Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 949–954
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Périodes des espaces des modules $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ et valeurs zêtas multiples

Francis C.S. Brown

A2X, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France

Reçu le 20 février 2006 ; accepté le 18 avril 2006

Disponible sur Internet le 15 mai 2006

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous donnons les grandes lignes d'une démonstration de la conjecture de Goncharov et Manin qui prédit que les périodes relatives des espaces des modules $\mathfrak{M}_{0,n}$ des courbes de genre 0 avec n points marqués sont des valeurs zêtas multiples. ***Pour citer cet article : F.C.S. Brown, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$. We sketch a proof of the conjecture due to Goncharov and Manin which states that the relative periods of the moduli space $\mathfrak{M}_{0,n}$ of Riemann spheres with n ordered marked points are multiple zeta values. ***To cite this article: F.C.S. Brown, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

Let $n = \ell + 3 \geqslant 4$, and let $\mathfrak{M}_{0,n}$ denote the moduli space of curves of genus 0 with n marked points. There is a smooth compactification $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$, defined by Deligne, Knudsen and Mumford, such that the complement $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \backslash \mathfrak{M}_{0,n}$ is a normal crossing divisor. Let $A, B \subset \overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \backslash \mathfrak{M}_{0,n}$ denote two sets of boundary divisors which share no irreducible components. In [8], Goncharov and Manin show that the relative cohomology group $H^\ell(\overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \backslash A, B \backslash B \cap A)$ defines a mixed Tate motive unramified over $\mathbb{Z}$.

Now let $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, and suppose that $n_r \geqslant 2$. The multiple zeta value $\zeta(n_1, \ldots, n_r)$ is

$$\zeta(n_1, \ldots, n_r) = \sum_{0<k_1<\cdots<k_r} \frac{1}{k_1^{n_1} \cdots k_r^{n_r}}. \tag{1}$$

Its weight is the quantity $n_1 + \cdots + n_r$, and its depth is the number of indices r. A very general conjecture [7] claims that the periods of any mixed Tate motive unramified over $\mathbb{Z}$ are multiple zeta values. In the case of motives arising from moduli spaces $\mathfrak{M}_{0,n}$, this says the following. Consider a smooth compact real submanifold $X_B \subset \overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \backslash A$, whose boundary is contained in B, and let $\omega_A \in \Omega^\ell(\overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \backslash A)$ denote an algebraic form defined over $\mathbb{Q}$, with singularities contained in A. In [8], Goncharov and Manin conjecture that the integral

Adresse e-mail : brown@clipper.ens.fr (F.C.S. Brown).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.04.016

$$I = \int_{X_B} \omega_A \tag{2}$$

is a rational linear combination of multiple zeta values and the constants $(2\mathrm{i}\pi)^k$, which are of weight k.

Theorem 0.1. *[1] The integral I is a $\mathbb{Q}[2\mathrm{i}\pi]$-linear combination of multiple zeta values of weight $\leqslant \ell$.*

This lends significant weight to the conjecture on the periods of all mixed Tate motives unramified over $\mathbb{Z}$. The rough idea of our method is as follows. The set of real points $\mathfrak{M}_{0,n}(\mathbb{R})$ is tessellated by a number of open cells X_n which can naturally be identified with a Stasheff polytope, or associahedron. We can reduce to the case where the domain of integration in (2) is a single cell X_n. The key is then to apply a version of Stokes's theorem to the closed polytope $\overline{X}_n \subset \overline{\mathfrak{M}}_{0,n}(\mathbb{R})$. Since each face of $\overline{X}_n$ is itself a product of associahedra $\overline{X}_a \times \overline{X}_b$, we repeatedly take primitives to obtain a cascade of integrals over associahedra of smaller and smaller dimension. In order to do this, we need to construct a graded algebra $L(\mathfrak{M}_{0,n})$ of multiple polylogarithm functions on $\mathfrak{M}_{0,n}$ in which primitives exist. At each stage of the induction, the dimension of the domain of integration decreases by one, and the weight of the integrand increases by one. At the final stage we evaluate a multiple polylogarithm at the point 1, and this gives a linear combination of multiple zeta values. This approach for computing periods works in much greater generality, and our results should extend without difficulty to the case of configuration spaces related to Coxeter groups.

1. Introduction

Soient $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, et supposons que $n_r \geqslant 2$. La valeur zêta multiple $\zeta(n_1, \ldots, n_r)$ est la somme

$$\zeta(n_1, \ldots, n_r) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{n_1} \cdots m_r^{n_r}}.$$

Son *poids* est la quantité $n_1 + \cdots + n_r$. Soit $\mathcal{Z}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par ces nombres. On démontre que c'est une algèbre filtrée par le poids [14]. Nous dirons que la constante $2\mathrm{i}\pi$ est de poids 1.

Soit $n \geqslant 4$, et soit $\mathfrak{M}_{0,n}$ l'espace des modules des courbes de genre 0 avec n points marqués. Il y a une compactification lisse $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ due à Deligne, Knudsen et Mumford [4] telle que $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \backslash \mathfrak{M}_{0,n}$ soit un diviseur à croisements normaux. Soient $A, B \subset \overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \backslash \mathfrak{M}_{0,n}$ deux ensembles de diviseurs qui se rencontrent en codimension 2. Soit $X \subset \overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \backslash A$ une sous-variété réelle compacte lisse de dimension ℓ dont le bord est contenu dans B, et soit ω_A une ℓ-forme régulière sur $\mathfrak{M}_{0,n}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ dont les singularités sont contenues dans A. Le théorème suivant a été conjecturé par Goncharov et Manin [8].

Théorème 1.1. *[1] La période $\int_X \omega_A$ est un élément de l'anneau $\mathcal{Z}[2\mathrm{i}\pi]$, de poids au plus* $\dim X$.

Quelques résultats partiels dans cette direction ont été obtenus par Terasoma [13] (voir aussi [12]).

2. Éclatements partiels de l'espace des modules $\mathfrak{M}_{0,n}$, et intégrales des périodes

Soit $n \geqslant 4$, et soit $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ un ensemble à n éléments. Notons $\mathfrak{M}_{0,S}$ l'espace des modules des sphères de Riemann avec n points marqués par les éléments de S. C'est la variété

$$\mathfrak{M}_{0,S} = \big\{(z_s)_{s\in S}\colon\ z_s \in \mathbb{P}^1,\ \text{deux à deux distincts}\big\}/\mathrm{PSL}_2,$$

où PSL_2 agit par transformations homographiques sur $\mathbb{P}^1$. C'est une variété affine de dimension $\ell = n - 3$. Une *structure diédrale* δ sur S est une identification des éléments de S avec les sommets (ou les côtés) d'un n-gone régulier. Notons (S, δ) ce polygone, $D_{(S,\delta)}$ son groupe de symétrie diédrale, et $\chi_{S,\delta}$ l'ensemble de ses cordes. Nous dirons que deux cordes $\{i, j\}, \{k, l\} \in \chi_{S,\delta}$ se croisent si elles possèdent un point d'intersection à l'intérieur de (S, δ). A chaque corde $\{i, j\} \in \chi_{S,\delta}$ on associe une *coordonnée diédrale* qui est le birapport (symétrique en i et j) :

$$u_{ij} = [i\,i+1 \mid j+1\,j] = \frac{(z_i - z_{j+1})(z_{i+1} - z_j)}{(z_i - z_j)(z_{i+1} - z_{j+1})},$$

où nous identifions l'indice i et le point s_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$. C'est invariant par l'action de PSL_2 et définit une fonction $u_{ij} : \mathfrak{M}_{0,S} \to \mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$. On obtient de cette manière un plongement affine :

$$(u_{ij})_{\{i,j\} \in \chi_{S,\delta}} : \mathfrak{M}_{0,S} \longrightarrow \mathbb{A}^{n(n-3)/2}.$$

Notons $\mathfrak{M}^{\delta}_{0,S}$ la clôture de Zariski de son image. Nous démontrons dans [1] que c'est un schéma lisse défini sur $\mathbb{Z}$, et que l'on a une inclusion $\mathfrak{M}_{0,S} \subset \mathfrak{M}^{\delta}_{0,S} \subset \overline{\mathfrak{M}}_{0,S}$. Le complémentaire $\mathfrak{M}^{\delta}_{0,S} \backslash \mathfrak{M}_{0,S}$ est un diviseur à croisements normaux, dont les composantes irréductibles sont les $D_{ij} = \{u_{ij} = 0\}$ où $\{i, j\} \in \chi_{S,\delta}$.

2.1. *Points réels et associaèdres*

Considérons l'ensemble des points réels $\mathfrak{M}_{0,S}(\mathbb{R})$. A chaque structure diédrale δ on associe une cellule

$$X_{S,\delta} = \bigl\{0 < u_{ij} < 1\text{: pour tout } \{i, j\} \in \chi_{S,\delta}\bigr\} \subset \mathfrak{M}_{0,S}(\mathbb{R}).$$

C'est une composante connexe contractile de $\mathfrak{M}_{0,S}(\mathbb{R})$. L'ensemble des $X_{S,\delta}$ lorsque δ parcourt l'ensemble des $n!/2n$ structures diédrales sur S donnent un pavage de la variété réelle $\mathfrak{M}_{0,S}(\mathbb{R})$. La cellule fermée

$$\overline{X}_{S,\delta} = \bigl\{0 \leqslant u_{ij} \leqslant 1\text{: pour tout } \{i, j\} \in \chi_{S,\delta}\bigr\} \subset \mathfrak{M}^{\delta}_{0,S}(\mathbb{R}),$$

est une variété à coins, et c'est un modèle algébrique de l'associaèdre ou polyèdre de Stasheff. Ses facettes $F_{ij} = \overline{X}_{S,\delta} \cap \{u_{ij} = 0\}$ sont indexées par les cordes $\{i, j\} \in \chi_{S,\delta}$, et deux faces F_{ij} et F_{kl} se rencontrent si et seulement si $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ ne se croisent pas. Si l'on coupe le polygone (S, δ) le long d'une corde $\{i, j\}$, il se décompose en deux sous-polygones (S_1, δ_1) et (S_2, δ) avec $r + 1$ et $n - r + 1$ côtés. On peut déduire directement des coordonnées diédrales qu'il y a une décomposition des diviseurs et des facettes :

$$D_{ij} \cong \mathfrak{M}^{\delta_1}_{0,S_1} \times \mathfrak{M}^{\delta_2}_{0,S_2}, \quad \text{ce qui implique que} \quad F_{ij} \cong \overline{X}_{S_1,\delta_1} \times \overline{X}_{S_2,\delta_2}. \tag{3}$$

En itérant, on déduit que les sommets de $\overline{X}_{S,\delta}$ sont indexés par les triangulations de (S, δ).

2.2. *Intégrales des périodes*

Il existe une unique (à multiplication près par un scalaire rationnel) ℓ-forme régulière $\omega_{S,\delta}$ sur $\mathfrak{M}_{0,S}$ qui n'a ni pôles ni zéros le long des diviseurs D_{ij}, pour $\{i, j\} \in \chi_{S,\delta}$. Elle est invariante par l'action du groupe $D_{(S,\delta)}$.

Proposition 1. *Soit $\alpha = (\alpha_{ij})_{\{i,j\} \in \chi_{S,\delta}}$ un ensemble d'indices, où $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$. L'intégrale*

$$I_{S,\delta}(\alpha) = \int_{\overline{X}_{S,\delta}} \prod_{\{i,j\} \in \chi_{S,\delta}} u_{ij}^{\alpha_{ij}} \omega_{S,\delta} \tag{4}$$

converge si et seulement si $\alpha_{ij} \geqslant 0$ pour tout $\{i, j\} \in \chi_{S,\delta}$. Dans ces conditions, l'intégrand est continu sur le domaine compact $\overline{X}_{S,\delta}$, et l'intégrale est réelle et positive.

Ecrivons la même intégrale en *coordonnées simpliciales*. Par la triple transitivité de PSL_2, nous pouvons placer les points marqués z_1 en 1, z_2 à l'infini, et z_3 en 0. Prenons comme coordonnées $t_1 = z_4, \ldots, t_\ell = z_n$, et identifions $\mathfrak{M}_{0,S}(\mathbb{C})$ avec le complémentaire d'une configuration d'hyperplans affine :

$$\mathfrak{M}_{0,S}(\mathbb{C}) \cong \bigl\{(t_1, \ldots, t_\ell) \in \mathbb{C}^\ell\text{: } t_i \neq 0, 1\text{: } t_i \neq t_j, \text{ pour } 1 \leqslant i < j \leqslant \ell\bigr\}. \tag{5}$$

Avec ces coordonnées $(t_1, \ldots, t_\ell)$, on vérifie aisément que le domaine $X_{S,\delta}$ correspond au simplexe ouvert $\{(t_1, \ldots, t_\ell) \in \mathbb{R}^\ell\text{: } 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_\ell < 1\}$, et il s'ensuit que les intégrales $I_{S,\delta}(\alpha)$ s'écrivent :

$$I_{S,\delta}(\alpha) = \int_{0 < t_1 < \cdots < t_\ell < 1} \prod_i t_i^{a_i} (1 - t_i)^{b_i} \prod_{i<j} (t_j - t_i)^{c_{ij}}\, dt_1 \cdots dt_\ell, \tag{6}$$

où les indices $a_i, b_i, c_{ij} \in \mathbb{Z}$ sont des combinaisons linéaires explicites des indices α_{ij} et 1. Certaines sous-familles de ces intégrales ont été considérées par divers auteurs (voir la bibliographie de [6]).

Théorème 2.1. *L'intégrale $I_{S,\delta}(\alpha)$ est $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire des valeurs zêtas multiples de poids $\leqslant \ell$.*

Le Théorème 1.1 peut s'en déduire par un argument de résidus en théorie de Hodge [1].

3. La construction bar sur $\mathfrak{M}_{0,S}$ et primitives

Notons $\mathcal{O}(\mathfrak{M}_{0,S}) = \mathbb{Q}[u_{ij}, u_{ij}^{-1},\ \{i,j\} \in \chi_{S,\delta}]$ l'anneau des fonctions régulières sur $\mathfrak{M}_{0,S}$. Nous pouvons formellement rajouter des primitives successives à cette algèbre en utilisant la construction suivante. Soit $\omega_{ij} = du_{ij}/u_{ij}$ la dérivée logarithmique de la coordonnée diédrale u_{ij}, pour $\{i,j\} \in \chi_{S,\delta}$. Ensuite, pour tout $m \geqslant 2$, soit V_m le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré librement par les symboles

$$\sum_{I=(c_1,\dots,c_m)} a_I\, [\omega_{c_1}|\cdots|\omega_{c_m}], \quad \text{où les } c_i \in \chi_{S,\delta}, \text{ et } a_I \in \mathbb{Q},$$

qui satisfont à la condition suivante pour tout $1 \leqslant k \leqslant m-1$:

$$\sum_I a_I\, \omega_{c_1} \otimes \cdots \otimes (\omega_{c_k} \wedge \omega_{c_{k+1}}) \otimes \cdots \otimes \omega_{c_m} = 0 \in H^1(\mathfrak{M}_{0,S})^{\otimes(k-1)} \otimes H^2(\mathfrak{M}_{0,S}) \otimes H^1(\mathfrak{M}_{0,S})^{\otimes(m-k-1)}, \quad (7)$$

où $H^i(\mathfrak{M}_{0,S})$ désigne la cohomologie de de Rham. On pose $V_0 = \mathbb{Q}$, et $V_1 = \bigoplus_{c \in \chi_{S,\delta}} \mathbb{Q}[\omega_c] \cong H^1(\mathfrak{M}_{0,S})$. Considérons l'espace vectoriel gradué :

$$B(\mathfrak{M}_{0,S}) = \mathcal{O}(\mathfrak{M}_{0,S}) \otimes_{\mathbb{Q}} \bigoplus_{m \geqslant 0} V_m. \quad (8)$$

On démontre que c'est une algèbre commutative pour le produit de mélange que l'on note ш [1]. C'est une version de la construction bar étudiée par Chen [3,9]. Soit maintenant $\Omega^i(\mathfrak{M}_{0,S})$ l'ensemble des i-formes régulières sur $\mathfrak{M}_{0,S}$, et posons $\Omega^i B(\mathfrak{M}_{0,S}) = B(\mathfrak{M}_{0,S}) \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{M}_{0,S})} \Omega^i(\mathfrak{M}_{0,S})$. On définit une différentielle $d : V_m \to \Omega^1(\mathfrak{M}_{0,S}) \otimes_{\mathbb{Q}} V_{m-1}$ par la formule

$$d \sum_{I=(c_1,\dots,c_m)} a_I [\omega_{c_1}|\cdots|\omega_{c_m}] = \sum_{I=(c_1,\dots,c_m)} a_I \omega_{c_1} [\omega_{c_2}|\cdots|\omega_{c_m}].$$

Elle se prolonge, via la formule de Leibniz, en une application $d : \Omega^i B(\mathfrak{M}_{0,S}) \to \Omega^{i+1} B(\mathfrak{M}_{0,S})$ pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Il découle de la condition (7) que $d^2 = 0$. Nous avons donc un complexe de de Rham :

$$0 \longrightarrow B(\mathfrak{M}_{0,S}) \xrightarrow{d} \Omega^1 B(\mathfrak{M}_{0,S}) \xrightarrow{d} \Omega^2 B(\mathfrak{M}_{0,S}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^\ell B(\mathfrak{M}_{0,S}) \longrightarrow 0,$$

dont le groupe de cohomologie en degré i sera noté $H^i_{\mathrm{DR}}(B(\mathfrak{M}_{0,S}))$.

Théorème 3.1. $H^0_{\mathrm{DR}}(B(\mathfrak{M}_{0,S})) = \mathbb{Q}$, *et* $H^i_{\mathrm{DR}}(B(\mathfrak{M}_{0,S})) = 0$ *pour tout* $i \geqslant 1$.

4. Régularisation canonique des polylogarithmes multiples

On appellera *fonction multivaluée* sur $\mathfrak{M}_{0,S}$ toute fonction holomorphe définie sur un revêtement universel de $\mathfrak{M}_{0,S}$. Nous voulons définir une réalisation de l'algèbre $B(\mathfrak{M}_{0,S})$ par des fonctions multivaluées. Pour régulariser leurs singularités logarithmiques à l'infini, on considère leur série génératrice qui sera solution d'une certaine équation différentielle. Pour la définir, soient δ_{ij}, $\{i,j\} \in \chi_{S,\delta}$, des symboles qui satisfont à $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, et considérons la forme différentielle formelle :

$$\Omega_{S,\delta} = \sum_{\{i,j\} \in \chi_{S,\delta}} \delta_{ij}\, \omega_{ij}.$$

L'intégrabilité de cette forme s'écrit $d\,\Omega_{S,\delta} = \Omega_{S,\delta} \wedge \Omega_{S,\delta}$. Cela équivaut aux relations quadratiques

$$[\delta_{i-1j} + \delta_{ij-1} - \delta_{i-1j-1} - \delta_{ij}, \delta_{k-1l} + \delta_{kl-1} - \delta_{k-1l-1} - \delta_{kl}] = 0, \quad \text{pour tout } i,j,k,l \in S, \quad (9)$$

où l'on pose $\delta_{ii}=0$ et $\delta_{ij}=0$ lorsque i et j sont consécutifs. On définit ensuite $\widehat{\mathfrak{B}}_{S,\delta}(\mathbb{C})$ comme étant l'anneau des séries formelles non-commutatives en les δ_{ij} à coefficients dans $\mathbb{C}$, modulo les relations (9). On peut donc considérer l'équation différentielle suivante :

$$dL=\Omega_{S,\delta}L, \tag{10}$$

où L est une fonction multivaluée sur $\mathfrak{M}_{0,S}$ à valeurs dans $\widehat{\mathfrak{B}}_{S,\delta}(\mathbb{C})$.

Théorème 4.1. *Pour tout sommet v de l'associaèdre $\overline{X}_{S,\delta}$, soit F_v l'ensemble des faces qui rencontrent v. Il y a une unique solution $L_{v,\delta}(z)$ de l'équation différentielle* (10) *telle que*

$$L_{v,\delta}(z)=f_{v,\delta}(z)\exp\biggl(\sum_{\{i,j\}:\ F_{ij}\in F_v}\delta_{ij}\log u_{ij}\biggr),$$

où $f_{v,\delta}(z)$ est holomorphe dans un voisinage ouvert de v dans $\mathfrak{M}^{\delta}_{0,S}(\mathbb{C})$ et $f_{v,\delta}(v)=1$.

L'énoncé est bien défini parce que les relations (9) entraînent que les δ_{ij} qui interviennent dans le membre de droite commutent. Ce théorème se démontre dans [1] par un théorème de Fuchs généralisé à plusieurs variables complexes et redonne des résultats analogues de Drinfeld et Kapranov [5,10] pour l'équation de Knizhnik–Zamolodchikov [11]. Les coefficients de la série $L_{v,\delta}(z)$ peuvent se calculer explicitement en coordonnées simpliciales (5). Ce sont des polylogarithmes multiples [2,7] :

$$\mathrm{Li}_{n_1,\dots,n_r}\biggl(\frac{t_{i_1}}{t_{i_2}},\dots,\frac{t_{i_{r-1}}}{t_{i_r}},t_{i_r}\biggr)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{t_{i_1}^{m_1}t_{i_2}^{m_2-m_1}\cdots t_{i_r}^{m_r-m_{r-1}}}{m_1^{n_1}\cdots m_r^{n_r}},$$

où les indices $i_1,\dots,i_r$ sont compris entre 1 et ℓ. Il apparaît aussi des fonctions logarithmes $\log t_i$. On en déduit facilement que la monodromie de $L_{v,\delta}(z)$ s'exprime explicitement en fonction des valeurs zêtas multiples et de la constante $2i\pi$, et que la limite régularisée de $L_{v,\delta}(z)$ en tout sommet w de $\overline{X}_{S,\delta}$ est une série à coefficients dans l'algèbre $\mathcal{Z}$ des valeurs zêtas multiples.

Soit $L^{v,\delta}(\mathfrak{M}_{0,S})$ la $\mathcal{O}(\mathfrak{M}_{0,S})$-algèbre engendrée par les coefficients de la série $L_{v,\delta}(z)$ solution de l'équation différentielle (10). C'est une algèbre différentielle de fonctions multivaluées sur $\mathfrak{M}_{0,S}$. Dans [1] on construit la *réalisation régularisée* qui est un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées :

$$\rho_{v,\delta}:B(\mathfrak{M}_{0,S})\xrightarrow{\sim}L^{v,\delta}(\mathfrak{M}_{0,S}).$$

Cette application envoie le symbole $[\omega_{ij}]$ sur $\log u_{ij}$, pour tout $\{i,j\}\in\chi_{S,\delta}$. On définit maintenant :

$$L^{\delta}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{M}_{0,S})=\mathcal{Z}\otimes L^{v,\delta}(\mathfrak{M}_{0,S}).$$

C'est une algèbre différentielle *filtrée*, dont l'anneau des constantes est $\mathcal{Z}$. Elle ne dépend pas du choix du sommet v par les remarques ci-dessus, et sa cohomologie est triviale par le Théorème 3.1.

Théorème 4.2. $L^{\delta}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{M}_{0,S})$ *satisfait* (*en particulier*) *aux propriétés suivantes* :

(i) *La sous-algèbre des éléments de poids* 0 *dans $L^{\delta}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{M}_{0,S})$ contient $\mathcal{O}(\mathfrak{M}_{0,S})$.*

(ii) *Toute ℓ-forme de poids k à coefficients dans $L^{\delta}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{M}_{0,S})$ a une primitive de poids au plus $k+1$.*

(iii) *Si $f\in L^{\delta}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{M}_{0,S})$ est de poids au plus k, sa limite régularisée en un diviseur $D_{ij}\cong\mathfrak{M}^{\delta_1}_{0,S_1}\times\mathfrak{M}^{\delta_2}_{0,S_2}$ est une somme de produits de fonctions f_1f_2 de poids total au plus k, où $f_i\in L^{\delta_i}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{M}_{0,S_i})$, pour $i=1,2$.*

5. Esquisse de démonstration du Théorème 2.1

Partons d'une ℓ-forme $f\in\Omega^{\ell}L^{\delta}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{M}_{0,S})$, de poids au plus k. On sait par (ii) qu'elle possède une primitive P dans $\Omega^{\ell-1}L^{\delta}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{M}_{0,S})$ de poids au plus $k+1$. Par une version adaptée de la formule de Stokes,

$$\int_{\overline{X}_{S,\delta}}f=\int_{\partial\overline{X}_{S,\delta}}P=\sum_{\{i,j\}\in\chi_{S,\delta}}\int_{F_{ij}}P|_{F_{ij}}.$$

Or, nous savons par (iii) que la restriction de P à une facette $F_{ij} \cong \overline{X}_{S_1,\delta_1} \times \overline{X}_{S_2,\delta_2}$ se decompose en une somme de produits $\sum P_{m_1} P_{m_2}$ où $P_{m_i} \in L^{\delta_i}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{M}_{0,S_i})$ pour $i = 1, 2$. Chaque intégrale dans la somme à droite se décompose en une somme finie :

$$\int_{F_{ij}} P|_{F_{ij}} = \sum_{m_1,m_2} \int_{\overline{X}_{S_1,\delta_1}} P_{m_1} \int_{\overline{X}_{S_1,\delta_1}} P_{m_2}.$$

Il reste à calculer l'intégrale des formes P_{m_i} de poids au plus $k+1$ sur des associaèdres $\overline{X}_{S_i,\delta_i}$ qui sont de dimension $\leqslant \ell - 1$. On procède par récurrence. A chaque étape le poids de l'intégrand croît, mais la dimension du domaine d'intégration décroît. A la dernière étape il nous reste des constantes dans $\mathcal{Z}$ de poids au plus $\ell + k$. Le Théorème 2.1 s'obtient en appliquant cet argument aux intégrales $I(\alpha)$.

Remarque 1. Pour que l'argument marche, il faut controler les singularités. La règle est que les fonctions à intégrer n'ont jamais de pôles sur le domaine d'intégration, mais *peuvent avoir des singularités logarithmiques* le long du bord. Il faut utiliser le fait miraculeux suivant : si P est la primitive d'une forme f qui a des singularités logarithmiques sur $\partial \overline{X}_{S,\delta}$, et si P n'a pas de pôles, alors P se prolonge continument sur $\overline{X}_{S,\delta}$ tout entier. Cela peut se voir immédiatement sur l'exemple $f = \log x \, dx$ sur $\{x\colon\ x > 0\}$, qui est singulier en 0. La primitive $P = x \log x - x$ est alors continue en 0.

Références

[1] F.C.S. Brown, Périodes des espaces des modules $\mathfrak{M}_{0,n}$ et valeurs zêta multiples, thèse de Doctorat, Univ. de Bordeaux 1, 2006.
[2] F.C.S. Brown, Polylogarithmes multiples uniformes en une variable, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 527–532.
[3] K.T. Chen, Extension of C^{∞} function algebra by integrals and Malcev completion of π_1^*, Adv. in Math. (2) 23 (1977) 181–210.
[4] P. Deligne, D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of a given genus, Publ. Math. IHES 36 (1969) 75–109.
[5] V.G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), Leningrad Math. J. 2 (4) (1991) 829–860.
[6] S. Fischler, Irrationalité de valeurs de zêta [d'après Apéry, Rivoal,...], Séminaire Bourbaki 2002–2003, Exposé 910, 2002.
[7] A.B. Goncharov, Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, preprint, 2001; arXiv: math.AG/0103059.
[8] A.B. Goncharov, Y.I. Manin, Multiple ζ-motives and moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, Compositio Math. 140 (2004) 1–14.
[9] R.M. Hain, Classical polylogarithms, Part 2, Proc. Sympos. Pure Math. 55 (1994).
[10] M.M. Kapranov, The permutoasssociahedron, MacLane's coherence theorem and asymptotic zones for the KZ equation, J. Pure Appl. Algebra 85 (1993) 119–142.
[11] V.G. Knizhnik, A.B. Zamolodchikov, Current algebras and Wess–Zumino models in two dimensions, Nucl. Phys. B 247 (1984) 83–103.
[12] S.A. Zlobin, Properties of coefficients of certain linear forms in generalized polylogarithms, preprint, 2005; arXiv: math.NT/0511245.
[13] T. Terasoma, Selberg integrals and multiple zeta values, Compos. Math 133 (1) (2002) 1–24.
[14] M. Waldschmidt, Valeurs zêtas multiples : une introduction, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 12 (2002) 581–595.