \in \big(L^2(\Omega)\big)^N, \quad \operatorname{div} u_0 = 0 \quad \text{dans } Q \quad \text{et} \quad u_0 \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{15}$$

$$\theta_0 \text{ est une fonction mesurable définie sur } \Omega \text{ telle que } b(\theta_0) \in L^1(\Omega). \tag{16}$$

2. Résultats pour le système (8), (9) en dimension $N = 2$

La définition suivante précise la notion de solution faible-renormalisée du système (8), (9).

Définition 2.1. Un couple de fonctions (u,θ) définies sur $\Omega\times(0,T)$ est une solution faible-renormalisée du système (8), (9) si :

$$u\in L^2\big(0,T;H^1_\sigma(\Omega)\big)\cap L^\infty\big(0,T;L^2_\sigma(\Omega)\big), \tag{17}$$

$$T_K(\theta)\in L^2\big(0,T;H^1_0(\Omega)\big)\quad\text{pour tout } K\geqslant 0\quad\text{et}\quad b(\theta)\in L^\infty\big(0,T;L^1(\Omega)\big), \tag{18}$$

$$\int\limits_{\{(x,t)\in Q;\, n\leqslant|b(\theta)(x,t)|\leqslant n+1\}} b'(\theta)|D\theta|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\to 0\quad\text{si } n\to+\infty, \tag{19}$$

u est solution faible de l'équation de Navier–Stokes (8), (20)

$$u(t=0)=u_0\quad\text{p.p. dans } \Omega, \tag{21}$$

$\forall S\in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' est à support compact, on a dans $\mathcal{D}'(Q)$:

$$\frac{\partial S(b(\theta))}{\partial t}+\operatorname{div}\big(uS\big(b(\theta)\big)\big)-\operatorname{div}\big(S'\big(b(\theta)\big)D\theta\big)+S''\big(b(\theta)\big)b'(\theta)|D\theta|^2=2\mu(\theta)|Du|^2S'\big(b(\theta)\big), \tag{22}$$

$$S\big(b(\theta)\big)(t=0)=S\big(b(\theta_0)\big)\quad\text{dans } \Omega. \tag{23}$$

Théorème 2.2. *On suppose vérifiées les hypothèses* (11)–(16)*, de plus la fonction F vérifie* : $\forall r\in\mathbb{R}$, $|F(r)|\leqslant a+M|r|^\alpha$*, avec* $a\geqslant 0$, $M\geqslant 0$ *et* $2\alpha\in[0,3[$. *Alors* :

- *si* $0\leqslant 2\alpha\leqslant 1$ *alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système* (8), (9) (*au sens de la Définition* 2.1)
- *si* $1<2\alpha<3$*, il existe* $\eta>0$*, tel que si* $a+\|u_0\|_{L^2(\Omega)}+\|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\eta$*, alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système* (8), (9).

Idée de la démonstration. On procède en deux étapes. Dans la première étape, on suppose que b' est localement lipschitizienne. Soit L un espace de Lebesgue du type $L=L^r(0,T,L^q(\Omega))$ $(r,q\geqslant 1)$. On fixe θ dans L, et on considère les équations de Navier–Stokes :

$$u_t+(u\cdot\nabla)u-2\operatorname{div}\big(\mu(\theta)Du\big)=F(\theta)\quad\text{dans } \big(H^1_\sigma\big)'(\Omega),\ \text{p.p. } t\in(0,T), \tag{24}$$

avec $\operatorname{div}u=0$ dans Q, $u=0$ sur Σ_T et $u(t=0)=u_0$ dans Ω. D'après (10), on sait que $F(\theta)\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Le problème (24) admet donc une solution unique $u\in L^2(0,T;H^1_\sigma(\Omega))$ telle que $\mu(\theta)|Du|^2\in L^1(Q)$ (voir [12]). Désormais, on considère le problème parabolique suivant :

$$b(\hat\theta)_t+u\cdot\nabla b(\hat\theta)-\Delta\hat\theta=2\mu(\theta)|Du|^2\quad\text{dans } Q, \tag{25}$$

$$\hat\theta=0\quad\text{sur } \Sigma_T, \tag{26}$$

$$b(\hat\theta)(t=0)=b(\theta_0)\quad\text{dans } \Omega. \tag{27}$$

Sous les hypothèses du Théorème 2.2, on utilise par exemple les méthodes classiques développées dans [3] (voir section 4) pour montrer que le problème (25)–(27) admet une solution renormalisée unique $\hat\theta$. Afin d'appliquer un argument de type point fixe, il est d'abord nécessaire d'avoir $\hat\theta$ dans L de sorte que nous puissions considérer l'application

$$\psi:\theta\to\hat\theta$$

de L dans L. Par conséquent, α doit être choisi tel que la régularité de la solution renormalisée de (25)–(27) implique $F(\theta)\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, ce qui mène à différents choix de L dépendant de α. Deuxièmement, on utilise la stabilité de la solution renormalisée par rapport aux données et la stabilité de l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|Du|^2$ par rapport aux approximations pour montrer que ψ est compacte et continue. Enfin, pour démontrer qu'il existe une boule B de L telle que $\psi(B)\subset B$, on distingue deux cas : si $0\leqslant 2\alpha\leqslant 1$, ceci est établi pour toutes données initiales vérifiant (15)–(16), tandis que si $1<2\alpha<3$, nous sommes contraints de supposer que les données a, $\|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}$ et $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ sont suffisamment petites. Le théorème du point fixe de Schauder permet de conclure à l'existence d'une solution faible-renormalisée (u,θ) du système (8), (9), telle que θ soit bornée dans L. Dans la deuxième étape, nous considérons un problème approché associé à (8), (9) en régularisant la fonction b par b_ε où b_ε est une suite de fonctions de classe C^2 telle que $b'_\varepsilon(r) > 0$ $\forall r \in \mathbb{R}$, $b_\varepsilon(0) = 0$ et telle que b_ε et b'_ε convergent vers b et b' uniformément sur $\mathbb{R}$ quand ε tend vers 0. Pour un $\varepsilon > 0$ fixé suffisamment petit, la suite b_ε vérifie (11) et (12), de plus b'_ε est localement lipschitizienne. D'après la première étape, le problème approché admet une solution faible-renormalisée. Un passage à la limite dans ce dernier problème donne l'existence d'une solution faible-renormalisée du système (8), (9). □

3. Résultats pour le système (8), (9) en dimension $N = 3$

Théorème 3.1. *On suppose vérifiées les hypothèses* (11)–(14) *et* (16) *et* $u_0 \in (H_0^1(\Omega))^3$ *est telle que* $\operatorname{div} u_0 = 0$ *dans* Q *et* $u_0 \cdot n = 0$ *sur* $\partial\Omega$. *Il existe un nombre réel* $\eta > 0$, *suffisamment petit tel que si* $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \eta$, *alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système* (8), (9) *en dimension* $N = 3$ (*au sens de la Définition* 2.1).

Idée de la démonstration. Soit θ fixé dans $L^1(Q)$. Sous les hypothèses du Théorème 3.1, le théorème 3.11 de [12] nous assure l'existence et l'unicité de la solution faible u de l'équation (24) dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$, avec $\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C$ où C est une constante. Utilisant un lemme de type Aubin (Simon [11]), on montre que l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|Du|^2$ est stable dans $L^1(Q)$ relativement aux approximations. Pour conclure, on reprend alors les mêmes arguments que dans le cas $N = 2$. □

Références

[1] C. Bernardi, B. Métivet, B. Pernaud-Thomas, Couplage des équations de Navier–Stokes et de la chaleur : le modèle et son approximation par éléments finis, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 29 (2) (1995) 871–921.
[2] D. Blanchard, F. Murat, Renormalized solution for nonlinear parabolic problems with L^1 data. Existence and uniqueness, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 127 (1997) 1137–1152.
[3] D. Blanchard, H. Redwane, Renormalized solutions for a class of nonlinear parabolic evolution problems, J. Math. Pures Appl. 77 (1998) 117–151.
[4] B. Climent, E. Fernández-Cara, Some existence and uniqueness results for a time-dependent coupled problem of the Navier–Stokes kind, Math. Models Methods Appl. Sci. 8 (4) (1998) 603–622.
[5] A. Dall' Aglio, L. Orsina, Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and L^1 data, Nonlinear Anal. 27 (1986) 59–73.
[6] J.-I. Diaz, G. Galiano, Existence and uniqueness of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion, Topol. Methods Nonlinear Anal. 11 (1) (1998) 59–82.
[7] R.-J. Di Perna, P.-L. Lions, On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability, Ann. of Math. 130 (1) (1989) 321–366.
[8] R.-J. Di Perna, P.-L. Lions, Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory, Invent. Math. 98 (1) (1989) 511–547.
[9] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 1: Incompressible Models, Oxford Lect. Series in Math. Appl., vol. 3, 1996.
[10] S. Segura de León, J. Toledo, Regularity for entropy solutions of parabolic p-Laplacian type equations, Publ. Mat. 43 (1999) 665–683.
[11] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pur. App. 146 (1987) 65–96.
[12] R. Temam, Navier–Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, third revised edition, North-Holland, Amsterdam, 1984.