

# COMPOSITIO MATHEMATICA

PIERRETTE CASSOU-NOGUES

## **Sur la généralisation d'un théorème de Kouchnirenko**

*Compositio Mathematica*, tome 103, n° 1 (1996), p. 95-121

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1996\\_\\_103\\_1\\_95\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__103_1_95_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Sur la généralisation d'un théorème de Kouchnirenko

PIERRETTE CASSOU-NOGUES

Laboratoire de Mathématiques Pures, Université Bordeaux I, 33405 Talence Cedex, France

Received 14 June 1991; accepted in final form 8 May 1995

**Résumé.** Soit  $f$  un polynôme à  $k$  indéterminées, à coefficients dans un corps  $\mathcal{C}$ .

Dans [K], Kouchnirenko compare, dans le cas d'un polynôme commode, la somme des multiplicités des zéros communs isolés des dérivées partielles de  $f$  et le volume du polyèdre de Newton à l'infini de  $f$ . Dans l'article qui suit, nous supposons  $\mathcal{C} = \mathbb{C}$  et nous montrons ce que devient le théorème de Kouchnirenko, dans le cas des courbes si l'on supprime l'hypothèse commode.

**Key words:** polyèdre de Newton, nombre de Milnor

## 1. Introduction

Rappelons tout d'abord le théorème de Kouchnirenko.

Soit  $f \in \mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$  un polynôme à coefficients dans un corps  $\mathcal{C}$  à  $k$  indéterminées, on écrit  $f = \sum a_n x^n$  où  $x^n = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ . Posons

$$\text{Supp } f = \{n \in \mathbb{N}^k, a_n \neq 0\}.$$

On dit que  $f$  est *commode*, si pour tout  $i$ , il existe  $n_i \geq 1$  tel que  $(0, \dots, n_i, \dots, 0) \in \text{Supp } f$ . Notons encore  $\Gamma^\infty(f)$  l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\{0\} \cup \text{Supp } f$  dans  $\mathbb{R}_+^k$ . On appelle *frontière de Newton à l'infini* du polynôme  $f$ , notée  $\Gamma^\infty(f)$ , le polyèdre formé des faces fermées de  $\Gamma^\infty(f)$  qui ne passent pas par l'origine. On appelle *partie principale newtonienne à l'infini* du polynôme  $f$ , le polynôme

$$f^\infty = \sum_{n \in \Gamma^\infty(f)} a_n x^n.$$

On dit que la partie principale newtonienne à l'infini du polynôme  $f$  est *non dégénérée* si pour toute face  $\Delta$  de la frontière de Newton à l'infini, les polynômes

$$x_1 \frac{\partial f_\Delta}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f_\Delta}{\partial x_k}$$

n'ont pas de zéros communs sur  $(\bar{\mathcal{C}} - 0)^k$ .

Si  $g = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n$ , on note  $g_\Delta = \sum_{n \in k \cap \Delta} a_n x^n$ .

On définit le *nombre de Newton* d'un polyèdre compact  $S$  de  $\mathbb{R}_+^k$  par

$$V(S) = k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}V_1 + (-1)^k$$

où  $V_k$  est le volume de dimension  $k$  de  $S$  et pour  $1 \leq q \leq k-1$ ,  $V_q$  est la somme des volumes de dimension  $q$  des intersections de  $S$  avec tous les plans de coordonnées de dimension  $q$ . On note  $v(f) = V(\Gamma_-^\infty(f))$

On note

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}[x_1, \dots, x_k] \left/ \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right.$$

Kouchnirenko a démontré

THÉORÈME (de Kouchnirenko). Soit  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  un polynôme commode

(i) Si le corps  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos et de caractéristique nulle et si  $\mu(f)$  est fini alors

$$\mu(f) \leq v(f),$$

(ii) Si la partie principale newtonienne à l'infini du polynôme est non dégénérée, on a

$$\mu(f) = v(f).$$

Il est facile de trouver un contreexemple à la partie ii) de ce théorème lorsque  $f$  n'est pas commode:

$$f(x, y) = x^3y + x^8y^2 + x^2y^5 + xy^3.$$

On a  $v(f) = 38$  et  $\mu(f) = 36$ . (Calcul fait avec Alpi, Pise). Cependant, la partie (i) est encore vraie.

Soit  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  une application polynomiale. On sait qu'il existe un ensemble fini  $A$  de  $\mathbb{C}$  tel que  $\mathbb{C}^2 - f^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{C} - A$  soit une fibration localement triviale. Une fibre  $f^{-1}(c)$  telle que  $c \notin A$  est dite *régulière*.

Soit  $V$  une courbe algébrique réduite dans  $\mathbb{C}^2$ . Alors l'intersection de  $V$  avec une sphère  $\mathbb{S}^3$  suffisamment grande centrée à l'origine est un entrelacs, appelé *l'entrelacs à l'infini de  $V$* . Toutes les fibres régulières  $f^{-1}(c)$  définissent des entrelacs isotopiques, que l'on appelle *l'entrelacs à l'infini de  $f$* , noté  $L(f)$ . On appelle *surface de Seifert* d'un entrelacs  $L$ , toute sous variété différentiable de  $\mathbb{S}^3$  de dimension 2, compacte, orientée de bord  $L$ . Soit  $F$  une surface de Seifert de  $L$ . On note  $\chi(F)$  la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $F$  et

$$\chi_-(F) = \max(0, -\chi(F)).$$

On définit la *norme* de  $L$  par

$$\|L\| = \min(\chi_-(F) | F \text{ surface de Seifert de } L.)$$

Neumann [N], montre que si  $V$  est une fibre régulière (différente du plan et  $L(f)$  n'est pas le noeud trivial), alors

$$\|L(f)\| = -\chi(V).$$

D'autre part Kouchnirenko déduit du Théorème 1, que si  $f$  est commode et de partie newtonienne à l'infini non dégénérée, alors toute fibre régulière a le type d'homotopie d'un bouquet de  $v(f)$  sphères de dimension  $k - 1$ . On en déduit donc que si  $f$  est commode et de partie newtonienne à l'infini non dégénérée, alors

$$\|L(f)\| = v(f) - 1.$$

On peut énoncer maintenant la première généralisation du théorème de Kouchnirenko que nous proposons.

PROPOSITIONS 4 ET 5 (Section II). Soit  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  un polynôme tel que  $L(f)$  ne soit pas le noeud trivial, alors

$$(i) \quad \|L(f)\| \leq v(f) - 1.$$

(ii) Si la partie principale newtonienne à l'infini de  $f$  est non dégénérée

$$\|L(f)\| = v(f) - 1.$$

Pour énoncer la deuxième généralisation, nous devons introduire encore de nouvelles notations [B].

On introduit la compactification suivante de  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$ . Soit  $e: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  le plongement

$$x = (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1 : x_2 : \dots : x_k : 1) = (x : 1),$$

$$E: \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{P}^k \times \mathbb{C}$$

$$x \mapsto (e(x), f(x)).$$

$M$  la cloture de Zariski de  $E(\mathbb{C}^k)$  dans  $\mathbb{P}^k \times \mathbb{C}$  et  $p: M \rightarrow \mathbb{C}$  l'application  $(y, z) \rightarrow z$ . On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \xrightarrow{E} & M \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{C} \end{array}$$

L'application  $p: M \rightarrow \mathbb{C}$  est propre. On l'appelle une compactification de  $f$ . On écrit

$$f = f_d + f_{d-1} + \dots + f_0$$

où  $f_i$  est homogène de degré  $i$ . On définit

$$G(x, z, t) = f_d(x) + f_{d-1}(x)z + \cdots + f_0z^d - tz^d.$$

L'ensemble  $M$  est donné par

$$M = \{((x : z), t) \in \mathbb{P}^k \times \mathbb{C}, G(x, z, t) = 0\}$$

Le lieu singulier de  $M$  est donné par les équations

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial G}{\partial x_k} = \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

ou de façon équivalente

$$\frac{\partial f_d}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f_d}{\partial x_k} = f_{d-1} = z = 0. \quad (1)$$

Donc le lieu singulier est de la forme  $\Sigma \times \mathbb{C}$  où  $\Sigma$  est défini par (1). De plus, les points critiques de  $p: M - (\Sigma \times \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  sont de la forme  $(e(P), f(P))$  où  $P$  est un point critique de  $f$ .

Nous faisons l'hypothèse suivante:

(H)  $f$  n'a que des points critiques isolés et  $\Sigma$  est un ensemble fini.

Soit  $\tilde{\omega} \in \Sigma$ . Soit  $j$  tel que  $\tilde{\omega}$  appartienne à l'ensemble ouvert de  $\mathbb{P}^k$  défini par  $x_j \neq 0$ . On définit le polynôme à  $k$  variables,  $H_t$  par

$$H_t(Y_1, \dots, \check{Y}_j, \dots, Y_k, Z) = G(Y_1, \dots, Y_{j-1}, 1, Y_{j+1}, \dots, Y_k, Z, t).$$

Le point  $\tilde{\omega}$  détermine un point

$$(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_k, 0) \in \mathbb{C}^{k+1}.$$

Soit  $\omega = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, 0)$ . Par construction  $H_t(\omega) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{C}$ . De plus, pour tout  $t \in \mathbb{C}$ ,  $\omega$  est un point critique isolé de  $H_t$ . Alors, il existe  $N_\omega \geq 1$  tel que  $N_\omega \leq \mu_\omega(H_t) < \infty$  avec égalité, sauf pour un nombre fini de  $t \in \mathbb{C}$ . On pose

$$\lambda_\omega^t = \mu_\omega(H_t) - N_\omega,$$

$$\lambda^t = \sum_{\tilde{\omega} \in \Sigma} \lambda_\omega^t,$$

$$\lambda(f) = \sum_{t \in \mathbb{C}} \lambda^t.$$

Le théorème que nous démontrons est le suivant

**THÉORÈME 10** (Section III). *Soit  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  un polynôme avec seulement des points critiques isolés. Alors*

(i)

$$\mu(f) + \lambda(f) \leq v(f).$$

(ii) Si la partie newtonienne à l'infini du polynôme  $f$  est non dégénérée, on a

$$\mu(f) + \lambda(f) = v(f).$$

Le passage des Propositions 4 et 5 au Théorème 10 s'obtient en comparant un théorème de Broughton et un théorème de Neumann. Nous montrons encore:

**THÉORÈME 11 (Section III).** Soit  $f_s: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $s \in S$  une famille d'applications polynomiales, dont les coefficients dépendent rationnellement de  $s$  dans une variété algébrique  $S$ , telles que  $d = \deg f_s$ , pour tout  $s \in S$  et  $f_{s,d}$  et  $f_{s,d-1}$  soient indépendants de  $s \in S$ , alors  $\mu(f_s) + \lambda(f_s)$  est semi-continu inférieurement pour la topologie de Zariski.

Pour démontrer ce théorème nous utilisons la formule (Proposition 12): Soit  $c$  le nombre de nombre de points à l'infini de  $f$ , alors on a

$$d(d-3) = \mu(f) + \lambda(f) - 1 + \sum_{\bar{\omega} \in \Sigma} N_{\omega} - c.$$

Dans la partie II, nous faisons des rappels sur les diagrammes de Eisenbud et Neumann, qui nous permettent de démontrer les Propositions 4 et 5. Dans la partie III nous énonçons les théorèmes de Neumann et Broughton qui permettent de déduire le Théorème 10 des propositions précédentes et nous montrons le Théorème 11. A la fin de l'article, dans la partie IV, nous faisons quelques remarques concernant la dimension supérieure, ainsi que des conjectures.

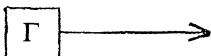
Je remercie vivement le referee de cet article pour l'avoir lu avec beaucoup de soins, et avoir remarqué une faute dans la première version.

## 2. Diagrammes de Eisenbud et Neumann

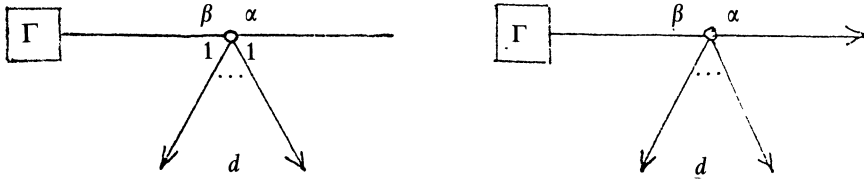
L'essentiel de ce paragraphe se trouve dans [EN] et [N]. Soit  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  une application polynomiale. Nous considérons l'entrelacs à l'infini de  $f$ , c'est à dire l'entrelacs à l'infini d'une fibre quelconque régulière. Cet entrelacs peut se représenter par un diagramme de Eisenbud et Neumann.

Étant donnée une composante  $K$  d'un entrelacs  $\mathcal{L} = (\mathbb{S}^3, L)$ , soit  $N(K)$  un tore fermé voisinage de  $K$  disjoint de toutes les autres composantes de  $L$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres entiers positifs premiers entre eux. Un  $(\alpha, \beta)$  cablage sur  $K$  est une courbe, fermée, simple, sur  $\partial N(K)$ , homologique dans  $N(K)$  avec  $\alpha K$  et ayant un nombre d'enlacement égal à  $\beta$  avec  $K$ . Plusieurs  $(\alpha, \beta)$  cablages sur  $K$  sont parallèles s'ils sont sur le même  $\partial N(K)$  et sont deux à deux disjoints. Une opération de  $(\alpha, \beta)$  cablage sur  $K$  consiste soit à remplacer, soit à ajouter  $d(\alpha, \beta)$  câbles parallèles sur  $K$ , pour obtenir un nouvel entrelacs [N].

Si



est le diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs  $\mathcal{L}$  et la flèche correspond à la composante  $K$ , alors les diagrammes

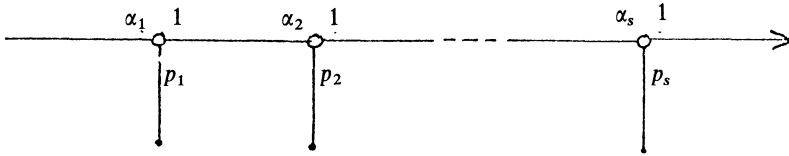


représentent le résultat d'une opération de  $(\alpha, \beta)$  cablage sur  $K$ . Les flèches représentent les composantes de l'entrelacs obtenu.

Si  $f: (\mathbb{C}^2, 0) \mapsto (\mathbb{C}, 0)$  est un germe de courbe plane, l'intersection de  $f^{-1}(0)$  avec une petite sphère de rayon  $\epsilon$  centrée l'origine est un entrelacs appelé *entrelacs algébrique* de  $f$ . Son diagramme de Eisenbud et Neumann, s'obtient de la façon suivante: Si l'on a une seule branche, on écrit son développement de Puiseux sous la forme

$$y = x^{q_1/p_1}(a_1 + x^{q_2/p_1 p_2}(a_2 + \dots + (a_{s-1} + a_s x^{q_s/p_1 p_2 \dots p_s}) \dots)).$$

L'entrelacs algébrique correspondant a pour diagramme



avec

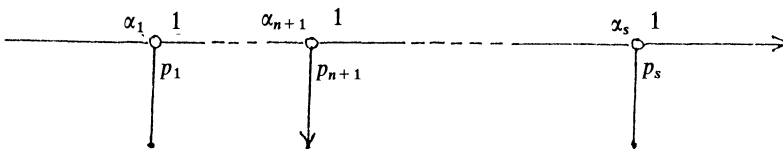
$$\alpha_1 = q_1, \quad \alpha_{j+1} = q_{j+1} + p_j p_{j+1} \alpha_j, \quad j \geq 1.$$

Si l'on a une autre branche

$$y = x^{q'_1/p'_1}(a'_1 + x^{q'_2/p'_1 p'_2}(a'_2 + \dots + (a'_{r-1} + a'_r x^{q'_r/p'_1 p'_2 \dots p'_r}) \dots)),$$

on suppose que pour  $i \leq n$ ,  $p'_i = p_i$ ,  $q'_i = q_i$  et  $a'_i = a_i$ . On a trois cas à considérer.

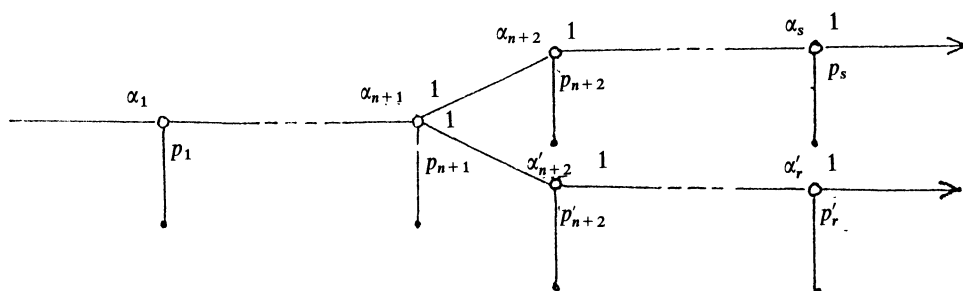
Tout d'abord, si  $n = r$  ou  $n = s$ , on a le diagramme:



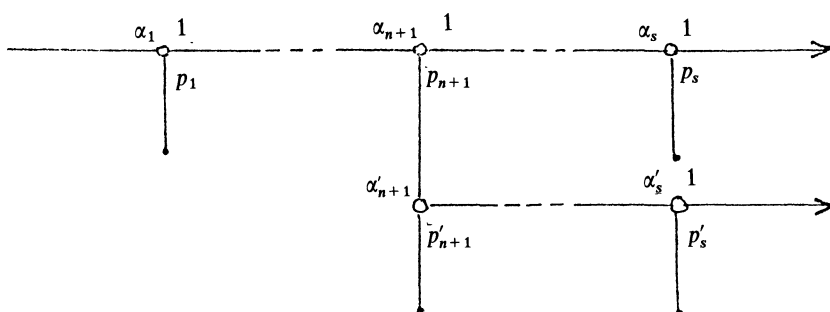
Si  $r > n$  et  $s > n$ , et

$$q_{n+1}/p_{n+1} = q'_{n+1}/p'_{n+1}$$

on a



Sinon,  $q_{n+1}/p_{n+1} \leq q'_{n+1}/p'_{n+1}$ , dans ce cas, on a



Si l'on a une troisième branche, on procède de la même façon en tenant compte des 2 branches précédentes. Si  $f = f_1^{m_1} f_2^{m_2} \dots f_r^{m_r}$ , on obtient un multientrelacs que l'on représente à partir des précédents en mettant  $(m_i)$  en face de la flèche correspondante. Si maintenant, on considère une singularité qui n'est pas à l'origine, on fait un changement de variable pour s'y ramener.

Pour l'entrelacs à l'infini de  $f$ , on considère les zéros de la forme homogène de plus haut degré de  $f$ . Pour chacun de ces zéros  $(a_i, b_i)$ , on considère le diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs algébrique de  $F(x, 1, z)$  au point  $(a_i/b_i, 0)$ , si  $b_i$  est non nul, ou  $F(1, y, z)$  au point  $(0, 0)$ , si  $b_i = 0$ , où,  $F(x, y, z)$  est le polynôme homogène tel que  $F(x, y, 1) = f(x, y)$ . On écrit les mêmes diagrammes de Eisenbud et Neumann en remplaçant  $(p_1, \alpha_1)$  par  $(p_1, p_1 - \alpha_1)$  et  $(p_i, \alpha_i)$  par  $(p_i, p_1^2 p_2^2 \dots p_{i-1}^2 p_i - \alpha_i)$ . On cable ensuite les diagrammes obtenus par les composantes convenables.

#### EXEMPLE 1.

$$f(x, y) = x^5 + x^4 y^3 + x^2 y^5 + y^4,$$

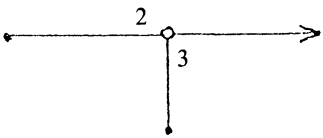
$$x^4 y^3 + x^2 y^5 = x^2 y^3 (x + iy)(x - iy).$$



On a donc 4 zéros:  $(i, 1), (-i, 1), (0, 1), (1, 0)$ . Les points  $(i, 0)$  et  $(-i, 0)$  sont des points lisses de

$$F(x, 1, z) = x^5 z^2 + x^4 + x^2 + z^3.$$

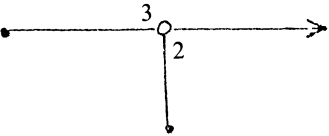
Le point  $(0, 0)$  est un point singulier de  $F(1, y, z)$  dont l'entrelacs algébrique a pour diagramme



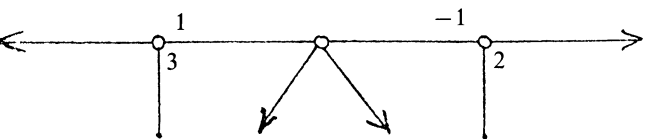
et le point  $(0, 0)$  est un point singulier de

$$F(x, 1, z) = x^5 z^2 + x^4 + x^2 + z^3$$

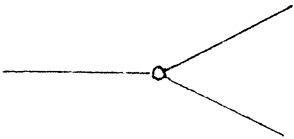
avec pour diagramme algébrique



Le diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs à l'infini de  $f$  est



On obtient des *diagrammes minimaux* [EN] en  
(1) enlevant tout coté de la forme



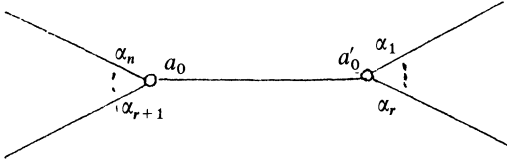
ainsi que le sommet à sa gauche.

(2) Remplaçant deux cotés

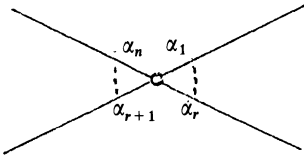
par un seul et en supprimant le sommet



(3) remplaçant



où  $a_0 a'_0 - \alpha_1 \cdots \alpha_r \alpha_{r+1} \cdots \alpha_n = 0$  par



Lorsque l'on a une seule branche, et que l'on rend le diagramme minimal, il ne reste que les sommets où les  $p_i$  sont différents de 1, c'est à dire ceux qui correspondent aux paires caractéristiques. Par contre dans le cas de plusieurs branches, il n'y a pas que les paires caractéristiques qui interviennent, il y a aussi les exposants de coïncidence où les branches se séparent.

On considère toujours des diagrammes minimaux.

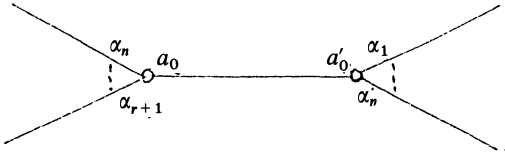
On a deux types de sommets, les flèches et les autres. On note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des flèches et  $\mathcal{V}$  l'ensemble des sommets qui ne sont pas des flèches. Pour chaque élément  $v \in \mathcal{V}$ , on note  $\delta_v$  le nombre de cotés qui convergent vers  $v$ . On remarque que si  $\delta_v \neq 1$  alors  $\delta_v \geq 3$ . On note  $\mathcal{N}$  l'ensemble des sommets  $v \in \mathcal{V}$  tels que  $\delta_v \geq 3$ .

A chaque  $v \in \mathcal{V}$ , on associe une *composante virtuelle*  $[N]$  (encore appelée *compagnon intrinsèque* [LMW]), notée  $S_v$ . On note alors  $l_v = \mathcal{L}(S_v, L)$  le coefficient d'enlacement de cette composante virtuelle avec l'entrelacs  $L$ . On calcule ces coefficients de la façon suivante:

LEMME 1 ([EN] Section 10). *Le coefficient d'enlacement d'une composante avec une composante de multiplicité  $m$  de l'entrelacs est le produit de tous les entiers adjacents au chemin du diagramme qui joint ces composantes (qui ne sont pas sur le chemin) et de  $m$ .*

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des cotés du diagramme qui joignent deux sommets  $v \in \mathcal{N}$ . Si  $C \in \mathcal{C}$ , on définit son déterminant

$$\Delta_C = a_0 a'_0 - \alpha_1 \cdots \alpha_s.$$



On a

LEMME 2 [N]. Si  $K$  est l'entrelacs à l'infini d'une courbe, alors pour tout coté  $C$  de son diagramme de Eisenbud et Neumann, on a  $\Delta_C < 0$ .

Pour  $C \in \mathcal{C}$ , et  $w \in \mathcal{F}$ , on note  $\sigma_{C,w}$  le chemin qui relie  $C$  à  $w$ . On note  $l_{C,w}$  le produit des entiers adjacents à  $\sigma_{C,w}$  qui ne sont pas sur  $\sigma_{C,w}$ . On note  $w_1, \dots, w_t$  les flèches qui se trouvent du côté d'une extrémité de  $C$  et  $w_{t+1}, \dots, w_n$ , celles qui se trouvent du côté de l'autre extrémité de  $C$ . On définit

$$m_C = m_1 l_{C,w_1} + \dots + m_t l_{C,w_t},$$

$$m'_C = m_{t+1} l_{C,w_{t+1}} + \dots + m_n l_{C,w_n}$$

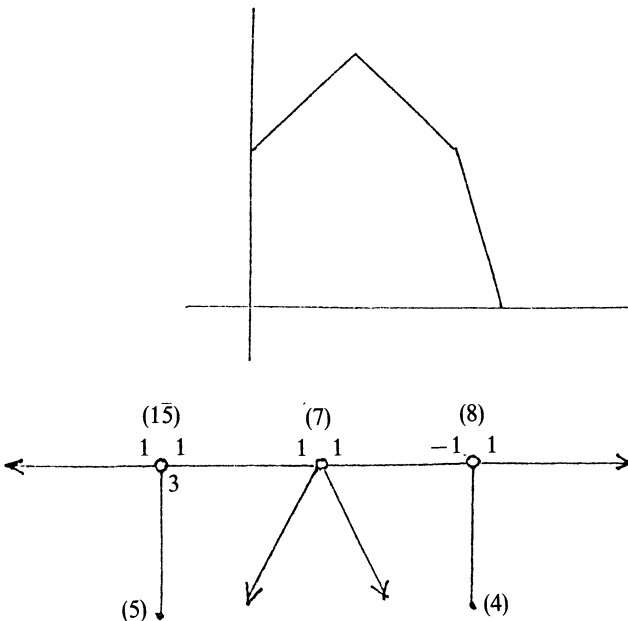
et

$$d_C = \gcd(m_C, m'_C).$$

On peut montrer que si l'on casse le diagramme de Eisenbud et Neumann le long de  $C$  en attribuant aux flèches ainsi formées les multiplicités  $m_C$  et  $m'_C$  on obtient deux multientrelacs dont les sommets  $v$ , ont toujours le même coefficient  $l_v$  et on a des propriétés d'additivité, en particulier, la norme de l'entrelacs est égale à la somme des normes des multientrelacs ainsi obtenus [EN, Chapitre 1, (1, 2)].

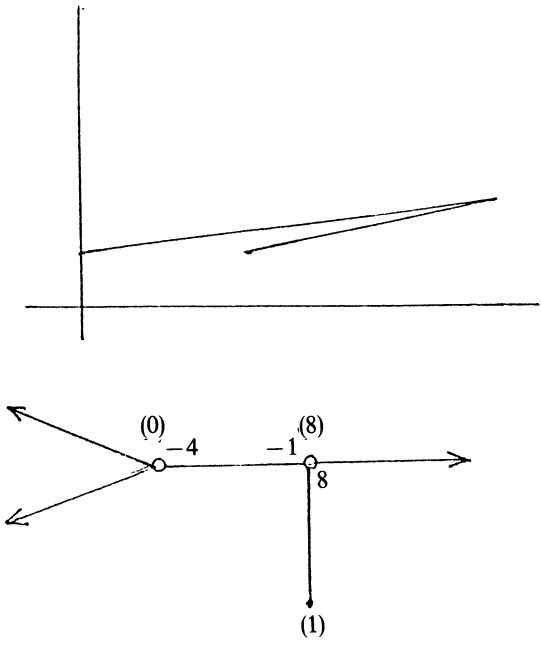
EXEMPLE 1.

$$f(x, y) = x^5 + x^4 y^3 + x^2 y^5 + y^4$$



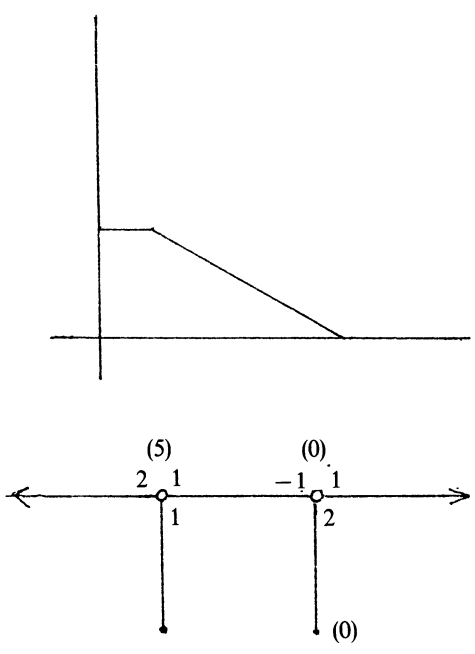
EXEMPLE 2.

$$f(x, y) = y + x^3y + x^8y^2$$



EXEMPLE 3.

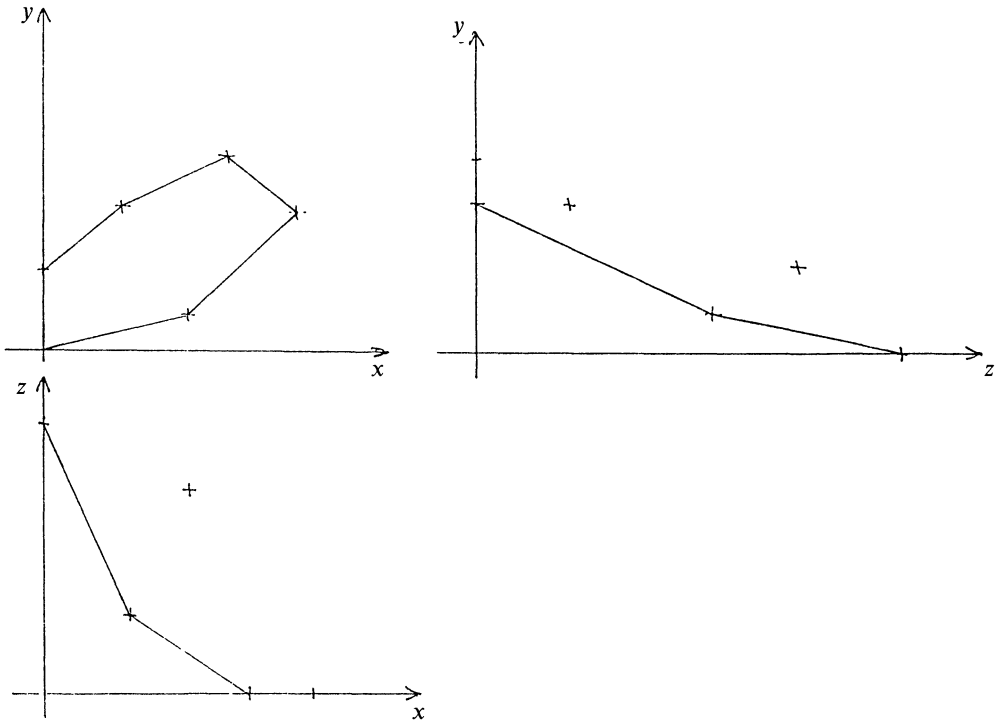
$$f(x, y) = x(x^2 + y)^2 + y^2 + 2x^2y + x^4 + x^2 + y$$



Les nombres entre parenthèses sur les diagrammes sont les  $l_v$ .

Examinons le lien entre l'entrelacs à l'infini de  $f$  et le polygone de Newton à l'infini de  $f$ ,  $\Gamma_{\infty}^-(f)$ , lorsque  $f$  est non dégénéré. On note  $\mathcal{F}_N$  la face de  $\Gamma_{\infty}^-(f)$ , qui correspond aux monômes de plus haut degré de  $f$ . Soit  $\Gamma_{(0,1,0)}$  la partie de  $\Gamma_{\infty}^-(f)$  qui se trouve au dessus de  $\mathcal{F}_N$ , et  $\Gamma_{(1,0,0)}$  celle qui se trouve au dessous.

**PROPOSITION 3.** *Chaque face de  $\Gamma_{(1,0,0)}$  (resp.  $\Gamma_{(0,1,0)}$ ) est en bijection avec une face du polygone de Newton à l'origine de  $F(1, y, z)$  (resp.  $F(x, 1, z)$ ). Soient  $\beta^1$  et  $\beta^2$  deux sommets de  $\Gamma_{(0,1,0)}$ . On suppose  $\beta_1^2 - \beta_1^1 > 0$ . On a  $\Delta =$*



$\beta_2^2 \beta_1^1 - \beta_1^2 \beta_2^1 < 0$ . La droite passant par  $\beta^1$  et  $\beta^2$  a pour équation

$$\frac{(\beta_2^2 - \beta_2^1)x}{\Delta} + \frac{(\beta_1^1 - \beta_1^2)y}{\Delta} = 1.$$

Puisque c'est une face de  $\Gamma_{\infty}^-(f)$ , les points  $(\alpha_1, \alpha_2)$  de  $\text{Supp } f$  vérifient

$$(1) \quad (\beta_2^1 - \beta_2^2)\alpha_1 + (\beta_1^2 - \beta_1^1)\alpha_2 + \Delta \leq 0.$$

On a

$$F(x, 1, z) = \sum a_{\alpha} x^{\alpha_1} z^{N - \alpha_1 - \alpha_2}.$$

Ce polynôme contient les monômes  $x^{\beta_1^1} z^{N-\beta_1^1-\beta_2^1}$  et  $x^{\beta_1^2} z^{N-\beta_1^2-\beta_2^2}$ . La droite passant par les points  $(\beta_1^2, N - \beta_1^2 - \beta_2^2)$  et  $(\beta_1^1, N - \beta_1^1 - \beta_2^1)$  a pour équation

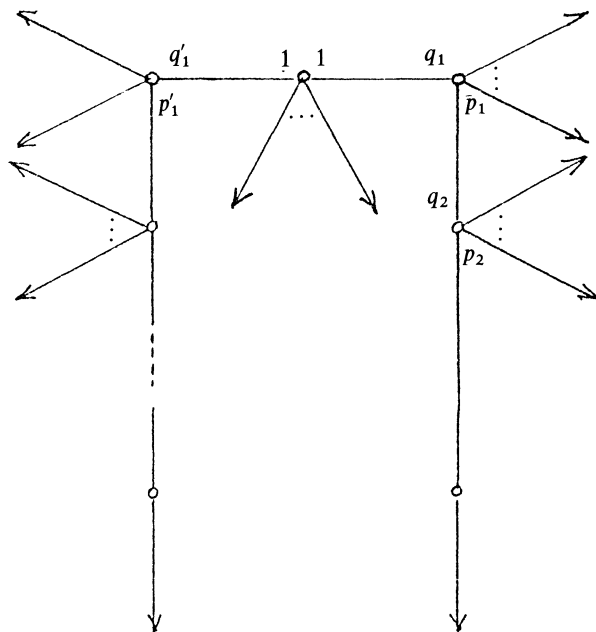
$$\frac{(\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_1^1 - \beta_2^1)x}{N(\beta_1^2 - \beta_1^1) + \Delta} + \frac{(\beta_1^2 - \beta_1^1)y}{N(\beta_1^2 - \beta_1^1) + \Delta} = 1$$

L'égalité (1) montre que c'est une face du polygone de Newton à l'origine de  $F(x, 1, z)$ . On fait le même raisonnement avec  $\Gamma_{(1,0,0)}$ .

**PROPOSITION 4.** *Si la partie principale newtonienne à l'infini est non dégénérée, alors*

$$\|L(f)\| = v(f) - 1.$$

*Preuve.* En utilisant la proposition précédente, on voit que si la partie principale newtonienne de  $f$  à l'infini est non dégénérée, le diagramme de Eisenbud et Neumann est de la forme où chaque sommet de valence supérieure où égale à 3



correspond à une face du polygone de Newton, et le nombre  $k_\sigma$  de flèches issues d'un sommet est égal au nombre de points à coordonnées entières sur la face correspondante, moins un. Soit  $\sigma$  une face de  $\Gamma_\infty^-(f)$ , on note  $v_{0,\sigma}$  le sommet correspondant à  $\sigma$ . Si la face  $\sigma$  a pour équation  $q_\sigma x + p_\sigma y = \Delta_\sigma$ , avec  $(q_\sigma, p_\sigma) = 1$  on a  $l_{v_{0,\sigma}} = \Delta_\sigma$ . Si la face  $\sigma$  passe par l'origine, il lui correspond, soit un sommet de valence 1, si la face est sur un axe et  $l_{v_{0,\sigma}} = a$  (resp.  $b$ ) où le nombre  $a$  (resp.  $b$ ) représente l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point d'intersection du polygone de Newton avec

l'axe des  $x$  (resp.  $y$ ). Si la face  $\sigma$  passe par l'origine, mais n'est pas sur un axe, il lui correspond une flèche avec une certaine multiplicité et  $l_{v_0, \sigma} = 0$  [CN]. Pour la face  $\sigma$ ,  $k_\sigma \Delta_\sigma$  représente l'aire du parallélogramme de sommet l'origine et de diagonale  $\sigma$ . Donc

$$v(f) = \sum_{\sigma} k_{\sigma} \Delta_{\sigma} - a - b + 1.$$

D'autre part, le Théorème 11.1 de [EN] dit que

$$\|L(f)\| = \sum (\delta_v - 2) l_v$$

la somme étant prise sur tous les éléments de  $\mathcal{V}$ . La proposition est ainsi démontrée. Les Exemples 1 et 2 illustrent les faits qui sont rappelés ici.

PROPOSITION 5.

$$\|L(f)\| \leq v(f) - 1.$$

La preuve de cette proposition repose sur le lien qui existe entre la norme de l'entrelacs à l'infini de  $f$  et les normes des entrelacs algébriques des points singuliers à l'infini. Considérons une courbe régulière. Ecrivons

$$f_d = x^{n_1} y^{n_2} \prod_{i=3}^e (a_i x + b_i y)^{n_i}$$

où  $f_d$  est la forme homogène de plus grand degré de  $f$ . avec  $a_i \neq 0$ ,  $b_i \neq 0$ ,  $(a_i/b_i) \neq (a_j/b_j)$ . Le nombre de points à l'infini de  $f$  est le nombre de  $i \in \{1, 2, \dots, e\}$  tels que  $n_i$  est non nul. L'ensemble  $\Sigma$  est contenu dans

$$\{(0, 1, 0)\} \cup \{(1, 0, 0)\} \cup_{i=3}^e \{(b_i, -a_i, 0)\}.$$

Considérons l'entrelacs algébrique,  $L'_1$ , correspondant à  $(0, 1, 0)$ ,  $L'_2$ , correspondant à  $(1, 0, 0)$  et  $L'_i$  celui correspondant à  $(b_i, -a_i, 0)$ . Ces entrelacs peuvent correspondre au noeud trivial. On pose pour le noeud trivial  $\|L\| = -1$ .

LEMME 6.

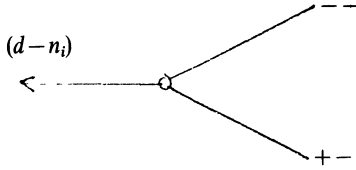
$$\|L(f)\| + \sum_i \|L'_i\| = d(d-3).$$

La preuve de ce lemme repose sur le lemme suivant. On note  $l_v$  la multiplicité d'un sommet dans l'entrelacs à l'infini, et  $l'_v$  la multiplicité du sommet correspondant dans l'entrelacs algébrique. On note  $\rho_v = p_1 p_2 \cdots p_v$

LEMME 7 [LN]. *Pour tout sommet  $v$  de rupture*

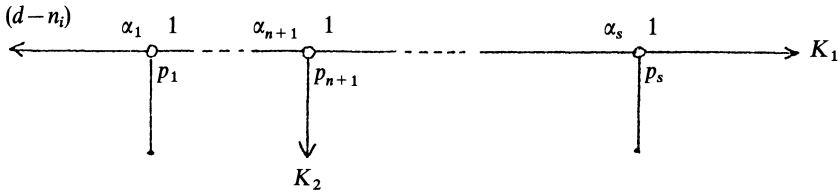
$$l_v + l'_v = \rho_v d$$

*Preuve du Lemme 7.* On sépare l'entrelacs l'infini en multientrelacs  $L_i$  correspondant à chaque entrelacs algébrique.



Un sommet de l'entrelacs algébrique  $L'_i$  devient un flèche de l'entrelacs  $L_i$  avec multiplicité  $d - n_i$ . On appelle ce sommet la racine de  $L'_i$  et on le note  $r$ .

Nous avons trois configurations possibles entre deux composantes d'un entrelacs  $L_i$ .



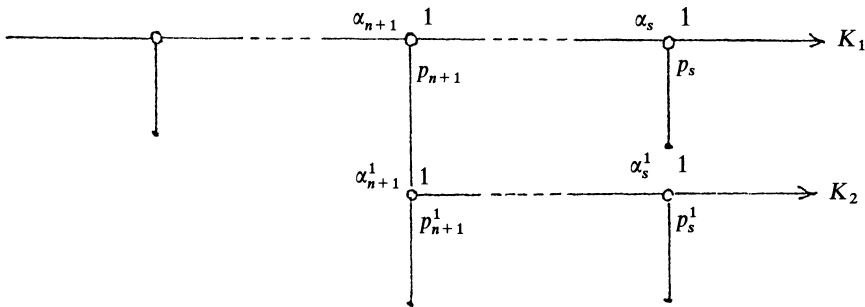
$$\mathcal{L}(K'_1, K'_2) = p_s \cdots p_{n+2} \alpha_{n+1},$$

$$\mathcal{L}(K_1, K_2) = p_s \cdots p_{n+2} (p_{n+1} p_n^2 \cdots p_1^2 - \alpha_{n+1}),$$

$$\mathcal{L}(K_1, K_2) = p_1 \cdots p_s p_1 \cdots p_n - p_s \cdots p_{n+2} \alpha_{n+1}.$$

On trouve donc

$$\mathcal{L}(K'_1, K'_2) + \mathcal{L}(K_1, K_2) = \rho_{K_1} + \rho_{K_2},$$



$$\mathcal{L}(K'_1, K'_2) = p_s \cdots p_{n+2} \alpha_{n+1} p_{n+1}^1 \cdots p_1^1,$$

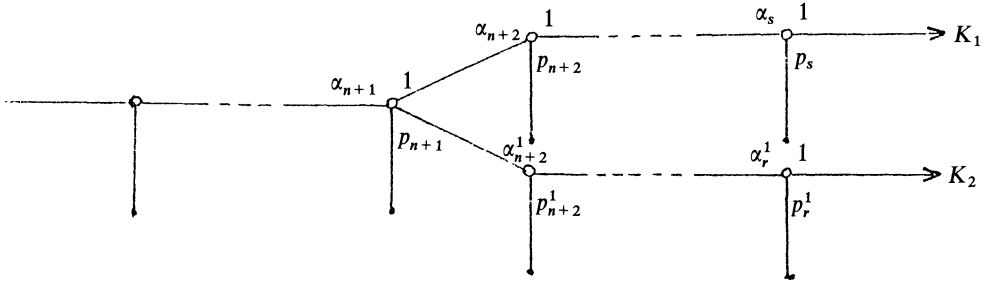
$$\mathcal{L}(K_1, K_2) = p_s \cdots p_{n+2} (p_{n+1} p_n^2 \cdots p_1^2 - \alpha_{n+1}) p_{n+1}^1 \cdots p_1^1.$$



On a encore

$$\mathcal{L}(K'_1, K'_2) + \mathcal{L}(K_1, K_2) = \rho_{K_1} + \rho_{K_2}.$$

Troisième cas:



$$\mathcal{L}(K'_1, K'_2) = p_s \cdots p_{n+2} p_{n+1} p_{n+2}^1 \cdots p_r^1 \alpha_{n+1},$$

$$\mathcal{L}(K_1, K_2) = p_s \cdots p_{n+2} p_{n+1} p_{n+2}^1 \cdots p_r^1 (p_{n+1} p_n^2 \cdots p_1^2 - \alpha_{n+1}),$$

$$\mathcal{L}(K'_1, K'_2) + \mathcal{L}(K_1, K_2) = \rho_{K_1} + \rho_{K_2}.$$

Soit  $v$  un sommet de  $L_i$ . On a

$$l_v = \sum \mathcal{L}(S_v, K) + (d - n_i) \rho_v$$

où la somme est prise sur toutes les composantes  $K$  de l'entrelacs  $L_i$  auquel appartient le sommet  $v$ .

$$l'_v = \sum \mathcal{L}(S'_v, K').$$

où la somme est prise sur toutes les composantes  $K'$  de l'entrelacs  $L'_i$ .

$$l_v + l'_v = \rho_v \sum \rho_K + (d - n_i) \rho_v.$$

Or  $\sum \rho_K = n_i$ . On a donc bien  $l_v + l'_v = \rho_v d$  pour tous les sommets qui sont des sommets de rupture (c'est à dire tels que  $\delta_v \geq 3$ ).

Pour les sommets qui ne sont pas des sommets de rupture, pour  $L_i$  ou  $L'_i$ , on a  $l_v = l_{v^a} / n_{v^a}$  où  $v^a$  est le sommet de rupture adjacent à  $v$  et  $n_{v^a}$  le nombre sur le coté qui joint  $v$  à  $v^a$ . Donc pour les sommets qui ne sont pas des sommets de rupture, on a

$$l_v + l'_v = d \rho_{v^a} / n_{v^a}.$$

Enfin  $L'_i$  a un sommet qui devient une flèche dans  $L_i$ : on a  $l'_v = n_i$ .

*Preuve du lemme 6.*

$$\|L'_i\| = \sum_{v|\delta_v \geq 3} l'_v(\delta_v - 2) - \sum_{v|\delta_v=1, v \neq r} l'_v/\rho_v - n_i,$$

$$\sum_i \|L'_i\| = \sum_i \left( \sum_{v|\delta_v \geq 3} l'_v(\delta_v - 2) - \sum_{v|\delta_v=1, v \neq r} l'_v/p_v \right) - \sum_i n_i,$$

$$\|L(f)\| = d(c - 2) + \sum_i \left( \sum_{v|\delta_v \geq 3} l_v(\delta_v - 2) - \sum_{v|\delta_v=1, v \neq r} l_v/p_v \right),$$

$$\begin{aligned} \|L(f)\| + \sum_i \|L'_i\| &= d(c - 3) + \sum_i \left( \sum_{v|\delta_v \geq 3} \rho_v(\delta_v - 2) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{v|\delta_v=1, v \neq r} \rho_v/p_v \right) d \end{aligned}$$

et

$$\sum_i \left( \sum_{v|\delta_v \geq 3} \rho_v(\delta_v - 2) - \sum_{v|\delta_v=1, v \neq r} \rho_v/p_v \right) = d - c.$$

On trouve finalement

$$\|L(f)\| + \sum_i \|L'_i\| = d(d - 3).$$

*Preuve de la Proposition 5.* Si le polygone de Newton de  $f$  est non dégénéré, alors  $n_i = 1$ , pour  $i = 3, \dots, e$ , donc les points  $(-b_i, a_i, 0)$  sont non singuliers, et les points  $(0, 1, 0)$  et  $(1, 0, 0)$  ont des singularités non dégénérées d'après la Proposition 3. Si maintenant le polygone de Newton de  $f$  est dégénéré, alors les points  $(-b_i, a_i, 0)$  peuvent devenir singuliers, et les points  $(0, 1, 0)$  et  $(1, 0, 0)$  peuvent avoir des singularités dégénérées. Donc les nombres de Milnor locaux de ces points vont augmenter, c'est à dire que les normes des entrelacs algébriques vont augmenter, et la norme de l'entrelacs à l'infini va diminuer. Compte tenu de la Proposition 4, on a la Proposition 5.

On pouvait démontrer directement la Proposition 5, en utilisant les inégalités de Puiseux inverses satisfaites par les coefficients sur les diagrammes de Eisenbud et Neumann à l'infini, mais la démonstration est très technique.

### 3. Démonstration des Théorèmes 10 et 11

Enonçons tout d'abord un théorème de Neumann et un théorème de Broughton, que nous utilisons dans la suite.

**THÉORÈME 8 [N].** *Si  $V \subset \mathbb{C}^2$  est une courbe plane réduite et non singulière, et si  $\Omega$  est le diagramme minimal de son entrelacs à l'infini, alors*

$$\chi(V) = \sum (2 - \delta_v) l_v,$$

*la somme étant prise sur les sommets  $v$  de  $\Omega$  qui ne sont pas des flèches*

On remarque que si  $V$  est une fibre régulière de  $f$  (différente du plan et  $L(f)$  n'est pas le noeud trivial), alors

$$\chi(V) = -\|L(f)\|.$$

Nous reprenons les notations de l'introduction.

**THÉORÈME 9 [B].** *Soit  $f: \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme avec seulement des points critiques isolés, tel que (1) n'ait qu'un nombre fini de solutions dans  $\mathbb{P}^{k+1}$ . Soit  $\lambda$  et  $\lambda^c$  définis comme précédemment, et  $\mu$  le nombre de Milnor total de  $f$ . Alors si  $f^{-1}(c)$  est régulière, on a*

$$\tilde{H}_k(f^{-1}(c)) = \mathbb{Z}^{\mu+\lambda},$$

$$\tilde{H}_q(f^{-1}(c)) = 0,$$

*si  $q \neq k$ .*

Soit  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  un polynôme avec seulement des singularités isolées. Alors, comme le fait remarquer Broughton, (1) n'a qu'un nombre fini de solutions dans  $\mathbb{P}^2$ . Soit  $V = f^{-1}(c)$  une fibre régulière de  $f$ . On déduit alors des Théorèmes 8 et 9, que

$$\|L(f)\| = (\mu + \lambda) - 1.$$

*Remarque.* (1) Cette dernière formule est très utile [ACL]. En effet dans cet article, on se place dans une famille où  $\|L(f)\|$  est constant, et on cherche des polynômes sans points critiques dans la famille. Cela revient à trouver des polynômes tels que  $\lambda = \|L(f)\| + 1$ .

(2) En fait ce que l'on utilise ici du théorème de Broughton se trouve dans Suzuki [S, Corollaire 3].

Alors la Proposition 5 permet de démontrer

**THÉORÈME 10.** *Soit  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  un polynôme avec seulement des points critiques isolés. Alors*

(i)

$$\mu(f) + \lambda(f) \leq v(f).$$

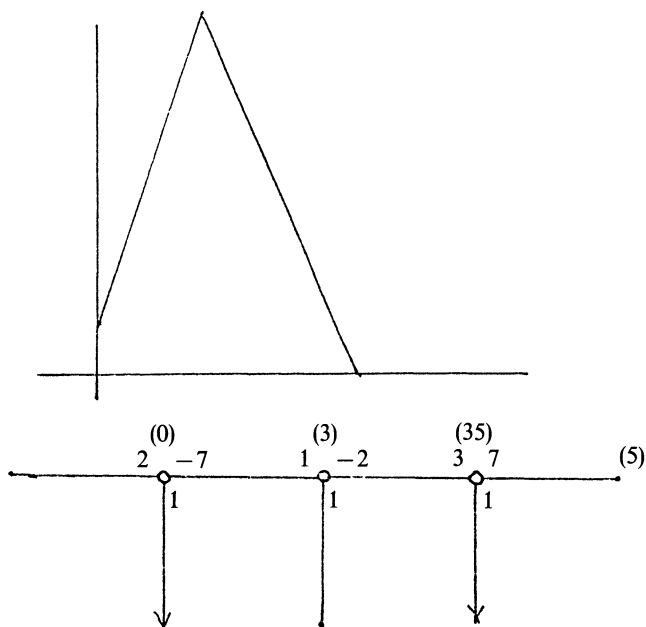
(ii) Si la partie newtonienne à l'infini du polynôme est non dégénérée, on a

$$\mu(f) + \lambda(f) = v(f).$$

*Remarque.* Ce résultat est plus fort que le Théorème 1, dû à Kouchnirenko, dans le cas commode comme l'illustre l'exemple suivant.

EXEMPLE 4 (Luengo [L]).

$$f(x, y) = y(xy^3 + 1)^2 + x^6,$$



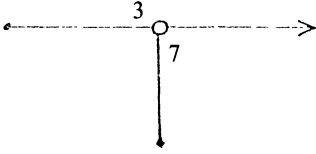
$$v(f) = 38, \mu(f) = 19, \lambda(f) = 18.$$

En effet, on a

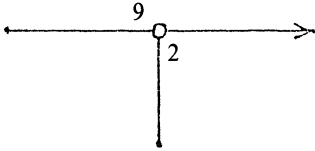
$$f'_x = 2y^4(xy^3 + 1) + 6x^5,$$

$$f'_y = (xy^3 + 1)(7xy^3 + 1).$$

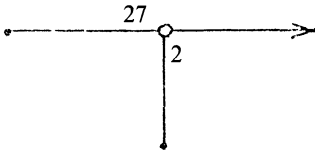
La seule solution possible est  $x = -1/7y^3$  et on obtient  $y^{19} = 1/4802$ . Le calcul du Hessien montre que ces points sont non dégénérés. Donc on a bien  $\mu(f) = 19$ . Soit  $F_t(x, y, z) = y(xy^3 + z^4)^2 + x^6z^3 + tz^9$ . On a deux points singuliers à l'infini. Pour le point  $(1, 0, 0)$ , la singularité ne dépend pas de  $t$ . L'entrelacs algébrique a pour diagramme



Pour le point  $(0, 1, 0)$ , la singularité dépend de  $t$ . Si  $t \neq 0$  l'entrelacs algébrique est



si  $t = 0$ , il est



Le nombre de Milnor local est 7 si  $t \neq 0$  et 25 si  $t = 0$ . Donc  $\lambda(f) = 18$ .

Luengo utilise ce polynôme pour montrer que pour les surfaces la strate à  $\mu$  constant n'est pas toujours lisse. Pour les exemples précédents, on trouve

Exemple 1:

$$v(f) = 23, \mu(f) = 23, \lambda(f) = 0.$$

Exemple 2:

$$v(f) = 8, \mu(f) = 6, \lambda(f) = 2.$$

Exemple 3:

$$v(f) = 6, \mu(f) = 0, \lambda(f) = 1.$$

**THÉORÈME 11.** Soit  $f_s : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, s \in \mathbb{C}$  une famille d'applications polynomiales, dont les coefficients dépendent rationnellement de  $s$  dans une variété algébrique  $S$ , telles que  $d = \deg f_s$ , pour tout  $s \in S$  et  $f_{s,d}$  et  $f_{s,d-1}$  soient indépendants de  $s \in S$ , alors  $\mu(f_s) + \lambda(f_s)$  est semi-continu inférieurement pour la topologie de Zariski.

La démonstration du Théorème 11 repose sur une formule qui exprime  $\mu(f) + \lambda(f)$  en fonction de nombres de Milnor locaux. Cette formule est la suivante:

**PROPOSITION 12.** *Soit  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  une application polynomiale. Alors*

$$\sum_{\tilde{\omega} \in \Sigma} N_{\omega} - c + \mu(f) + \lambda(f) - 1 = d(d-3)$$

où  $c$  est le nombre de points à l'infini de  $f$ .

*Preuve.* Considérons une courbe régulière. Ecrivons

$$f_d = x^{n_1} y^{n_2} \prod_{i=3}^e (a_i x + b_i y)^{n_i}$$

avec  $a_i \neq 0$ ,  $b_i \neq 0$ ,  $(a_i/b_i) \neq (a_j/b_j)$ . Le nombre de points à l'infini de  $f$  est le nombre de  $i \in \{1, 2, \dots, e\}$  tels que  $n_i$  est non nul. L'ensemble  $\Sigma$  est contenu dans

$$\{(0, 1, 0)\} \cup \{(1, 0, 0)\} \cup_{i=3}^e \{(b_i, -a_i, 0)\}.$$

Considérons l'entrelacs algébrique,  $L'_1$ , correspondant à  $(0, 1, 0)$ ,  $L'_2$ , correspondant à  $(1, 0, 0)$  et  $L'_i$  celui correspondant à  $(b_i, -a_i, 0)$ . Ces entrelacs peuvent correspondre au noeud trivial. On pose pour le noeud trivial  $\|L\| = -1$ . Alors

$$\sum_{i, n_i \neq 0} \|L'_i\| = \sum_{\tilde{\omega} \in \Sigma} N_{\omega} - c.$$

D'autre part, l'entrelacs à l'infini est construit à partir de ces entrelacs algébriques et

$$\|L(f)\| = \mu(f) + \lambda(f) - 1.$$

Il suffit d'appliquer le Lemme 7.

On peut en déduire le Théorème 11. En effet sous les hypothèses du Théorème 11,  $\Sigma$  est fixe et  $d(d-3)$  aussi. Les nombres de Milnor  $N_{\omega}$  sont semi-continus supérieurement, donc  $\mu(f) + \lambda(f)$  est semi-continu inférieurement. Il serait intéressant de trouver une description algébrique de ce nombre, comme dimension d'un certain espace.

#### 4. Remarques

On dit qu'un polynôme est *modéré* [B], si il existe un voisinage compact  $U$  des points critiques de  $f$  tel que  $\|\text{grad}(f)(x)\|$  soit borné inférieurement par un nombre strictement positif sur  $\mathbb{C}^k - U$ . Un polynôme modéré n'a qu'un nombre fini de points critiques. Ha [H] a montré que s'il existe  $t$  tel que  $\lambda^t \neq 0$  alors il existe une suite  $x_n$  satisfaisant les propriétés suivantes: quand  $n \rightarrow \infty$

$$\|x_n\| \rightarrow \infty,$$

$$\|\text{grad}(f)(x_n)\| \rightarrow 0,$$

$$f(x_n) \rightarrow t.$$

On en déduit que si  $f$  est modéré alors  $\lambda = 0$ .

Alors on a comme conséquence du Théorème 10

**COROLLAIRE 13.** *Soit  $f \in \mathbb{C}[X, Y]$  un polynôme modéré, alors*

(i)

$$\mu(f) \leq v(f).$$

(ii) *Si la partie newtonnienne à l'infini est non dégénérée, on a*

$$\mu(f) = v(f).$$

Nous allons montrer comment on peut démontrer ce corollaire directement sans utiliser les diagrammes de Eisenbud et Neumann. Nous allons voir ensuite que la preuve ne se généralise pas immédiatement.

Tout d'abord nous énonçons un lemme qui est intéressant car il permet de construire des polynômes à deux indéterminées non modérés non dégénérés.

**LEMME 14.** *Si  $f \in \mathbb{C}[X, Y]$  est modéré, il n'existe pas de face d'équation*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0$$

*vérifiant*

(i)

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_0 \geq 0,$$

*pour tout  $\alpha \in \text{Supp } f$*

(ii)  *$a_1$  et  $a_2$  ne sont pas du même signe.*

(iii) *il existe  $i$ ,  $i = 1, 2$  tel que  $a_i + a_0 < 0$ .*

*Preuve du Lemme 14.* Supposons qu'il existe une telle face  $F$ . On écrit

$$f(x_1, x_2) = \sum_{\alpha \in F} b_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \sum_{\alpha \notin F} b_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}.$$

On pose

$$x_1(t) = A_{0,1}t^{a_1} + A_{1,1}t^{a_1+1} + \dots,$$

$$x_2(t) = A_{0,2}t^{a_2} + A_{1,2}t^{a_2+1} + \dots.$$

Puisque  $a_1$  et  $a_2$  ne sont pas du même signe, alors  $\|x\| \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sum_{\alpha \in F} \alpha_1 b_\alpha x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2} + \sum_{\alpha \notin F} \alpha_1 b_\alpha x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \sum_{\alpha \in F} \alpha_2 b_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2-1} + \sum_{\alpha \notin F} \alpha_2 b_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2-1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(t) = \sum_{\alpha \in F} \alpha_1 b_\alpha A_{0,1}^{\alpha_1-1} A_{0,2}^{\alpha_2} t^{-a_0-a_1} + \dots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(t) = \sum_{\alpha \in F} \alpha_2 b_\alpha A_{0,1}^{\alpha_1} A_{0,2}^{\alpha_2-1} t^{-a_0-a_2} + \dots.$$

Par hypothèse, on a  $a_0 + a_1 < 0$  ou  $a_0 + a_2 < 0$ .

Si  $a_0 + a_1 < 0$  et  $a_0 + a_2 < 0$ , alors  $\|\text{grad}(f)(t)\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$ .

Si  $a_0 + a_1 < 0$  et  $a_0 + a_2 > 0$ , puisque la face  $F$  a au moins deux points dans  $\text{Supp } f$ , alors il existe des points  $(A_{0,1}, A_{0,2})$ , non singuliers sur la courbe  $\sum_{\alpha \in F} \alpha_2 b_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2-1} = 0$  tels que  $A_{0,1} \neq 0$  et  $A_{0,2} \neq 0$ .

Éliminer ensuite les termes suivants consiste à résoudre des équations linéaires en  $A_{i,1}$  ou  $A_{j,2}$  de la forme:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in F} \alpha_2 b_\alpha \alpha_1 A_{0,1}^{\alpha_1-1} A_{0,2}^{\alpha_2-1} A_{i,1} \\ & + \sum_{\alpha \in F} \alpha_2 b_\alpha (\alpha_2 - 1) A_{0,1}^{\alpha_1} A_{0,2}^{\alpha_2-2} A_{j,2} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Donc le lemme est démontré.

Le lemme dit donc que si  $f$  est modéré, alors les faces du polyèdre de Newton coupent les axes en des points d'abscisse et d'ordonnée supérieurs à 1. Notons

$$f^w(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + w_1 x_1 + w_2 x_2.$$

D'après la remarque précédente, si  $f$  est modéré, alors  $v(f) = v(f^w)$ . Or Broughton [B] a démontré que  $f$  est modéré si et seulement si  $\mu(f) < \infty$  et  $\mu(f) = \mu(f^w)$ , pour  $w$  suffisamment petit.

Alors on peut démontrer le Corollaire 13. Soit  $f$  un polynôme modéré. Alors,  $f^w$  est commode si  $w_1$  et  $w_2$  sont non nuls. Donc d'après le théorème de Kouchnirenko  $\mu(f^w) \leq v(f^w)$ . Pour  $w$  suffisamment petit,  $\mu(f) = \mu(f^w)$  et  $v(f) = v(f^w)$ . Donc  $\mu(f) \leq v(f)$ . Si  $f$  est non dégénéré, il est facile de voir que  $f^w$  est aussi non dégénéré et donc  $\mu(f^w) = v(f^w)$ , donc  $\mu(f) = v(f)$ .

L'exemple suivant montre que le Lemme 14 ne se généralise pas en dimension supérieure. Cet exemple est intéressant car il montre que l'ensemble des polynômes modérés n'est pas générique. Il est donc seulement constructible comme l'a démontré Broughton.

#### EXEMPLE 5.

On considère le polynôme

$$f_d(x, y, z) = xy + 3xz^2 + 2yz^2 + x^2z^5 + y^2z^5 + dxyz^5.$$



Alors si  $d$  est différent de 2 ou  $-2$ , ce polynôme n'est pas modéré, et il est modéré, si  $d = 2$  et  $d = -2$ .

Pour montrer que  $f_d$  est modéré si  $d$  est égal à 2 ou  $-2$ , on utilise la remarque suivante [H1]: Il existe une courbe  $(x(t), y(t), z(t))$  pour  $t \in (0, \epsilon]$  telle que  $|(x(t), y(t), z(t))| \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow 0$  et

$$\mathcal{L}(\text{grad}(f_d)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln|\text{grad}(f_d(x(t), y(t), z(t)))|}{\ln|(x(t), y(t), z(t))|},$$

où  $\mathcal{L}(\text{grad}(f_d)) = \sup N((\text{grad}(f_d)))$  et

$$N((\text{grad}(f_d))) = \{q \in \mathbb{R} | \exists C > 0 \exists R > 0, \forall |X| = |(x, y, z)| > R, |\text{grad}(f_d(X))| > C|X|^q\}.$$

Donc si l'on montre qu'il n'existe pas de  $X \rightarrow \infty$  tel que  $\text{grad}(f_d(X)) \rightarrow 0$ , alors  $\mathcal{L}(\text{grad}(f_d)) \geq 0$  c'est à dire l'application  $\text{grad}(f_d)$  est propre au dessus de 0.

On écrit

$$x = A_\alpha t^\alpha + A_{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \dots,$$

$$y = B_\beta t^\beta + B_{\beta+1} t^{\beta+1} + \dots,$$

$$z = t^{-1} + C_0 + \dots.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = y + 3z^2 + 2(x + y)z^5,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = x + 2z^2 + 2(x + y)z^5,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = 6xz + 4yz + 5z^4(x + y)^2.$$

Donc

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = y - x + z^2.$$

On a donc soit  $\alpha = \beta < 0$ , soit  $\alpha = -2$  ou  $\beta = -2$ . Supposons  $\alpha = \beta < 0$  et  $\alpha > -2$ , alors

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = t^{-2} + \dots.$$

Si  $\alpha < -2$ ,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = (B_\beta - A_\alpha)t^\alpha + \dots.$$

Donc  $B_\beta = A_\alpha$ . Alors

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = 4A_\alpha t^{-5+\alpha} + \dots$$

Donc si  $\alpha = \beta < 0, \alpha = -2$ . Supposons  $\alpha = -2$  et  $\alpha < \beta$ .

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = 2A_\alpha t^{-3} + \dots$$

Supposons  $\alpha = -2$  et  $\alpha > \beta$ .

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = B_\beta t^\beta + \dots$$

On a donc  $\alpha = \beta = -2$ .

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = (B_{-2} - A_{-2} + 1)t^{-2} + \dots$$

Donc  $B_{-2} = A_{-2} + 1$ .

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = 2(B_{-2} + A_{-2})t^{-7} + \dots$$

On en déduit  $A_{-2} = 1/2, B_{-2} = -1/2$ . Donc

$$\begin{aligned} x + y &= (A_{-1} + B_{-1})t^{-1} + (A_0 + B_0) + \dots, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) &= 2(A_{-1} + B_{-1})t^{-6} + 2(A_0 + B_0)t^{-5} \\ &\quad + \dots + 2(A_2 + B_2)t^{-3} + \dots \end{aligned}$$

Donc  $A_{-1} = -B_{-1}$  et  $A_0 = -B_0$ , et

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = t^{-3} + \dots$$

Ce qui achève la démonstration.

La preuve est la même pour  $d = -2$ .

Si  $d$  est différent de 2 ou  $-2$ , on va montrer qu'il existe une suite qui satisfait les conditions précédentes, et donc l'application gradient n'est pas propre au dessus de zéro. On procède comme dans la démonstration du Lemme 14, avec la face d'équation  $-3x - 3y + z + 1 = 0$ .

$$\frac{\partial f_d}{\partial x}(x, y, z) = y + 3z^2 + 2xz^5 + dyz^5,$$

$$\frac{\partial f_d}{\partial y}(x, y, z) = x + 2z^2 + 2yz^5 + dxz^5,$$

$$\frac{\partial f_d}{\partial z}(x, y, z) = 6xz + 4yz + 5x^2z^4 + 5y^2z^4 + 5dxyz^4.$$

Si  $\alpha = 3, \beta = 3$

$$\frac{\partial f_d}{\partial x}(x, y, z) = (3 + 2A_3 + dB_3)t^{-2} + \dots,$$

$$\frac{\partial f_d}{\partial y}(x, y, z) = (2 + dA_3 + 2B_3)t^{-2} + \dots.$$

On peut donc calculer  $A_3$  et  $B_3$ . Ensuite on détermine  $A_4$  et  $B_4$  ainsi que  $A_5$  et  $B_5$ , en fonction de  $C_0$  et  $C_1$ , par des équations linéaires ayant le même déterminant.

Il semble raisonnable de conjecturer:

CONJECTURE. Soit  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  un polynôme modéré, alors

(i)

$$\mu(f) \leq v(f).$$

(ii) Si la partie newtonienne à l'infini du polynôme est non dégénérée, on a  $\mu(f) = v(f)$ .

D'autre part, on peut aussi se demander si sous l'hypothèse (H), le Théorème 4 est encore vrai. L'hypothèse (H) est une hypothèse très restrictive. Il serait intéressant d'étudier le cas où  $\Sigma$  est de dimension 1 en utilisant les résultats de Yomdin, de définir un ou des  $\lambda$  de voir ce que devient le théorème de Broughton ainsi que le Théorème 4 dans ce cas.

Pour finir, nous donnons l'exemple de deux polynômes en 3 indéterminées qui ne sont pas modérés.

#### EXEMPLES 6.

(i)

$$f = x(z-1)^2z + y^4 + yz.$$

On a  $v(f) = v(f^w) = 9$ . Si  $w_1 \neq 0$ ,  $\mu(f^w) = 9$ . Si  $w_1 = 0$  et  $-4w_3^3 + 1 + w_2 \neq 0$  alors  $\mu(f^w) = 3$ , Si  $w_1 = 0$  et  $-4w_3^3 + 1 + w_2 = 0$  alors  $\mu(f^w) = \infty$ . Donc  $f$  n'est pas modéré. On a une seule singularité à l'infini au point  $(1, 0, 0, 0)$ . Cette singularité est isolée et indépendante de  $t$ . On trouve donc,  $\lambda = 0$ . On peut se poser la question de savoir si ce polynôme est bon.

(ii)

$$f = xy + xz^3 + x^2z^7 + y^2z^3 + xyz^6.$$

On a  $v(f^w) = 24$  si  $w_3 \neq 0$  et  $v(f^w) = 23$  si  $w_3 = 0$ . On trouve  $\mu(f^w) = 24$  si  $w_3 \neq 0$  et  $\mu(f^w) = 20$  si  $w_3 = 0$  et  $w_2 \neq -1$ ,  $\mu(f^w) = 18$  si  $w_3 = 0$  et  $w_2 = -1$ . La singularité en  $(0, 0, 1, 0)$  est non isolée on peut ajouter  $y^5$  à  $f(x/T, y/T, 1/T)T^9 - tT^9$  pour la rendre isolée. On trouve  $\lambda = 3$ .

## References

- [ACL] Artal Bartolo, E., Cassou-Noguès, P. and Luengo Velasco, I.: On polynomials whose fibers are irreducible with no critical points, *Math. Ann.* 299 (1994) 477–490.
- [B] Broughton, S.A.: Milnor numbers and the topology of polynommmial hypersurfaces, *Inventiones Math.* 92 (1988) 217–241.
- [CN] Cassou-Noguès, P.: Entrelacs toriques itérés et intégrales associées à une courbe plane, *Séminaire de théorie de nombres*, Bordeaux 2 (1990) 237–331.
- [EN] Eisenbud, D. and Neumann, W.D.: Three-Dimensional link theory and invariants of plane curve singularities, *Annals of Mathematic Studies* 101, Princeton Univ. Press, Princeton N.Y., 1985.
- [H] Ha Huy Vui: On the irregular at infinity algebraic plane curves. *Preprint of the Institute of Mathematics*, National Center for Scientific Research of Vietnam, 1991.
- [H1] Ha Huy Vui: Number of Lojasiewicz and singularities at infinity, manuscript.
- [K] Kouchnirenko, A.G.: Polyèdres de Newton et Nombre de Milnor, *Inventiones Math.* 32 (1976) 1–31.
- [L] Luengo Velasco, I.: On the existence of complete families of projective plane curves which are obstructed, *J. London Math. Soc.* 36 (1987) 33–43.
- [LMW] Le Dung Trang, Michel, F. and Weber, C.: Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes. *Compositio Math.* 72 (1989) 87–113.
- [LN] Le Van Thanh and Neumann, W.: On the irregular links at infinity of algebraic plane curves, *Math. Ann.* 295 (1993) 239–244.
- [N] Neumann, W.D.: Complex algebraic plane curves via their links at infinity, *Invent. Math.* 98 (1989) 445–489.
- [NR] Neumann, W. and Rudolph, L.: Unfoldings in knot theory, *Math. Ann.* 278 (1987) 409–439.
- [S] Susuki, M.: Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace  $\mathbb{C}^2$ , *J. Math. Soc. Japan* 26 (1974) 241–260.
- [Y] Yomdin, I.N.: Complex surfaces with a 1-dimensional set of singularities, *Sibirskii Math. Z.* 15(5) (1974) 1061–1082.