

COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN-PIERRE HENRY

MICHEL MERLE

Fronces et doubles plis

Compositio Mathematica, tome 101, n° 1 (1996), p. 21-54

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__101_1_21_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Fronces et doubles plis

JEAN-PIERRE HENRY¹ et MICHEL MERLE²

¹*Centre de Mathématiques, (Unité associée au CNRS n° 169), Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau CEDEX*

²*Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, (Unité associée au CNRS n° 168), Université de Nice, Parc Valrose, F-06108 Nice CEDEX 2*

Received January 1, 1991; accepted in final form April 24, 1994

Introduction

Etant donné un germe de morphisme analytique $f: X \rightarrow S$ et un plongement relatif local tel que f soit induit par la deuxième projection

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n \times S \\ \downarrow f & & \downarrow pr_2 \\ S & = & S \end{array}$$

les variétés polaires du morphisme comparent f avec les projections linéaires. Si V est un sous espace linéaire de $\mathbb{C}^n$, et π la projection de noyau V , la variété polaire de f associée à V est l'adhérence du lieu critique du morphisme:

$$(\pi, f): X \rightarrow (\mathbb{C}^n/V) \times S$$

restreint à la partie de X où f est lisse.

L'image par π de la variété polaire $P(f, V_k)$ est le dirimant de f associé à V_k . Les multiplicités des dirimants de f sont étroitement liées au type de Thom–Whitney de f (voir [Henry–Merle–Sabbah] Théorème 6.1 et, pour le cas où S est un point [Teissier 2] chapitre V, Théorème 1.2 et [Henry–Merle 2] Théorème 1).

Toutefois les multiplicités des variétés polaires ne rendent pas compte du comportement du morphisme (π, f) sur la partie de son propre lieu critique où f est lisse. On néglige deux sortes de phénomènes: d'une part, les points multiples de f et plus généralement, les points critiques de (f, π) ayant même valeur critique; d'autre part, les invariants d'ordre supérieur à un de f : les variétés polaires sont des invariants du premier ordre, uniquement définies à l'aide des plans tangents relatifs à f .

Or, si la constance des multiplicités des variétés polaires suffit à caractériser les stratifications de Whitney, celles-ci sont loin d'être suffisamment fines pour un certain nombre de problèmes à commencer par ceux qui ont trait à la résolution simultanée des singularités.

Zariski avait introduit une notion d'équisingularité beaucoup plus forte, définie par récurrence et dite algébro-géométrique:

Par définition, un espace analytique X plongé dans $\mathbb{C}^n$ est équisingulier au sens de Zariski le long d'une sous variété lisse Y si, pour une projection générale π , le discriminant de la restriction de π à X est équisingulier le long de $\pi(Y)$. Cette définition opère par récurrence, sur la codimension de Y dans X . En codimension 0, on demande que l'espace réduit associé à X soit Y . La définition primitive de O. Zariski utilisait des projections simplement *transverses*. Pour la codimension 1 cette définition était parfaitement opératoire, mais dès la codimension 2 des exemples de Briançon et Speder montraient (par exemple pour la compatibilité avec les stratifications de Whitney) que seules des projections génériques pouvaient être utilisées (pour une étude détaillée voir [Henry] paragraphe 1).

Cette définition impose, pour commencer, de pouvoir caractériser l'équisingularité du lieu des points doubles et des cusps du discriminant (défini par une projection linéaire générique). Une première étape obligée pour caractériser numériquement cette forme d'équisingularité est donc de montrer que les multiplicités de ces lieux et de leur variétés polaires (qui a priori dépendent de la structure linéaire du plongement) sont des invariants analytiques. Par exemple, si X , de dimension pure d plongée dans $\mathbb{C}^n$, est projetée sur $\mathbb{C}^{d+1}$ par une projection générale π , la multiplicité du lieu des points doubles de π ne dépend pas du plongement de X dans $\mathbb{C}^n$.

Nous allons par conséquent nous intéresser à ces invariants d'ordre supérieur de f en nous limitant ici au cas où S est un point et aux invariants d'ordre deux, c'est à dire aux fronces et aux doubles plis, qui sont aussi les strates de Thom–Boardman de codimension 1 dans le discriminant du morphisme (π, f) *restreint à la partie lisse de f* .

Pour étudier le comportement du morphisme (π, f) en restriction à son propre lieu critique $P(f, V)$, nous allons le comparer à celui induit sur $P(f, V)$ par une projection générale, c'est à dire dont le noyau $U \subset \mathbb{C}^n$ est général parmi les plans de dimension k .

Nous démontrons (Thm 4.2.6), dans le cas où S est un point, que, pour une notion d'équisingularité convenable, le dirimant est équisingulier à une projection générale de la variété polaire $P(f, V)$. Ceci, pour la notion d'équisingularité considérée, répond à une question de B. Teissier ([Teissier 2] ch. VI, 6, 'problème' p. 485) en relation avec l'équisingularité à la Zariski.

Nous énonçons les critères effectifs sur les plans noyaux de projection pour que les polaires correspondantes (resp. dirimants) soient génériques, et montrons que, pour ceux-là, les types de singularité de fronces ou de double-plis sont aussi génériques (en précisant les conditions sur le drapeau).

Chemin faisant, nous sommes amenés à considérer un nouvel objet géométrique naturel, '*l'ombre portée*', définie à partir de l'image inverse du dirimant (pour l'utilisation en 'reconnaissance des formes' et 'vision artificielle' voir [Henry–Merle 4]).

Nous démontrons également, toujours dans le cas où S est un point, que les multiplicités des variétés de cusps et de points doubles du dirimant, et plus généralement les multiplicités de leurs dirimants généraux, sont des invariants analytiques locaux du germe de morphisme.

A notre connaissance, les seuls résultats concernant fronces et doubles plis d'un germe d'espace analytique se limitaient à un article déjà ancien [Briançon–Henry] qui traitait des familles de surfaces à singularités isolées, et utilisait des techniques difficilement généralisables en dimension supérieure (par exemple, comme les variétés polaires intéressantes sont des courbes, on y utilisait l'équisaturation comme caractérisation algébrique de l'équisingularité). Pour le cadre global, nous renvoyons à l'article de synthèse de [Kleiman 4] où l'on décrit les formules de points multiples d'un morphisme algébrique.

Enfin, nous donnons des critères numériques pour l'équisingularité algébro-géométrique d'un espace analytique X le long d'une sous-variété lisse de codimension au plus 2.

Sous cette même hypothèse, nous répondons affirmativement à la question suivante de Zariski: les projections linéaires induites par un plongement donné suffisent-elles à définir l'équisingularité algébro-géométrique?

1. Conormal et spécialisation

1.1. CONORMAL RELATIF D'UN MORPHISME ANALYTIQUE

Soit $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme analytique de dimension relative pure d . Nous supposons donné un plongement relatif de $\mathcal{X}$ dans un produit d'une variété lisse M par $\mathcal{S}$. On considère le fibré conormal relatif à f

$$T_{f^o}^* M = \{(x, L) \in T^* M; L \in t_x^* f\}$$

au dessus du lieu lisse de f et son adhérence $T_f^* M$ dans $\mathcal{S} \times T^* M$. Lorsque $\mathcal{S}$ est un point, nous le noterons $T_{\mathcal{X}}^* M$ au lieu de $T_f^* M$.

On étudie aussi la variété à l'infini du cône $T_f^* M$ que nous noterons $C(f, M)$ (ou $C(f)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) et qui est plongée dans $PT^* M$. Lorsque $\mathcal{S}$ est un point, nous la noterons simplement $C(\mathcal{X})$.

1.1.1. Conormal et variétés polaires relatives

La question étant locale, nous identifions le germe à l'origine de M avec celui d'un espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ à l'origine. Soit k un entier entre $n - d - 1$ et $n - 1$ ($n - 2$ si $\dim \mathcal{S} = 1$) et V_k un sous espace vectoriel de dimension k dans $\mathbb{C}^n$. Considérons le morphisme $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathbb{C}^n / V_k$ induit par la projection de noyau V_k sur $\mathbb{C}^n$.

On définit la *variété polaire relative* $P(f, V_k)$, associée à la projection π comme l'adhérence du lieu critique du morphisme π restreint à la partie lisse de f .

$P(f, V_k)$ est donc l'adhérence de l'ensemble des points lisses de f où le plan tangent relatif $t_x f$ en $x \in X_{f(x)}$ rencontre V_k en dimension excédentaire (au moins

égale à $d + k - n + 1$); ce qui s'exprime en disant que l'orthogonal $\check{t}_x f$ (espace conormal relatif à X en x) intersecte l'orthogonal $\check{V}_k$ en dimension au moins 1.

Cette construction peut être décrite à l'aide du conormal relatif $C(f)$. Soit $\tau_f: C(f) \rightarrow \mathcal{X}$ le morphisme conormal. On a alors le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \tau_f^{-1}(0) & \subset & C(f) & \xrightarrow{\gamma} & \check{\mathbf{P}}^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \tau_f & & \\ 0 & \in & \mathcal{X} & & \end{array}$$

Il existe un ouvert de Zariski non vide $\mathbf{U}_1$ dans la grassmannienne $\mathbf{G}(k; n)$ tel que, pour V_k appartenant à $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{P}\check{V}_k$ intersecte $\tau_f^{-1}(0)$ en codimension k . La variété polaire est alors la projection sur $\mathcal{X}$ de l'intersection de $C(f)$ avec $\mathbf{P}\check{V}_k$ au dessus de $\check{\mathbf{P}}^{n-1}$.

On définit ensuite *le dirimant relatif* $\Delta(f, V_k)$ comme l'image par π de la variété polaire $P(f, V_k)$. Il est muni d'une application vers $\mathcal{S}$ induite par f que nous noterons encore f .

1.1.2. Conormal du dirimant

La section de $C(f)$ par $\mathbf{P}\check{V}_k$ au dessus de l'application de Gauss γ se projette dans $\mathbf{P}T^*(\mathbf{C}^n/V_k)$ sur le conormal de $\Delta(f, V_k)$ (cf notion d'image directe de [Sabbah], pour la démonstration voir [Henry–Merle–Sabbah] Corollaire 4.3.11).

Nous verrons par la suite que le conormal de la polaire $P(f, V_k)$ n'est pas obtenu de manière aussi simple.

1.2. SPÉCIALISATION

Nous rappelons ici un énoncé de théorème avant de démontrer les corollaires dont nous ferons un usage intensif dans la suite:

THÉORÈME 1.2.1. *Soit $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme analytique, T_f^*M son conormal relatif supposé équidimensionnel au dessus de $\mathcal{S}$, (on dit alors que f est sans éclatement en codimension 0). Alors, pour tout morphisme $h: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$, toute composante irréductible Z de l'espace $T_f^*M \times_{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ est le conormal relatif du morphisme $h^{-1}(f)$ restreint à l'image de Z dans $\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{T}$.*

$$\begin{array}{ccc} T_f^*M \times_{\mathcal{S}} \mathcal{T} & \longrightarrow & T_f^*M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow h^{-1}(f) & & \downarrow f \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{h} & \mathcal{S} \end{array}$$

Pour la démonstration voir par exemple [Henry–Merle–Sabbah], Corollaire 4.2.1, où on peut trouver le premier énoncé de ce résultat dans le cadre général des morphismes sans éclatement (en codimension 0). Pour un historique détaillé, nous renvoyons à l'article de Kleiman [Kleiman]. Signalons en outre une démonstration de [Kashiwara 1] dans le cas particulier d'une fonction sur une variété lisse, se plaçant dans le cadre lagrangien.

1.2.2. Déformation sur le cône normal

Pour un espace analytique X et un sous espace analytique Y , on construit la déformation de X sur le cône normal à Y dans X .

Pour cela on éclate, dans le produit $X \times \mathbb{C}$ le sous espace $Y \times 0$ et on restreint l'éclaté à l'ouvert où l'idéal de $Y \times 0$ est engendré par une coordonnée de $\mathbb{C}$ nulle en 0. L'espace obtenu se projette sur $\mathbb{C}$, la fibre au dessus de 0 étant le cône normal à Y dans X .

$$\begin{array}{ccc} C_Y X & \subset & \text{Def}(X, Y) \\ \downarrow & & \downarrow \theta \\ 0 & \subset & \mathbb{C} \end{array}$$

Lorsque X est un sous espace de $\mathbb{C}^n$ et que Y est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, l'espace $\text{Def}(X, Y)$ est le sous ensemble de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ adhérence de

$$\{(y, \ell, \theta); \theta \neq 0, (y, \theta \ell) \in X\}.$$

Supposons que X est plongé dans une variété lisse M . Le conormal relatif du morphisme $\theta: \text{Def}(X, Y) \rightarrow \mathbb{C}$ s'identifie alors naturellement à la déformation du conormal de X sur son intersection avec $T_Y^* M$.

$$\begin{array}{ccc} C_{T_Y^* M} T_X^* M & \subset & \text{Def}(T_X^* M, T_Y^* M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_Y X & \subset & \text{Def}(X, Y) \\ \downarrow & & \downarrow \theta \\ 0 & \subset & \mathbb{C} \end{array}$$

COROLLAIRE 1.2.3. *Toute composante de $C_{T_Y^* M} T_X^* M$ est le conormal de sa projection dans $C_Y X$.*

En suivant [Sabbah], nous associons à tout cycle Z dans M le cycle (de dimension égale à la dimension de M) défini par son conormal $T_Z^* M$ dans $T^* M$. Le corollaire précédent montre que $C_{T_Y^* M} T_X^* M$ est une somme $\sum T_{Z_i}^* M$ de cycles

conormaux ou, si l'on préfère, le cycle conormal associé à un cycle homogène $\sum Z_i$ de $C_Y X$ qui n'est pas nécessairement somme de cycles de même dimension.

DÉFINITION 1.2.4. Le cycle $\sum Z_i$ est le spécialisé de X le long de Y .

Lorsque Y est un point 0, la classe de Chern–McPherson locale de X en 0 est la somme des classes de Chern–Mather des cycles Z_i , ou si l'on préfère, la classe de Chern–Mather du spécialisé de X en 0.

Remarque 1.2.5. Lorsque X est un germe de surface à singularité isolée dans $(\mathbb{C}^3, 0)$, le spécialisé le long de 0 est la somme du cône tangent et de certaines génératrices particulières (tangentes exceptionnelles). C'est la description de [Henry–Lê] des limites de plans tangents à X en 0.

COROLLAIRE 1.2.6. Soit X un sous-espace analytique d'un espace vectoriel $Y \times N_Y$, contenant Y . On suppose que X est un cône de sommet N_Y dans la direction Y . Si Z est une composante de $C_{T_Y^* M} T_X^* M$, elle est alors le conormal de ses deux projections sur $Y \times N_Y$ et $Y^* \times N_Y^*$.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p} & p(Z) \subset Y^* \times N_Y^* \\ \downarrow q & & \\ q(Z) \subset Y \times N_Y & & \end{array}$$

1.3. MULTIPLICITÉS

Lors de l'étude des multiplicités des variétés polaires des variétés de fronces ou doubles plis le point crucial sera de caractériser les projections donnant naissance à des dirimants ayant la multiplicité générique.

Nous rappelons en les précisant des résultats nécessaires (voir [Henry–Merle–Sabbah] 4.4, [Henry–Merle 3]) et [Henry]): dans la situation de 1.1.1, on peut supposer, sans perte de généralité, que S est lisse, identifié à un espace vectoriel $\mathbb{C}^s$. On considère l'éclatement $E_0 C(f)$ de l'idéal de 0 dans $C(f)$. Le diviseur exceptionnel de cet éclatement, image inverse de 0, est noté D_0 ; il est de dimension $n - 2 + s$ et admet un plongement naturel dans $\check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n+s-1}$.

Soient V_k un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ et U_{k+2} un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{n+s}$, tous deux indexés par leur dimension. Il existe un translaté général du cycle $\mathbf{P}\check{V}_k \times \mathbf{P}U_{k+2}$ par l'action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(n+s, \mathbb{C})$ qui est transverse à D_0 (Bertini–Kleiman).

PROPOSITION 1.3.1. Lorsque l'intersection dans $\check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n+s-1}$ du diviseur exceptionnel D_0 avec le cycle $\mathbf{P}\check{V}_k \times \mathbf{P}U_{k+2}$ est transverse de dimension 0,

(1) la multiplicité en 0 de la variété $P(f, V_k)$ est égale au nombre d'intersection

$$(D_0 \cdot \check{V}_k \times U_{k+2})_{\check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n+s-1}}$$

(2) cette multiplicité est la multiplicité d'une polaire générique, c'est à dire associée à un élément générique de la grassmannienne $\mathbf{G}(k; n)$,

(3) c' est un invariant analytique de f .

Supposons de plus que S est de dimension $s \leq 1$. Il existe un ouvert de Zariski non vide $\mathbf{U}_1$ dans la grassmannienne $\mathbf{G}(k; n)$ tel que, pour V_k appartenant à $\mathbf{U}_1$, l'intersection du diviseur exceptionnel D_0 avec le cycle $\mathbf{P}\check{V}_k \times \mathbf{P}V_k$ est vide (voir [Henry–Merle 1], Corollaire 2 p. 195).

THÉORÈME 1.3.2. *Lorsque l'intersection dans $\check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \mathbf{P}^n$ du diviseur exceptionnel D_0 avec le cycle $\mathbf{P}\check{V}_k \times \mathbf{P}V_k$ est vide, il existe alors un ouvert $\mathbf{U}_2$ dans la grassmannienne $\mathbf{G}(2; \mathbf{C}^{n+1}/V_k)$ tel que si V'_{k+2}/V_k appartient à $\mathbf{U}_2$*

(1) l'intersection dans $\check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \mathbf{P}^n$ du diviseur exceptionnel D_0 avec le cycle $\check{V}_k \times V'_{k+2}$ est de dimension 0,

(2) le dirimant $\Delta(f, V_k)$ est une hypersurface dans $S \times \mathbf{C}^n/V_k$,

(3) la multiplicité en 0 du dirimant $\Delta(f, V_k)$ est égale au nombre d'intersection

$$(D_0 \cdot \check{V}_k \times V'_{k+2})_{\check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \mathbf{P}^n}$$

(4) la multiplicité du dirimant $\Delta(f, V_k)$ est la multiplicité d'un dirimant générique, et c'est un invariant analytique de f .

(5) cette multiplicité est égale à la multiplicité de la variété polaire $P(f, V_k)$ et c'est la multiplicité d'une polaire générique.

Autrement dit, lorsque S est de dimension 1, une variété polaire a la multiplicité d'une variété polaire générique (i.e. la multiplicité générique d'une polaire), si et seulement si elle est transverse au plan qui sert à la définir. Le dirimant correspondant a la même multiplicité qui est bien sûr celle d'un dirimant générique.

Lorsque S est de dimension supérieure à 1, on peut tout de même se ramener à l'énoncé précédent en considérant la Proposition 4.4.6 et la Remarque 4.4.7 de [Henry–Merle–Sabbah] et en restreignant f au dessus d'une droite générale de $S = \mathbf{C}^s$.

Soit X un germe à l'origine de $\mathbf{C}^n$. On construit l'espace $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{C}^n \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ comme image du morphisme

$$\begin{aligned} X \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) &\rightarrow \mathbf{C}^n \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) \\ (x, g) &\mapsto (g.x, g) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{Y} = 0 \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et ϕ la seconde projection du produit $X \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. On étudie ici le conormal relatif du morphisme ϕ et le diviseur exceptionnel D de l'éclatement de $\mathcal{Y}$ dans ce conormal relatif. On note D_{id} sa fibre au dessus de

$0 \times \text{Id}$. Elle s'identifie au diviseur exceptionnel D_0 de l'éclatement de 0 dans le conormal de X .

PROPOSITION 1.3.3. *Soient k un entier, $n - d - 1 \leq k \leq n - 1$ et V_k un sous espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$. Lorsque l'intersection dans $\check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \mathbf{P}^n$ de D_{Id} avec le cycle $\mathbf{P}\check{V}_k \times \mathbf{P}V_k$ est vide, le dirimant relatif $\Delta(\phi, V_k)$ est équivariant le long de $\mathcal{Y}$ au voisinage de l'identité de $\text{GL}(n, \mathbf{C})$.*

Comme il est clair que la fibre au dessus de $g \in \text{GL}(n, \mathbf{C})$ de ce dirimant relatif est le dirimant $\Delta(f, g(V_k))$ on retrouve bien l'énoncé précédent. On a même un petit supplément, par exemple dans le cas où S est un point et $k = n - 1$, pour lequel la Proposition 1.3.2 n'a pas de sens; on en déduit alors (par transitivité des dirimants), que $\Delta(\phi, V_{n-2})$, c'est à dire la famille des projections planes des courbes polaires $P(X, g(V_k))$ a son dirimant de codimension 1 vide.

Remarque 1.3.4. La Proposition 1.3.1 (et, mutatis mutandis la Proposition 1.3.3) admet une légère variante:

Lorsque l'intersection dans $\check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \mathbf{P}^n$ du diviseur exceptionnel D_0 avec le cycle $\mathbf{P}\check{V}_k \times \mathbf{P}V_{k+1}$ est vide, il existe alors un ouvert $\mathbf{U}'_2$ dans la grassmannienne $\mathbf{G}(2; \mathbf{C}^{n+1}/V_{k+1})$ tel que, si V'_{k+2}/V_{k+1} appartient à $\mathbf{U}'_2$, les conclusions des Propositions 1.3.1 et 1.3.3 sont vraies.

1.4. DEUXIÈME CONORMAL

Le premier conormal a servi à construire les variétés polaires, par intersection au dessus de $\check{\mathbf{P}}^{n-1}$. Pour construire les polaires de polaires et les fronces, il va nous falloir considérer le conormal de $T_X^* \mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n)^*$ que nous noterons $T_X^{[2]} \mathbf{C}^n$. Nous appellerons l'espace ainsi construit le *deuxième conormal* de X .

Construisons également la déformation de $T_X^{[2]} \mathbf{C}^n$ sur le cône normal à $T_0^{[2]} \mathbf{C}^n$. C'est le conormal relatif de la déformation de $T_X^* \mathbf{C}^n$ sur $T_0^* \mathbf{C}^n$.

$$\begin{array}{ccc}
 C_{T_0^{[2]} \mathbf{C}^n} T_X^{[2]} \mathbf{C}^n & \subset & \text{Def}(T_X^{[2]} \mathbf{C}^n, T_0^{[2]} \mathbf{C}^n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_{T_0^* \mathbf{C}^n} T_X^* \mathbf{C}^n & \subset & \text{Def}(T_X^* \mathbf{C}^n, T_0^* \mathbf{C}^n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_0 X & \subset & \text{Def}(X, 0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \in & \mathbf{C}
 \end{array}$$

1.4.1. Description géométrique

La fibre au dessus de 0 de la déformation est un diviseur plongé dans un produit d'espaces $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n)^* \times (\mathbf{C}^n)^* \times \mathbf{C}^n$. C'est donc l'ensemble des points (ℓ, L, N, ν) du produit tels que:

- il existe un chemin analytique h tracé dans l'ouvert $\mathcal{U}$ complémentaire dans la partie lisse X° de l'origine, avec $h(0) = 0$
- le long de ce chemin, ℓ est la limite quand θ tend vers 0 d'un champ analytique de vecteurs colinéaires à $h(\theta)$, avec $h(\theta)/l(\theta)$ holomorphe et s'annulant pour $\theta = 0$.
- L est la limite quand θ tend vers 0 d'un champ analytique de vecteurs conormaux à X en $h(\theta)$,
- (N, ν) est la limite quand θ tend vers 0 d'un champ $(N(\theta), \nu(\theta))$ tel que $(N(\theta), \frac{h(\theta)}{l(\theta)}\nu(\theta))$ soit un champ analytique de vecteurs conormaux à $T_X^* \mathbf{C}^n$ en $(h(\theta), L(\theta))$.

1.5. PROPRIÉTÉS DE LA SPÉCIALISATION $\text{Def}(T_X^{[2]} \mathbf{C}^n, T_0^{[2]} \mathbf{C}^n)$

1.5.1. Le conormal $T_X^* \mathbf{C}^n$ est, au dessus de la partie lisse X° , un fibré vectoriel de rang $n - d$. En un point (x, L) de $T_X^* \mathbf{C}^n$ l'espace tangent $T_{x,L}$ contient donc $(0 \times t_x)$ si t_x est l'espace tangent à X en x .

$$\begin{array}{ccc} 0 \times t_x & \subset & T_{x,L} \subset \mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \subset & t_x \subset \mathbf{C}^n \end{array}$$

Sur le conormal $T_{x,L}^\vee$, la deuxième projection de $(\mathbf{C}^n)^* \times \mathbf{C}^n$ induit une *surjection* $T_{x,L}^\vee \rightarrow t_x$, qui à tout élément (N, v) de $T_{x,L}^\vee$ associe v dans t_x .

1.5.2. La surjection $T_{x,L}^\vee \rightarrow t$ induit, toujours au dessus de la partie lisse X° , une application surjective:

$$T_X^{[2]} \mathbf{C}^n \rightarrow TX.$$

Sur $T_X^{[2]} \mathbf{C}^n$ la forme différentielle $N dx + v dL$ est nulle par définition. Comme $\langle L \cdot v \rangle = 0$, on a $L dv + v dL = 0$ sur $T_X^{[2]} \mathbf{C}^n$.

On en déduit que $N dx - L dv$ est aussi nulle, ce qui montre que $s(T_X^{[2]} \mathbf{C}^n)$ est contenu dans $T_{TX^\circ}^* (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n)$, si s est la transformation: $(x, L, N, v) \rightarrow (x, L, N, -v)$. Les deux espaces susnommés étant de même dimension et irréductibles, ils sont égaux.

1.5.3. On sait que le fibré cotangent $T^*(T^*\mathbf{C}^n)$ est canoniquement isomorphe au fibré tangent $T(T^*\mathbf{C}^n)$. Cet isomorphisme hamiltonien est réalisé par la forme bilinéaire non dégénérée sur $T^*T^*\mathbf{C}^n$ donnée par:

$$((N, v), (N', v')) \rightarrow \langle N \cdot v' \rangle - \langle N' \cdot v \rangle.$$

Montrons que cet isomorphisme induit un isomorphisme entre le fibré conormal $T_X^{[2]}\mathbf{C}^n$ et le fibré tangent $T(T_X^*\mathbf{C}^n)$. Il suffit pour cela de vérifier que $\check{T}_{x,L}$ est son propre orthogonal relativement à cette forme bilinéaire, soit encore que la forme bilinéaire définie sur TX° par:

$$B(v, v') = \langle N \cdot v' \rangle$$

où (N, v) est un élément quelconque de $\check{T}_{x,L}$ relevant v , est une forme symétrique. Or B est la seconde forme fondamentale, donc symétrique.

En prenant les adhérences des objets considérés, nous voyons que $T(T_X^*)$ et $T_X^{[2]}\mathbf{C}^n$ sont identifiés par l'isomorphisme canonique de $T(T^*\mathbf{C}^n)$ et de $T^*(T^*\mathbf{C}^n)$.

1.5.4. Invariance de $T_X^{[2]}\mathbf{C}^n$

Si L' est un vecteur conormal à X° en x , alors $(L', 0)$ est conormal à $T_X^*\mathbf{C}^n$ en (x, L) . Il s'ensuit que $\check{T}_{x,L}$ contient $\check{t}_x \times 0$ qui est donc contenu dans le noyau de la surjection $\check{T}_{x,L} \rightarrow t_x$, et qui étant de dimension $n - d$ est égal à ce noyau.

$$\begin{array}{ccc} 0 \times \check{t}_x & \subset & T_{x,L} \subset \mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \subset & t_x \subset \mathbf{C}^n \end{array}$$

On en déduit que si $T_X^{[2]}\mathbf{C}^n$ contient le point (x, L, N, v) il contient également les éléments de $(x, L, N + \check{t}_x, v)$.

De même pour la déformation $\text{Def}(T_X^{[2]}\mathbf{C}^n, T_0^{[2]}\mathbf{C}^n)$, qui contient le point de coordonnées $(\ell, L, N + \lambda L, \nu, \theta)$ dès qu'elle contient le point $(\ell, L, N, \nu, \theta)$.

1.5.5. Notons que $\text{Def}(T_X^{[2]}\mathbf{C}^n, T_0^{[2]}\mathbf{C}^n)$ est également stable par les homothéties:

$$\begin{aligned} (\ell, L, N, \nu, \theta) &\rightarrow (\ell, \alpha L, \alpha N, \nu, \theta), \\ (\ell, L, N, \nu, \theta) &\rightarrow (\ell, L, \beta N, \beta \nu, \theta), \\ (\ell, L, N, \nu, \theta) &\rightarrow (\gamma \ell, L, N, \gamma \nu, \frac{\theta}{\gamma}). \end{aligned}$$

Si l'on retire de $\text{Def}(T_X^{[2]}\mathbf{C}^n, T_0^{[2]}\mathbf{C}^n)$ les sous-ensembles définis respectivement par: $L = 0$, $N = \nu = 0$, et $\ell = \nu = 0$ et que l'on passe aux quotients successifs par

les trois relations d'équivalence, on obtient l'espace éclaté de $C^{[2]}(0)$ dans $C^{[2]}(X)$, noté $E_{C^{[2]}(0)}C^{[2]}(X)$.

1.5.6. Soit Z l'une des composantes du diviseur exceptionnel $C_{T_0^{[2]}C^n}T_X^{[2]}C^n$. Grâce au résultat de dualité de 1.2.6, les deux projections q et p

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*) \times ((\mathbb{C}^n)^* \times \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{p} & (\mathbb{C}^n)^* \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow q & & \\ \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^* & & \end{array}$$

font de Z le conormal de ses deux images $q(Z)$ et $p(Z)$, qui sont donc duales l'une de l'autre.

Remarquons ensuite que $q(Z)$ est une sous variété algébrique du diviseur exceptionnel de $\text{Def}(T_X^*C^n, T_0^*C^n)$. A l'aide du Corollaire 1.2.3, la forme différentielle $L \, d\ell$ est nulle sur $q(Z)$ donc sur $C_{T_0^{[2]}C^n}T_X^{[2]}C^n$.

(a) Dans le produit $C^n \times (\mathbb{C}^n)^* \times (\mathbb{C}^n)^* \times \mathbb{C}^n$, nous pouvons considérer les diverses orbites de l'action du groupe linéaire $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. La variété Z est contenue dans la réunion d'orbites où l'on a :

$$\langle L \cdot \ell \rangle = \langle L \cdot \nu \rangle = \langle N \cdot \ell \rangle = 0.$$

En effet, $q(Z)$ est homogène dans les deux directions ℓ et L , et comme Z est son conormal, $\langle L \cdot \nu \rangle = \langle N \cdot \ell \rangle = 0$. D'autre part, un raisonnement analogue ou le fait que le couple $(X^\circ, 0)$ satisfait les conditions de Whitney, montre que $\langle L \cdot \ell \rangle = 0$.

(b) Puisque $\langle L \cdot \ell \rangle = 0$ et que $L \, d\ell = 0$ sur Z , la forme différentielle $\ell \, dL$ est aussi nulle et la variété Z est stable par la transformation :

$$(\ell, L, N, \nu) \rightarrow (\ell, L, N, \nu + \ell).$$

LEMME 1.5.7. *Supposons que Z soit inclus dans la réunion d'orbites où l'on a $\langle N \cdot \nu \rangle = 0$. Il existe alors un sous-espace vectoriel W de C^n tel que :*

$$Z = W \times \check{W} \times \check{W} \times W.$$

Preuve. Soit (ℓ, L, N, ν) un point de Z dont les projections par p et q sont lisses. Comme $\langle L \cdot \ell \rangle = 0$ sur Z , on voit que (ℓ, L) est un vecteur conormal à $q(Z)$ en (ℓ, L) , ce qui peut s'exprimer par l'inclusion de $r(q(Z))$ dans $p(Z)$ si r est la transformation : $(\ell, L) \rightarrow (L, \ell)$.

Si l'on a de plus $\langle N \cdot \nu \rangle = 0$ sur Z , le même raisonnement prouve que $r(p(Z))$ est inclus dans $q(Z)$. Les deux variétés $q(Z)$ et $p(Z)$ ont donc même dimension qui ne peut être que n , étant entendu que $\dim(Z) = 2n$ et que $\dim(q(Z)) \leq \dim(D) = n$.

On a donc $Z = q(Z) \times q(\check{Z})$ ce qui montre que $q(Z)$ et $p(Z)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n)^*$ et de $(\mathbf{C}^n)^* \times \mathbf{C}^n$.

De plus, $q(Z)$ est alors une composante du diviseur D qui est le conormal de sa projection W dans $\mathbf{C}^n$. Bien sûr, W est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$, et on obtient le résultat du lemme.

1.6. PRINCIPE DE TRANSVERSALITÉ ISOTROPE

Nous regroupons dans cette section diverses conséquences d'un résultat de transversalité des variétés isotropes. Rappelons d'abord une définition.

DÉFINITION 1.6.1. Considérons un germe de variété lisse M que nous identifions au germe à l'origine de $\mathbf{C}^n$. Notons (x) un système de coordonnées sur $\mathbf{C}^n$ et (L) les coordonnées conormales. Une sous variété Λ du cotangent T^*M est dite isotrope si la forme différentielle canonique Ldx est nulle sur un ouvert dense de points lisses de Λ .

LEMME 1.6.2. (de transversalité isotrope). *Désignons par Λ une sous variété isotrope du cotangent $\mathbf{PT}^*\mathbf{P}^{n-1}$. Pour tout entier $1 \leq k \leq n-1$, il existe un ouvert de Zariski $\mathbf{U}$ de la grassmannienne $\mathbf{G}(k; n)$, tel que lorsque V est dans $\mathbf{U}$, l'intersection de Λ avec le cycle polarisant $\mathbf{PV} \times \mathbf{P}\check{V}$ est vide.*

Preuve. Λ est de dimension au plus $n-2$ et le cycle polarisant $\mathbf{PV} \times \mathbf{P}\check{V}$ de codimension $n-1$ dans $\mathbf{PT}^*\mathbf{P}^{n-1}$ où le groupe linéaire agit transitivement. Le théorème de Bertini–Kleiman donne la conclusion. $\square$

Nous pouvons maintenant appliquer ce résultat à un certain nombre de situations sur $C^{[2]}(X)$ ou $E_{C^{[2]}(0)}C^{[2]}(X)$ où il est facile de se ramener à une intersection de variété isotrope avec un cycle *polarisant* du type $\mathbf{PV} \times \mathbf{P}\check{V}$.

COROLLAIRE 1.6.3. *Pour tout entier k , il existe un ouvert de Zariski $\mathbf{U}$ de la grassmannienne $\mathbf{G}(k; n)$ tel que, lorsque V est dans $\mathbf{U}$, l'intersection du cycle $\tau(V)$ défini par*

$$\xi \subset V \subset \check{L}$$

avec l'ensemble des points de $E_{C^{[2]}(0)}C^{[2]}(X)$ (resp. $C^{[2]}(X)$) vérifiant $x = 0$ est contenu dans le lieu des points où $x = v = 0$.

Preuve. Par définition du deuxième conormal, on a sur $C^{[2]}(X)$ l'identité:

$$N dx + v dL = 0$$

sur la sous variété où $x = 0$ on a aussi puisque $dx = 0$ l'égalité:

$$v dL = 0.$$

La projection du fermé $x = 0$ par le morphisme (v, L) est une variété isotrope $\tilde{\Lambda}$, qui est de plus homogène par rapport à la variable v . En appliquant le lemme de transversalité isotrope, on voit que l'intersection de $\Lambda = \mathbf{P}\tilde{\Lambda}$ avec $\mathbf{P}V \times \mathbf{P}\check{V}$ est vide donc que l'intersection de Λ avec $\tau(V)$ est contenue dans le sommet du cône $v = 0$, d'où le résultat annoncé. $\square$

COROLLAIRE 1.6.4. *Pour tout entier k , il existe un ouvert de Zariski $\mathbf{U}$ de la grassmannienne $\mathbf{G}(k; n)$ tel que, lorsque V appartient à $\mathbf{U}$, l'intersection du cycle $\tau(V)$ défini par*

$$\nu \subset V \subset \check{L}$$

avec le diviseur $D_0^{[2]}$ est formée de points (ℓ, L, N, ν) tels que ℓ n'est pas dans le sous espace V .

Preuve. Par définition du deuxième conormal et propriétés de la déformation $\text{Def}(T_X^{[2]} \mathbf{C}^n, T_0^{[2]} \mathbf{C}^n)$, on a sur $D_0^{[2]}$ l'identité:

$$N \, d\ell + \nu \, dL = 0$$

si la droite ℓ est contenue dans V , sur le cycle $\nu \subset V \subset \check{L}$ on a aussi $\ell \subset V \subset \check{L}$ or $D_0^{[2]}$ se projette sur D où la forme différentielle $L \, d\ell$ s'annule.

On intersecte cette variété isotrope homogène avec le cycle polarisant défini par

$$\ell \subset V \subset \check{L}$$

et l'intersection est contenue dans $\ell = 0$.

Sur la sous variété où $\ell = 0$ on a aussi puisque $d\ell = 0$ l'égalité:

$$\nu \, dL = 0$$

la projection de l'intersection de $D_0^{[2]}$ avec $\ell = 0$ sur l'espace des (ν, L) est donc une variété isotrope homogène par rapport à ν . Nous appliquons à l'intersection de cette variété avec le cycle polarisant $\tau(V)$ le lemme de transversalité isotrope, et nous obtenons que sur l'intersection, on devrait avoir $\nu = 0$, ce qui est incompatible avec $\ell = 0$; il n'y a donc pas de tels points, ce qui entraîne le corollaire. $\square$

COROLLAIRE 1.6.5. *Pour tout entier k , il existe un ouvert de Zariski $\mathbf{U}$ de la grassmannienne $\mathbf{G}(k; n)$ tel que, lorsque V appartient à $\mathbf{U}$, la forme linéaire N n'est pas nulle sur les points (ℓ, L, N, ν) de l'intersection du cycle $\tau(V)$ (défini par $\nu \subset V \subset \check{L}$), avec le diviseur $D_0^{[2]}$.*

Preuve. La projection par le morphisme (ν, L) de l'intersection de $D_0^{[2]}$ avec $N = 0$ est isotrope et homogène. La forme différentielle $\nu \, dL$ y est nulle. L'intersection avec le cycle polarisant $\tau(V)$ est contenue dans $\nu = 0$. Mais, sur

$D_0^{[2]}$ on ne peut avoir simultanément $\nu = N = 0$, ce qui donne le résultat. $\square$

Remarque 1.6.6. Nous appellerons $E^{[2]}(X)$ l'éclaté de $\nu = 0$ dans l'espace $E_{C^{[2]}(0)}^{[2]}(X)$ (voir 1.5.5), et noterons ξ la direction du vecteur $\nu \neq 0$ dans $\mathbf{P}^{n-1}$.

Comme nous nous intéressons à la section de $E^{[2]}(X)$ par le cycle

$$\tau(V) = \{(\xi, L); \xi \subset V_k \subset \tilde{L}\}$$

et que l'intersection de $\tau(V)$ avec l'image inverse de $x = 0$ est contenue dans l'ensemble des points (ℓ, L, N, ν, ξ) de $D_0^{[2]}$ vérifiant:

$$\ell \notin V, L \neq 0, N \neq 0,$$

l'intersection $D_0^{[2]} \cap \tau(V)$ admet un plongement dans $\mathbf{P}^{n-1} \times \check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \check{\mathbf{P}}^{n-1} \times E_0(\mathbf{C}^n)$ (où $E_0(\mathbf{C}^n)$ dénote l'éclaté de 0 dans $\mathbf{C}^n$) et se projette sur le produit $\mathbf{P}^{n-1} \times \check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$.

2. Construction des variétés des fronces

Soit X un espace analytique. La question traitée étant locale nous supposons désormais que X est un germe d'espace analytique *irréductible* de dimension pure d , plongé localement dans $(\mathbf{C}^n, 0)$, avec $d \geq 1$ et $n \geq 2$.

Il s'agit d'étudier X relativement à une projection linéaire π de noyau V , espace linéaire de dimension k comprise entre $n - 2$ et $n - d$, dans $\mathbf{C}^n$.

2.1. COMMENT VOIR LES FRONCES

Soient $\pi: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n/V$ une projection linéaire de noyau V ($\dim V = k$, $n - d \leq k \leq n - 2$) et $P(X, V)$ la variété polaire associée.

Si l'on restreint π au lieu lisse de $P(X, V)$ on obtient un nouveau lieu critique, *le lieu des fronces* de X relativement à V . C'est la strate de Thom–Boardman $\Sigma^{d-n+k-1, d-n+k-1}$ de la projection π restreinte à la partie lisse X° .

DÉFINITION 2.1.1. Nous appellerons variété des fronces de X relativement à V – notée $F(X, V)$ –, l'adhérence dans X de ce lieu critique et variété des cusps de X relativement à V – notée $\mathcal{K}(X, V)$ –, l'image de la variété des fronces par la projection π .

2.1.2. Caractérisation des points fronces

Un point x de $P(X, V)$ est critique pour la restriction de π à la partie lisse de $P(X, V)$ si l'intersection de l'espace conormal à $P(X, V)$ en x avec $\check{V}$ est de dimension au moins* 2.

* Comme nous sommes sur la polaire relativement à la direction V cette intersection est déjà au moins de dimension 1 puisque tout hyperplan tangent à X est tangent à $P(X, V)$.

Il s'ensuit que x , lisse sur X , est un point fronce de X relativement à V ,

- s'il existe un L non nul, conormal à X en x , contenu dans $\check{V}$,
- si $P(X, V)$ est lisse en x , c'est à dire si $\dim(\check{t}_x \cap \check{V}) = 1$ et $\dim(T_{x,L} \cap (0 \times V)) = 0$
- si l'intersection de l'espace conormal $T_{x,L}^\vee$ à $T_X^* \mathbb{C}^n$ en (x, L) avec $\check{V} \times V$ est de dimension au moins 2, avec une projection sur t_x de dimension au moins 1.

Nous reformulons cette dernière assertion de la manière suivante: Un point x lisse sur X est un point fronce relativement à V , s'il existe au dessus de lui dans $C^{[2]}(X)$ un point $(x, L, N, v) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^* \times (\mathbb{C}^n)^* \times \mathbb{C}^n$ vérifiant:

$$(L, 0) \in \check{V} \times V,$$

$$(N, v) \in \check{V} \times V,$$

$$(N, v) \notin (\mathbb{C}^n)^* \times \{0\}.$$

Remarquons alors que le point (x, L, N, v) appartient à la réunion d'orbites sous $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ caractérisée par: $(N, v) \in \mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est la variété d'incidence de $(\mathbb{C}^n)^* \times \mathbb{C}^n$, définie par

$$v \in \check{N}.$$

Le lemme qui suit va nous permettre de négliger le cas où ce fermé contient entièrement $\mathrm{Def}(T_X^{[2]} \mathbb{C}^n, T_0^{[2]} \mathbb{C}^n)$. En effet, ceci ne se produit que pour les variétés *linéaires* dont les variétés de fronces sont désespérément vides.

LEMME 2.1.3. *Si tout vecteur (N, v) conormal à $T_X^* \mathbb{C}^n$, vérifie $\langle N \cdot v \rangle = 0$, l'espace X est alors une variété linéaire.*

Preuve. Nous pouvons supposer que X est une composante irréductible d'une intersection complète définie par des équations:

$$\begin{aligned} \phi_{d+1}(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ \phi_n(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Le conormal $T_X^* \circ \mathbb{C}^n$ est l'image de X° par l'application:

$$(x_1, \dots, x_n, \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_n) \rightarrow \left(x_1, \dots, x_n, \sum_{i \geq d+1} \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \dots, \sum_{i \geq d+1} \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_d} \right).$$

Le plan tangent au conormal de X en un point au dessus de x est l'image du plan tangent en x à X par la matrice jacobienne:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \ddots & & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & \cdot & & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \sum_{i=d+1}^n \lambda_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_1^2} & \cdot & \sum_{i=d+1}^n \lambda_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial \phi_{d+1}}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \ddots & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \sum_{i=d+1}^n \lambda_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdot & \sum_{i=d+1}^n \lambda_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_n^2} & \frac{\partial \phi_{d+1}}{\partial x_n} & \cdot & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

L'espace conormal à $T_X^* \mathbb{C}^n$ en un point (x, L) au dessus de x dans X° est donc la somme de $\check{t}_x$ et de l'espace orthogonal à tous les vecteurs colonnes de la matrice jacobienne. On a donc les relations:

$$\begin{aligned} \sum_j v_j \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} &= 0, \quad \text{pour } k > d \\ N_j + \sum_{\ell} \sum_{i>d} v_{\ell} \lambda_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_j \partial x_{\ell}} &= 0, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n. \end{aligned} \tag{1}$$

Si $T_X^{[2]} \mathbb{C}^n$ est entièrement contenu dans la réunion d'orbites $\langle N \cdot v \rangle = 0$, on en déduit l'égalité:

$$\sum_i \sum_{\ell, j} v_{\ell} v_j \lambda_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_j \partial x_{\ell}} = 0,$$

vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^{n-d}$ et v dans $T_x X^\circ$ en tout point de la partie lisse X° .

On en déduit que chaque ϕ_i s'annule sur le plan tangent à X en x ce qui montre que X est linéaire au voisinage du point x , et termine la démonstration. $\square$

Nous supposons désormais que X n'est pas linéaire.

2.2. MULTIPLICITÉS DES VARIÉTÉS DE CUSPS

L'espace $E^{[2]}(X)$ (voir 1.6.6) est muni d'une application canonique dans $\mathbb{P}^{n-1} \times \check{\mathbb{P}}^{n-1}$ décrite par:

$$(\ell, L, N, \nu, \theta, \xi) \rightarrow (\xi, L).$$

Pour tout sous espace vectoriel V_k de dimension k dans $\mathbb{C}^n$, on construit le cycle $V_k \times \check{V}_k$ de $\mathbb{P}^{n-1} \times \check{\mathbb{P}}^{n-1}$.

PROPOSITION 2.2.1. *Pour un plan V_k suffisamment général dans la grassmannienne $\mathbf{G}(k, n)$, l'éclaté de 0 dans le conormal de la polaire $P(X, V_k)$ est la projection par l'application*

$$(\ell, L, N, \nu, \theta, \xi) \rightarrow (\ell, N, \theta)$$

de l'intersection de $E^{[2]}(X)$ avec $\xi \subset V_k \subset L$.

Preuve. Si V_k est assez général, et si $(\ell, L, N, \nu, \theta, \xi)$ est un point de $E^{[2]}(X)$ tel que $\xi \subset V_k \subset L$, avec $x = \ell\theta$ sur $X \setminus 0$, alors, d'après la Remarque 1.6.6, L est une limite d'hyperplan tangent en $x = \ell\theta$ contenant V_k , donc $x \in P(X, V_k)$,

N est une limite d'hyperplan tangent en x à $P(X, V_k)$.

On en déduit que l'éclaté de l'origine dans la polaire, $E_0C(P(X, V_k))$, est contenu dans la projection de l'intersection de $E^{[2]}(X)$ avec $\xi \subset V_k \subset L$ puisque, au dessus des points lisses de la polaire $P(X, V_k)$ on a égalité.

Notons que l'intersection du cycle $\xi \subset V_k \subset L$ avec $D_0^{[2]}$ est de dimension strictement inférieure à celle de son intersection avec $E^{[2]}(X)$, de même que l'intersection avec la transformée stricte des points singuliers de X . Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit donc de la vérifier au dessus des points $x \neq 0$ lisse sur X . $\square$

THÉORÈME 2.2.2. *Soient k et j deux entiers vérifiant $n - d \leq k \leq k + j \leq n - 2$. Il existe un ouvert dans l'espace des drapeaux $\mathbf{D}(k, k + j; n)$ tel que pour tout élément $V_k \subset V_{k+j}$ de cet ouvert, le dirimant de la projection de la variété polaire $P(X, V_k)$ parallèlement à V_{k+j} a la multiplicité du dirimant d'une projection générale de $P(X, V_k)$ sur un plan de dimension $n - k - j$.*

Preuve. Nous devons montrer, d'après le Théorème 1.3.2, que le cycle $V_{k+j} \times \check{V}_{k+j}$ évite le diviseur exceptionnel $D_0^{[V_k]}$ de dimension $n - 2$ dans l'espace $E_0C(P(X, V_k))$. D'après la proposition précédente, il suffit pour cela de prouver que le cycle

$$\tau_{k,j} = \{(\ell, L, N, \nu); (\ell \subset V_{k+j} \subset \check{N}, \nu \in V_k \subset \check{L})\}$$

ne rencontre pas le diviseur exceptionnel de $E_{C^{[2]}(0)}C^{[2]}(X)$.

Ce dernier est contenu (voir la Remarque 1.6.6) dans la sous-variété de $\mathbf{P}^{n-1} \times \check{\mathbf{P}}^{n-1} \times \mathbf{C}^n$ définie par:

$$\ell \subset \check{L}, \ell \subset \check{N}, \nu \in \check{L}.$$

Dans cette sous-variété le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ a plusieurs orbites: l'orbite ouverte dense, celle où $0 \neq \nu \in \check{N} \neq \check{L}$, et les autres contenues dans les fermés $\ell \wedge \nu = 0$ et $N = L$.

Soit Z une composante du diviseur exceptionnel de $E_{C^{[2]}(0)}C^{[2]}(X)$.

Si $\nu = 0$ sur Z , la forme différentielle $N \, d\ell$ est nulle sur Z . La projection de Z par le morphisme (ℓ, N) est donc évitée par un cycle polarisant assez général $V_{k+j} \times \check{V}_{k+j}$. Il s'ensuit que Z est évitée par $\tau_{k,j}$.

Supposons maintenant que $0 \neq \nu \in \ell$. On a alors $\ell \subset V_k \subset \check{L}$, ce qui est impossible à cause du lemme de transversalité isotrope. De même dans le fermé $N = L$, où la condition $\ell \subset V_{k+j} \subset \check{N}$ impose $\ell \subset V_{k+j} \subset \check{L}$.

D'après le lemme de Bertini–Kleiman, comme $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ agit transitivement sur l'orbite dense, l'intersection du cycle $\tau_{k,j}$ de codimension $2n - 3$ avec une composante Z de dimension $2n - 4$ est vide si Z n'est pas entièrement contenue dans l'orbite d'équation

$$\ell \wedge \nu \neq 0; \quad \nu \in \check{N} \neq \check{L}.$$

Dans le cas contraire nous avons montré en 1.5.7 qu'il existe un sous-espace vectoriel W tel que:

$$Z = \{(\ell, L, N, \nu); \ell \subset W \subset \check{L}, \nu \in W \subset \check{N}\}.$$

On voit alors que lorsque V_{k+j} est en position générale relativement à W on a soit $W \cap V_{k+j} = 0$, soit $\check{W} \cap \check{V}_{k+j} = 0$, ce qui montre que $Z \cap \tau_{k,j}$ est vide. $\square$

Nous pouvons même montrer un énoncé plus précis, qui assure que dès que la polaire a été construite de façon générique (cf le Théorème 1.3.2), on peut trouver des projections de noyaux *contenant le plan de définition de la polaire* qui induisent des dirimants de la polaire génériques (pour la multiplicité).

THÉORÈME 2.2.3. *Soient k et j deux entiers vérifiant $n - d \leq k \leq k + j \leq n - 2$. Soit V_k un plan de dimension k tel que le cycle $V_k \times \check{V}_k$ évite le diviseur exceptionnel $D_0(X)$ de dimension $n - 2$ dans l'espace $E_0 C(X)$. Il existe un ouvert dans l'espace des j -plans $\mathbf{G}(j; n - k)$ tel que pour tout élément V_{k+j}/V_k de cet ouvert, le dirimant de la projection de la variété polaire $P(X, V_k)$ parallèlement à V_{k+j} a la multiplicité du dirimant d'une projection générale de $P(X, V_k)$ sur un plan de dimension $n - k - j$.*

Preuve. Nous devons montrer, comme dans le théorème précédent, que le cycle

$$\tau_{k,j} = \{(\ell, L, N, \nu); (\ell \subset V_{k+j} \subset \check{N}, \nu \in V_k \subset \check{L})\}$$

ne rencontre pas le diviseur exceptionnel de l'éclaté $E_{C^{[2]}(0)} C^{[2]}(X)$, que nous noterons $D_{C^{[2]}(0)} C^{[2]}(X)$. Considérons le cycle σ_k

$$\sigma_k = \{(\ell, L, N, \nu); (\nu \in V_k \subset \check{L})\}.$$

La projection:

$$\mathcal{E}_\pi: D_{C^{[2]}(0)} C^{[2]}(X) \cap \sigma(V_k) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbb{C}^n/V_k) \times \check{\mathbf{P}}(\mathbb{C}^n/V_k)$$

donnée par $(\pi([\ell]), \tilde{\pi}(N))$, n'est a priori définie que sur l'ouvert où $\ell \not\subset V_k$ et N ne s'annule pas. Cette application est en fait partout définie d'après 1.6.4 et 1.6.5. En utilisant 2.2.1, on montre que l'intersection $D_{C^{[2]}(0)} C^{[2]}(X) \cap \sigma(V_k)$ a pour image le diviseur exceptionnel de l'éclaté de l'origine dans le conormal du lieu des cusps $\mathcal{K}(X, V_k)$, diviseur que nous noterons $D_0(\mathcal{K}(V_k))$. D'après le lemme de Bertini–Kleiman, il existe un ouvert dense des plans W_j de dimension j tel que pour un plan W_j dans cet ouvert l'intersection $D_0(\mathcal{K}(X, V_k)) \cap W_j \times \check{W}_j$ soit vide. Remontons W_j en V_{k+j} (tel que $V_{k+j}/V_k = W_j$). Remontons alors le cycle $W_j \times \check{W}_j$ en le cycle θ_{k+j}

$$\theta_{k+j} = \{(\ell, L, N, \nu); (\ell \subset V_{k+j} \subset \check{N})\}.$$

Par construction de ce cycle on peut déduire que

$$D_{C^{[2]}(0)} C^{[2]}(X) \cap \sigma(V_k) \cap \theta_{k+j} = \emptyset$$

ce qui montre que le cycle $\tau_{k,j}$ ne rencontre pas $D_{C^{[2]}(0)} C^{[2]}(X)$. $\square$

Remarque 2.2.4. Le théorème précédent a un analogue pour la projection de $P(X, V_k)$ parallèlement à V_{n-1} .

Il suffit pour le voir de considérer l'espace:

$$\mathcal{X} = \{(x, g) \in \mathbb{C}^n \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}); g(x) \in P(X, V_k)\}.$$

La projection $\phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est munie d'une section dont l'image est $\mathcal{Y} = 0 \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Lorsque V_{k+j} est assez général, précisément lorsque $\tau_{k,j}$ évite $D_0^{[2]}$, le dirimant de ϕ associé à V_{k+j} est équivariable au voisinage de l'identité de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. En particulier le dirimant de ϕ qui a la dimension de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est vide. On en déduit par exemple que la famille des projections de la courbe polaire $P(X, V_{n-2})$ est équivariable et ses variétés polaires relatives différentes d'elle même sont vides; on n'en déduit pas encore que son lieu singulier est réduit à $0 \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (voir 4.2.6).

THÉORÈME 2.2.5. *Les multiplicités polaires des variétés de cusps générales de X sont des invariants analytiques de X .*

Preuve. Nous venons de voir que le dirimant $\Delta(P(X, V_k), V_{k+j})$ a, pour un drapeau général, une multiplicité égale à celle du dirimant d'une projection générale de $P(X, V_k)$.

Or celle-ci s'obtient, par la formule de projection, en intersectant le diviseur de l'éclatement du conormal de la polaire, $E_0 C(P(X, V_k))$, que nous allons noter $D_0^{[V_k]}$, ($D_0^{[V_k]} \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \check{\mathbb{P}}^{n-1}$) avec le cycle $U_{k+j+2} \times \check{U}_{k+j}$, soit encore en intersectant le diviseur $D_0^{[2]}$ avec le cycle $\vartheta_{k,j}$ défini par:

$$\{(\ell, L, N, \xi); (\ell \subset U_{k+j+2}, N \subset \check{U}_{k+j}, \xi \subset V_k \subset \check{L})\}$$

et déterminé par deux drapeaux généraux $(V_i)_i$ et $(U_i)_i$.

Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ agit transitivement sur la variété $\mathbf{D}(1, n-1; n) \times \mathbf{D}(1, n-1; n)$ de la manière suivante:

$$(g, g')(\ell, L, N, \xi) = (g(\ell), g'(\check{L}), g(\check{N}), g'(\xi)).$$

La codimension de $\vartheta_{k,j}$ y est $2n-3$. Le nombre d'intersection de $D_0^{[2]}$ avec $\vartheta_{k,j}$ ne dépend que du type projectif de $D_0^{[2]}$ qui, nous le verrons en 3.2, est un invariant analytique de X .

D'autre part, la multiplicité de $\Delta(P(X, V_k), V_{k+j})$ s'obtient, également par la formule de projection, en intersectant le diviseur $D_0^{[V_k]}$ de l'éclaté du conormal de la polaire $E_0C(P(X, V_k))$ avec le cycle $V_{k+j+2} \times \check{V}_{k+j}$. Cette intersection est l'image de l'intersection du diviseur $D_0^{[2]}$ avec le cycle

$$\theta_{k,j} : \{\ell, L, N, \xi; \ell \subset V_{k+j+2}, N \subset \check{V}_{k+j}, \xi \subset V_k \subset \check{L}\}.$$

On considère cette fois l'action diagonale de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ pour laquelle on note quatre orbites en dehors de l'orbite dense, respectivement définies par:

$$\ell \neq \xi \subset \check{N} \neq \check{L},$$

$$\ell \neq \xi \subset N = L,$$

$$\ell = \xi \subset N \neq L,$$

et

$$\ell = \xi \subset N = L.$$

On étudie l'intersection de $\theta_{k,j}$ avec $D_0^{[2]}$ dans chacune de ces orbites de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.

L'intersection de $\theta_{k,j}$ avec le fermé $D_0^{[2]} \cap (\ell = \xi)$ est vide d'après 1.6.4.

La restriction de $E^{[2]}(X)$ au fermé $N = L$ s'identifie à l'éclaté de 0 dans le produit fibré $C(X) \times_X \mathbf{P}TX$. L'intersection de $\theta_{k,j}$ avec $D_0^{[2]} \cap (N = L)$ se projette donc sur l'intersection du diviseur D_0 de l'éclatement $E_0C(X)$ avec le cycle $V_{k+j+2} \times \check{V}_{k+j}$ de $\mathbf{P}^{n-1} \times \check{\mathbf{P}}^{n-1}$. Il existe un ouvert Ω_1 de la variété des drapeaux de $\mathbf{C}^n$ tel que pour $(V_i)_i$ dans cet ouvert, cette dernière intersection est constituée d'un nombre fini de points.

Soit Z une composante de $D_0^{[2]}$. Dans l'intersection de Z avec la première orbite ($\ell \neq \xi \subset \check{N} \neq \check{L}$), il existe une sous variété $\tilde{Z}$ de dimension $2n-4$ qui est la trace sur Z de la transformée stricte $\tilde{E}^{[2]}(X)$ dans $E^{[2]}(X)$ du fermé $\xi \subset \check{N}$. On notera de même $\tilde{D}_0^{[2]}$ la trace du diviseur exceptionnel $D_0^{[2]}$ sur $\tilde{E}^{[2]}(X)$. D'après Bertini-Kleiman, il existe un ouvert $\Omega_2 \subset \Omega_1$ de la variété des drapeaux de $\mathbf{C}^n$ tel

que pour $(V_i)_i$ dans cet ouvert, l'intersection $\tilde{Z} \cap \theta_{k,j}$ est constituée d'un nombre fini de points.

Remarquons enfin que l'intersection de $D_0^{[V_k]}$ avec $V_{k+j+2} \times \check{V}_{k+j}$ est elle aussi constituée d'un nombre fini de points et que l'intersection de ce même cycle avec $E_0C(P(X, V_k))$ est une réunion de germes de courbes centrés en ces points. Chacune de ces courbes se relève de manière unique en une courbe de $E^{[2]}(X) \cap (\xi \subset V_k \subset \check{L})$ le long de laquelle nous avons $\xi \subset \check{N}$. Il s'ensuit que $D_0^{[V_k]} \cap (V_{k+j+2} \times \check{V}_{k+j})$ est contenu dans la projection de $\tilde{D}_0^{[2]} \cap \theta_{k,j}$.

On en déduit, d'après la formule de projection, que la multiplicité de l'intersection $D_0^{[V_k]} \cap (V_{k+j+2} \times \check{V}_{k+j})$ est la somme de

- la multiplicité d'intersection de $\tilde{D}_0^{[2]}$ avec $\theta_{k,j}$ dans l'orbite ($\ell \neq \xi \subset \check{N} \neq \check{L}$),
- la multiplicité d'intersection de D_0 avec $V_{k+j+2} \times \check{V}_{k+j}$.

On remarque (voir 1.3.2) que ces deux dernières multiplicités sont respectivement celles des deux composantes – non nécessairement irréductibles – du dirimant de la projection:

$$P(X, V_k) \rightarrow \mathbb{C}^n / V_{k+j}.$$

Ce dirimant est la réunion de deux hypersurfaces de $\mathbb{C}^n / V_{k+j}$:

- le dirimant $\Delta(X, V_{k+j})$ de la projection: $X \rightarrow \mathbb{C}^n / V_{k+j}$,
- le dirimant $\Delta(K(X, V_k), V_{k+j})$ de la projection: $\mathcal{K}(X, V_k) \rightarrow \mathbb{C}^n / V_{k+j}$.

Nous avons donc démontré la proposition suivante:

PROPOSITION 2.2.6. *La multiplicité du dirimant $\Delta(P(X, V_k), U_{k+j})$ d'une projection générale de la variété polaire est égale à la somme de la multiplicité du dirimant $\Delta(X, V_{k+j})$ et de la multiplicité du dirimant $\Delta(\mathcal{K}(X, V_k), V_{k+j})$.*

On en déduit que la multiplicité à l'origine de $\Delta(\mathcal{K}(X, V_k), V_{k+j})$ est invariante par l'action d'un isomorphisme de $\mathbb{C}^n$, puisque nous avons montré que la multiplicité de $\Delta(P(X, V_k), U_{k+j})$ est invariante par isomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et que la multiplicité de $\Delta(X, V_{k+j})$ l'est aussi (voir [Henry–Merle–Sabbah] Proposition 4.4.6 p. 254).

Il nous reste à étudier la dépendance à l'égard du plongement de X . Considérons un plongement minimal de X dans $\mathbb{C}^n$ et remarquons que les multiplicités polaires des variétés de cusps sont inchangées quand on prend le plongement de X dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ induit par le plongement de $\mathbb{C}^n \times 0$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$. En effet, l'espace $T_X^{[2]} \mathbb{C}^{n+p}$ est alors le produit de $T_X^{[2]} \mathbb{C}^n$ par un facteur linéaire.

3. Construction des variétés de doubles plis

Pour une projection linéaire $\pi: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n/V$ dont le noyau V est de dimension k , $(n - d - 1 \leq k \leq n - 2)^*$, on construit la variété polaire $P(X, V)$ associée à V .

Si l'on restreint π au lieu lisse de $P(X, V)$, on étudie l'ensemble des couples de points distincts qui ont même image par π , et sa projection dans $\mathbf{C}^n/V$ que nous appellerons *le lieu des points doubles* du dirimant $\Delta(X, V)$.

DÉFINITION 3.0.1. La variété des points doubles $\mathcal{D}(X, V)$ du dirimant est l'adhérence dans $\mathbf{C}^n/V$ du lieu des points de $\Delta(X, V)$ image par π d'un couple de points distincts de $P(X, V)$.

3.1. L'ESPACE DES DOUBLES PLIS

Nous identifions $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ au produit de la diagonale Δ par $0 \times \mathbf{C}^n$; nous choisissons des coordonnées $(z', h = z'' - z')$ compatibles avec cette décomposition et les coordonnées cotangentes correspondantes (z', h, H, M'') sur le cotangent $T^*(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n)$.

Partant de la déformation $\text{Def}(T_{X \times X}^*, T_{\Delta}^*)$, qui est l'adhérence dans $T^*(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n) \times \mathbf{C}$ du sous-ensemble

$$\{(z', v, N, M'', \delta); \delta \neq 0, (z', \delta v, \delta N, M'') \in T_{X \times X}^*\}$$

on déforme l'espace obtenu au cône normal de la transformée stricte $\tilde{T}_{0 \times 0}^*$, enfin on déforme le résultat au cône normal de la transformée stricte de Δ .

Le résultat final est l'adhérence du sous-ensemble de $T^*(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n) \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$

$$\{(\ell', \xi, N, M'', \delta, \zeta, \theta); \delta \zeta \theta \neq 0, (\zeta \ell', \theta \zeta \delta \xi, \delta N, M'') \in T_{X \times X}^*\}.$$

L'éclatement $E_Y X$ de Y dans X peut s'interpréter comme le quotient par l'action de $\mathbf{C}^\times$ du complémentaire de la section nulle dans la déformation de X au cône normal à Y dans X .

L'espace $\mathcal{P}^{[2]}(X)$ que nous étudions est le quotient, par l'action de $(\mathbf{C}^\times)^4$ définie ci-dessous, de l'ouvert où M'' et ξ ne s'annulent pas

$$(\alpha, \beta, \gamma, \chi) \cdot (\ell', \xi, N, M'', \delta, \zeta, \theta) \rightarrow \left(\gamma \ell', \chi \gamma \beta \xi, \beta \alpha N, \alpha M'', \frac{\delta}{\beta}, \frac{\zeta}{\gamma}, \frac{\theta}{\chi} \right).$$

Il peut s'obtenir également en partant de l'ouvert de $C(X \times X)$ où $M'' \neq 0$, en éclatant successivement les sous-espaces $C(\Delta)$ puis la transformée stricte $\tilde{T}_{0 \times 0}^*$ de 0×0 , enfin la transformée stricte de la diagonale Δ de $X \times X$.

Sur $\mathcal{P}^{[2]}(X)$ nous avons un diviseur $D_0^{[2]}$ qui est l'image inverse de $\tilde{T}_{0 \times 0}^*$ (image dans le quotient du fermé $\zeta = 0$).

* On notera qu'ici, à la différence du cas des fronces, on considère aussi la polaire $P(X, V_{n-d-1})$ qui est égale à X et le dirimant $\Delta(X, V_{n-d-1})$ qui est la projection hypersurface de X .

L'espace $\mathcal{P}^{[2]}(X)$ est muni d'une application canonique dans $\mathbf{P}^{n-1} \times \check{\mathbf{P}}^{n-1}$ décrite par:

$$(\ell', \xi, N, M'', \delta, \zeta, \theta) \rightarrow (\xi, M'').$$

L'espace $\mathcal{P}\ell(X, \mathbf{C}^n)$ est défini comme la transformée stricte dans $\mathcal{P}^{[2]}(X)$ du fermé défini par: $(\xi \subset \check{M}'')$.

PROPOSITION 3.1.1. *$\mathcal{P}\ell(X, \mathbf{C}^n)$ est un espace de dimension $2n-2$. Il se projette dans $C(X \times X)$ sur le fermé de codimension 1 défini par la relation $(h \subset \check{M}'')$.*

Dans l'espace $\mathcal{P}\ell(X, \mathbf{C}^n)$, l'image inverse de la transformée stricte de 0×0 (ou de $T_{0 \times 0}^*$) dans $E_{C(\Delta)}C(X \times X)$ est un diviseur noté $\mathcal{D}_0$ (image dans le quotient du fermé d'équation $\zeta = 0$). Pour tout sous espace vectoriel V_k de dimension k dans $\mathbf{C}^n$, on construit le cycle $\tau(V_k) = V_k \times \check{V}_k = \{\xi \subset V_k \subset \check{M}'' \text{ de } \mathbf{P}^{n-1} \times \check{\mathbf{P}}^{n-1}\}$.

Pour V_k suffisamment général dans la grassmannienne $\mathbf{G}(k, n)$, la projection par l'application

$$pr: (\ell', \xi, N, M'', \delta, \zeta, \xi, \theta) \rightarrow (\ell', N)$$

de l'intersection de $\tau(V_k)$ avec $\mathcal{D}_0$ (resp. $\mathcal{P}\ell(X, \mathbf{C}^n)$) est de dimension $n-2$ (resp. $n-1$).

Donnons quelques conséquences du lemme de transversalité isotrope analogues à celles de la section 1.6 et valables pour les doubles plis.

COROLLAIRE 3.1.2. *Pour tout entier k il existe un ouvert de Zariski $\mathbf{U}$ de la grassmannienne $\mathbf{G}(k; n)$, tel que lorsque V_k est dans $\mathbf{U}$, l'intersection, du cycle $\tau(V_k)$ avec l'ensemble des points de $\mathcal{P}^{[2]}(X)$ (resp. $\mathcal{P}\ell(X, \mathbf{C}^n)$) vérifiant $z' = z'' = 0$ est contenu dans le lieu des points où $z' = v = 0$.*

Preuve. Sur le fermé $\langle M'' \cdot v \rangle = 0$ de l'éclaté $E_{C(\Delta)}C(X \times X)$ les deux formes différentielles:

$$\begin{aligned} M' dz', \\ N dz' + M'' dv \end{aligned}$$

sont nulles. Sur la sous variété où $z' = 0$ on a aussi, puisque $dz' = 0$ l'égalité:

$$M'' dv = 0.$$

La projection du fermé $z' = z'' = 0$ par le morphisme (M'', v) est une variété isotrope homogène par rapport à la variable v (l'homogénéité est assurée seulement au dessus de $z' = z''$). En appliquant le lemme de transversalité isotrope, nous voyons que l'intersection de cette projection avec $\tau(V_k)$ est contenue dans le

sommet du cône $v = 0$, d'où le résultat annoncé. $\square$

COROLLAIRE 3.1.3. *Pour tout entier k , il existe un ouvert de Zariski U de la grassmannienne $G(k; n)$, tel que lorsque V_k appartient à U , le vecteur ℓ' n'est pas nul sur l'intersection du cycle $\tau(V_k)$ avec le diviseur $\mathcal{D}_0$.*

Preuve. Sur le fermé $\ell' = 0$ du diviseur $\mathcal{D}_0$ la forme différentielle $M'' d\xi$ est nulle, ce qui montre que la projection de ce fermé par le morphisme (M'', ξ) est une variété isotrope homogène par rapport à v .

Son intersection avec un cycle polarisant général

$$\xi \subset V_k \subset \check{M}''$$

est contenue dans $\xi = 0$, donc vide puisqu'on ne peut avoir simultanément $\ell' = \xi = 0$. $\square$

COROLLAIRE 3.1.4. *Pour tout entier k il existe un ouvert de Zariski U de la grassmannienne $G(k; n)$, tel que lorsque V_k appartient à U , la forme linéaire N n'est pas nulle sur les points (ℓ', ξ, N, M'') de l'intersection du cycle $\tau(V_k)$ avec le diviseur $\mathcal{D}_0$.*

Preuve. La projection par le morphisme (v, M'') de l'intersection de $\mathcal{D}_0$ avec $N = 0$ est isotrope et homogène. La forme différentielle:

$$M'' dv$$

y est nulle. L'intersection avec le cycle polarisant $\tau(V)$ est contenue dans $v = 0$. Mais, sur $\mathcal{D}_0$ on ne peut avoir simultanément $v = N = 0$, ce qui donne le résultat. $\square$

3.2. INVARIANCE ANALYTIQUE

Nous prouvons le lemme suivant:

LEMME 3.2.1. *Le diviseur $D_0^{[2]}$ (resp. $\mathcal{D}_0$), défini par l'idéal (z', v) dans $\mathcal{P}^{[2]}(X)$ (resp. $\mathcal{P}\ell(X, \mathbb{C}^n)$), est invariant sous l'action d'un isomorphisme analytique tangent à l'identité.*

Preuve. Nous considérons un isomorphisme analytique Φ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$; étudions son action sur l'espace $(T_X^* \mathbb{C}^n)^2$.

Soit z' (resp. $z'' = z' + h$) un point de X° et M' (resp. $M'' = H - M'$) un vecteur conormal en z' (resp. en z'') à X . Nous avons, en négligeant les termes d'ordre 2 en v :

$$d\Phi_{z'+h}^{*-1}(M'') = d\Phi_{z'}^{*-1}(M'') - d\Phi_{z'}^{*-1} d^2\Phi_{z'}(h, -)^* d\Phi_{z'}^{*-1}(M''),$$

où l'on a noté $d^2\Phi_{z'}(v, -)$ l'application linéaire:

$$d^2\Phi_{z'}(v, -) : w \rightarrow d^2\Phi_{z'}(v, w).$$

On en déduit

$$d\Phi_{z''}^{*-1}(H) = d\Phi_{z'}^{*-1}(H) - d\Phi_{z'}^{*-1}d^2\Phi_{z'}(h, -)^*d\Phi_{z'}^{*-1}(M'').$$

Si $M'' + M' = H$ a une limite finie non nulle lorsque z' et z'' (donc h) tendent vers 0, cette limite est transformée linéairement par l'application $d\Phi_0^{*-1}$.

Si $M'' + M' = H$ tend vers 0 en même temps que h , pendant que M'' a une limite finie non nulle L , on voit que la limite de la direction associée à $M'' + M'$ est transformée linéairement par $d\Phi_0^{*-1}$ si la quantité $\|h\|$ tend plus vite vers 0 que $\|H\|$, ce qui est le cas au voisinage du diviseur $\mathcal{D}_0$.

Reste à montrer que le diviseur $\mathcal{D}_0$ est invariant par Φ . L'isomorphisme Φ transforme $h = z'' - z'$ en $\Phi(z'') - \Phi(z')$ et M'' en $d\Phi_{z''}^{*-1}(M'')$.

$$\Phi(z'') - \Phi(z') = -d\Phi_{z''}(h) - \frac{1}{2}d^2\Phi_{z''}(h, h) + o(\|h\|^2).$$

On voit donc que le diviseur $\mathcal{D}_0$ est laissé fixe par l'action d'un isomorphisme Φ tangent à l'identité. $\square$

PROPOSITION 3.2.2. *Pour V_k suffisamment général, la projection de $\mathcal{P}\ell(X, \mathbf{C}^n) \cap \tau(V_k)$ par pr est:*

- lorsque $k = n - d - 1$, l'éclaté de $C(0)$ dans la réunion du conormal $C(P(X, V_{n-d-1})) = C(X)$ et du conormal $C(\pi_{V_{n-d-1}}^{-1}(\mathcal{D}(X, V_{n-d-1})))$ de l'image inverse dans X des points doubles de la projection $\pi_{V_{n-d-1}}$,
- lorsque $k = n - d$, l'éclaté de $C(0)$ dans le conormal $C(\pi_{V_k}^{-1}(\Delta(X, V_k)))$; la variété polaire $P(X, V_{n-d})$ est alors une composante de l'image inverse du dirimant $\pi_{V_{n-d}}^{-1}(\Delta(X, V_{n-d}))$,
- Lorsque $k > n - d$, l'éclaté de $C(0)$ dans la réunion des deux conormaux:

$$C(P(X, V_k)) \quad \text{et} \quad C(\pi_{V_k}^{-1}(\Delta(X, V_k))).$$

Preuve. Pour V_k suffisamment général, l'intersection de $\tau(V_k)$ avec $\mathcal{D}_0$ est contenue dans l'adhérence de l'intersection de $\tau(V_k)$ avec l'image inverse dans $\mathcal{P}\ell(X, \mathbf{C}^n)$ de $T_{X^\circ \times X^\circ}^* \setminus T_{\Delta}^*$.

Donc, pour tout point $(\ell', \xi, N, M'', \delta, \zeta, \theta)$ de la composante, le point $z'' = z' + \delta\zeta\theta\xi$ est un point de la polaire $P(X, V_k)$, le point $z' = \zeta\ell'$ a même image que z'' par la projection de noyau V_k et N est un plan tangent à $\pi_{V_k}^{-1}(\Delta(X, V_k))$ en z' si $k > n - d - 1$ et tangent à $\pi_{V_{n-d-1}}^{-1}(\mathcal{D}(X, V_{n-d-1}))$ si $k = n - d - 1$.

Nous disposons maintenant de deux sous espaces de $\mathbf{C}^n$, d'une part $P(X, V)$, d'autre part $\pi_{V_k}^{-1}(\Delta(X, V_k))$ si $k > n - d - 1$, (resp. $\pi_{V_{n-d-1}}^{-1}(\mathcal{D}(X, V_{n-d-1}))$) pour $k = n - d - 1$).

DÉFINITION 3.2.3. Nous appellerons *ombre portée* $O(X, V_k)$ sur X par la projection π_{V_k} ,

- si $k > n - d$, le sous espace image inverse du dirimant $\Delta(X, V_k)$ par la projection π ;
- si $k = n - d$, le morphisme $X \rightarrow \mathbb{C}^n/V_{n-d}$ est fini et $O(X, V_{n-d})$ est alors la réunion des composantes de l'image inverse du dirimant $\Delta(X, V_k)$ qui ne sont pas contenues dans la variété polaire $P(X, V_k)$;
- enfin, $O(X, V_{n-d-1})$ est le lieu des points de X où la projection de X sur $\mathbb{C}^n/V_{n-d-1}$ n'est pas injective.

Nous considérons un sous espace vectoriel U_{k+j} de dimension $k + j$ dans $\mathbb{C}^n$ et la projection linéaire de noyau U_{k+j} . Pour cette projection linéaire, on construit les deux dirimants $\Delta(P(X, V_k), U_{k+j})$ et $\Delta(O(X, V_k), U_{k+j})$.

Lorsque $U_{k+j} = V_{k+j} \supset V_k$, on obtient alors, par construction, pour le premier la réunion

- du dirimant $\Delta(X, V_{k+j})$,
- du dirimant $\Delta(\mathcal{K}(X, V_k), V_{k+j})$,

et pour le second, outre $\Delta(X, V_{k+j})$, le dirimant $\Delta(\mathcal{D}(X, V_k), V_{k+j})$.

THÉORÈME 3.2.4. Soient k et j deux entiers vérifiant $n - d - 1 \leq k \leq k + j \leq n - 2$. Il existe un ouvert dans l'espace des drapeaux $\mathbf{D}(k, k + j; n)$ tel que pour tout élément $V_k \subset V_{k+j}$ de cet ouvert, le dirimant de la projection de $O(X, V_k)$ parallèlement à V_{k+j} a même multiplicité que celui d'une projection générale sur un espace de dimension $n - k - j$.

Preuve. En vertu de 1.3.2 et utilisant 2.2.2 il nous suffit de montrer que le cycle $V_{k+j} \times \check{V}_{k+j}$ évite le diviseur exceptionnel de l'espace éclaté de $C(0)$ dans la réunion des conormaux de $\Delta(X, V_k)$, $\mathcal{K}(X, V_k)$ et $\mathcal{D}(X, V_k)$.

D'après la proposition précédente, ceci revient à montrer que la projection $pr(\mathcal{P}\ell(X, \mathbb{C}^n) \cap \tau(V_k))$ est évitée par le cycle $\ell' \subset V_{k+j} \subset \check{N}$, soit encore que le diviseur $\mathcal{D}_0$ ne rencontre pas, au moins pour un drapeau assez général, le cycle défini par:

$$\tau_{k,j} = \{(\ell', \eta, N, M'', \delta, \xi); \ell' \subset V_{k+j} \subset \check{N}, \xi \subset V_k \subset \check{M}''\}.$$

Notons que, en dépit des apparences, le cycle $\tau_{k,j}$ est invariant par l'involution de $X \times X$.

Nous allons montrer, en fait, qu'un translaté général du cycle $\tau_{k,j}$ ne rencontre pas le diviseur $D_0^{[2]}$ de l'espace $\mathcal{P}^{[2]}(X)$. Comme $\tau_{k,j}$ est contenu dans le fermé $\xi \subset \check{M}''$ il suffit de montrer que $\tau_{k,j}$ évite l'intersection de $D_0^{[2]}$ avec ce fermé.

Soit Z une composante de $D_0^{[2]}$.

Si Z se projette sur $C(\Delta)$, les formes différentielles

$$M' d\ell' \quad \text{et} \quad N d\ell' + M' d\eta$$

sont nulles sur $Z_1 = Z \cap \{\xi \in \check{M}''\}$. On peut donc conclure comme dans 2.2.2 puisque Z_1 est alors contenue dans le conormal d'une variété isotrope.

Si Z ne se projette pas entièrement à l'intérieur de $C(\Delta)$, il existe alors une composante $\hat{Z}$ de l'éclatement de $C(0 \times 0)$ dans $C(X \times X)$ dont la transformée stricte par l'éclatement de l'idéal de $C(\Delta)$ contient Z .

Une telle composante est égale au quotient par les homothéties:

$$(\ell', M', \ell'', M'') \rightarrow (\alpha\ell', \beta M', \alpha\ell'', \beta M'')$$

du produit $Z' \times Z''$ de deux composantes du diviseur de la déformation de $T_X^* \mathbb{C}^n$ sur le cône normal à $T_0^* \mathbb{C}^n$.

On obtient Z en prenant la transformée stricte de $\hat{Z}$ dans $\mathcal{P}^{[2]}(X)$.

$$\begin{array}{c} Z' \times Z'' \\ \downarrow q \\ q(Z') \times q(Z'') \end{array}$$

D'après le Théorème 2.2.2, le cycle $\tau_{k,j}$ ne rencontre pas le diviseur exceptionnel Z_0 de l'éclatement de $C(\Delta)$ dans $\hat{Z}$.

Si $\hat{Z}$ est coupée en codimension 2 par le fermé F défini par:

$$\begin{aligned} \langle \ell' \cdot M' + M'' \rangle &= 0, \\ \langle \eta \cdot M' + M'' \rangle &= 0, \end{aligned}$$

alors $Z \cap \tau_{k,j}$ est vide, d'après le lemme de Bertini–Kleiman.

Remarquons que F est aussi défini dans $\hat{Z}$ par les deux relations:

$$\begin{aligned} \langle \ell' \cdot M'' \rangle &= 0, \\ \langle \ell'' \cdot M' \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Etudions maintenant les cas où $\hat{Z}$ est rencontrée en codimension 0 ou 1 par le fermé F .

Si le produit $Z' \times Z''$ est entièrement contenu dans F , alors, pour tout couple $((\ell', M'), (\ell'', M''))$, on a $\ell'' \subset M'$ ce qui montre que $q(Z')$ est un cône de sommet ℓ'' pour tout point ℓ'' de $q(Z'')$, donc un cône de sommet W où W est la variété linéaire engendrée par $q(Z'')$. Par symétrie on conclut que $q(Z') = W = q(Z'')$.

On en déduit que $Z' \times Z'' = W \times \check{W} \times W \times \check{W}$, et que la composante $\hat{Z}$ est égale à $\mathbf{P}(W \times W) \times \mathbf{P}(\check{W} \times \check{W})$.

Pour un drapeau $V_k \subset V_{k+j}$ suffisamment général, on vérifie que l'intersection de Z avec $\tau_{k,j}$ est vide.

Si le produit $Z' \times Z''$ est intersecté en codimension 1 par le fermé F le long d'une sous variété I , nous constatons d'abord que lorsque I se surjecte sur $q(Z') \times q(Z'')$,

la projection de I sur l'un des deux produits $Z' \times q(Z'')$ ou $q(Z') \times Z''$ est nécessairement surjective puisque I est de codimension 1. Si I se surjecte sur $q(Z') \times Z''$ par exemple, pour tout point ℓ' de $q(Z')$, la variété $q(Z'')$ est un cône de sommet ℓ' , et en particulier $q(Z'') \supset W \supset q(Z')$, où W est l'espace linéaire engendré par $q(Z'')$. On en déduit que $q(Z'')$ est un cône sur tout point de W et donc que $q(Z'')$ est laissé invariant par les translations de W , tandis que $\check{q}(Z')$ est laissé invariant par les translations de $\check{W}$ (qui contient $\check{q}(Z'')$).

L'intersection avec le cycle défini par:

$$\ell' \subset V_{k+j} \subset \check{H}; \quad \ell' - \ell'' \subset V_k \subset \check{M}''$$

est donc vide d'après le lemme de transversalité 1.6.2, et Z ne peut rencontrer $\tau_{k,j}$.

Il nous reste à traiter le cas où I se projette sur un fermé K de codimension 1 dans $q(Z') \times q(Z'')$. Toute composante C de K se surjecte au moins sur l'un des deux facteurs $q(Z')$ ou $q(Z'')$, par exemple $q(Z'')$.

Pour tout ℓ'' dans $q(Z'')$ et tout ℓ' appartenant à la fibre $C_{\ell''}$ de la projection $C \rightarrow q(Z'')$, le plan tangent en ℓ'' à $q(Z'')$ passe par ℓ' . La variété $q(Z'')$ est donc un cône de sommet W , espace linéaire engendré par la réunion des $C_{\ell''}$ lorsque ℓ'' parcourt $q(Z'')$.

— Si la réunion des $C_{\ell''}$ est égale à $q(Z')$ on se retrouve dans la situation précédente où:

$$\begin{aligned} q(Z'') \supset W \supset q(Z') \\ p(Z'') \subset \check{W} \subset p(Z') \end{aligned}$$

et où $Z \cap \tau_{k,j}$ est vide.

— Si $C_{\ell''} = C_0$ le même raisonnement s'applique en remplaçant $q(Z')$ par C_0 . On en déduit que $\tau_{k,j}$ ne rencontre pas Z puisque, le long de C_0 , tout hyperplan tangent à $q(Z')$ l'est également à C_0 . $\square$

Remarque 3.2.5. Comme pour le Théorème 2.2.3 (cf. Remarque 2.2.4), on peut montrer un résultat plus précis sur l'ouvert de l'espace des drapeaux $\mathbf{D}(k, k+j; n)$ de l'énoncé du théorème précédent: Si V_k est dans l'ouvert générique pour la définition des polaires, on peut trouver un ouvert générique de plans $V_{k+j} \supset V_k$ tel que le dirimant de la projection de $O(X, V_k)$ parallèlement à V_{k+j} a même multiplicité que celui d'une projection générale sur un espace de dimension $n - k - j$.

THÉORÈME 3.2.6. *Les multiplicités polaires des variétés de points doubles générales de X sont des invariants analytiques de X .*

Preuve. Elle est analogue à celle du Théorème 2.2.5.

La somme des multiplicités des dirimants

$$\Delta(P(X, V_k), U_{k+j})$$

et

$$\Delta(O(X, V_k), U_{k+j})$$

s'obtient en intersectant avec $U_{k+j+2} \times \check{U}_{k+j}$ le diviseur exceptionnel de l'espace éclaté de $C(0)$ dans la réunion des conormaux de $P(X, V_k)$, et de $O(X, V_k)$, soit encore, grâce à la formule de projection, en intersectant le diviseur $\mathcal{D}_0$ avec le cycle $\vartheta_{k,j}$ défini par:

$$\{(\ell', M'', N, \eta, \delta, \xi); (\ell' \subset U_{k+j+2}, N \subset \check{U}_{k+j}, \xi \subset V_k \subset \check{M}'')\}.$$

Le diviseur $\mathcal{D}_0$ est de dimension $2n - 3$ et contenu dans la variété $\mathbf{D}(1, n - 1; n) \times \mathbf{D}(1, n - 1; n)$ sur laquelle le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ agit transitivement, tandis que $\vartheta_{k,j}$ y est de codimension $2n - 3$. Le nombre d'intersection $\mathcal{D}_0 \cap \vartheta_{k,j}$ ne dépend que du type projectif de $\mathcal{D}_0$ qui est un invariant analytique de X . Pour des drapeaux $(U_i)_i$ et $(V_i)_i$ généraux, il est égal à la somme des multiplicités des dirimants $\Delta(P(X, V_k), U_{k+j})$ et $\Delta(O(X, V_k), U_{k+j})$.

Quant à la somme des multiplicités des deux dirimants $\Delta(P(X, V_k), V_{k+j})$ et $\Delta(O(X, V_k), V_{k+j})$, elle s'obtient en intersectant avec $V_{k+j+2} \times \check{V}_{k+j}$ le diviseur exceptionnel de l'espace éclaté de $C(0)$ dans la réunion des conormaux de $P(X, V_k)$, et de $O(X, V_k)$.

On s'intéresse donc à l'intersection de $\mathcal{D}_0$ avec le cycle $\theta_{k,j}$ défini par:

$$\{(\ell', M'', N, \eta, \delta, \xi); (\ell' \subset V_{k+j+2}, N \subset \check{V}_{k+j}, \xi \subset V_k \subset \check{M}'')\}.$$

Cette fois, l'action diagonale de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ admet plusieurs orbites:

$$\begin{aligned} \ell' &\neq \xi \subset \check{N} \neq \check{M}'' \\ \ell' &\neq \xi \subset \check{N} = \check{M}'' \\ \ell' &= \xi \subset \check{N} \neq \check{M}'' \\ \ell' &= \xi \subset \check{N} = \check{M}'' \end{aligned}$$

et l'orbite dense.

L'intersection de $\theta_{k,j}$ avec $\mathcal{D}_0$ évite le fermé $\ell' = \xi$.

Pour l'intersection de $\mathcal{D}_0$ avec $\theta_{k,j}$ dans l'orbite $\ell' \neq \xi \subset \check{N} \neq \check{M}''$ nous répétons le raisonnement de 2.2.5 et nous voyons que la contribution de cette orbite à l'intersection est la somme des multiplicités des dirimants $\Delta(\mathcal{D}(X, V_k), V_{k+j})$ et $\Delta(\mathcal{K}(X, V_k), V_{k+j})$.

Le fermé $N = M''$ de l'espace $\mathcal{P}\ell(X, \mathbf{C}^n)$ s'identifie à l'espace $X \times C(X)$ dans lequel on a éclaté les deux idéaux $(z'' - z')$ et (z') . L'intersection de $\theta_{k,j}$ avec $\mathcal{D}_0 \cap (N = M'')$ se projette donc sur l'intersection du diviseur $\mathcal{D}_0$ de $E_0 C(\Delta(X, V_k))$ avec le cycle $V_{k+j+2} \times \check{V}_{k+j}$. La contribution de cette orbite à l'intersection est la multiplicité du dirimant $\Delta(X, V_{k+j})$.

En conclusion, la multiplicité du dirimant $\Delta(\mathcal{D}(X, V_k), V_{k+j})$ est différence de quantités elles-mêmes invariantes par un isomorphisme de $(\mathbb{C}^n, 0)$, elle est donc invariante par un tel changement de coordonnées. On termine comme en 2.2.5 en prouvant qu'elle est aussi indépendante de la dimension de plongement de X . $\square$

4. Conséquences

4.1. EQUISINGULARITÉ DES VARIÉTÉS DE DIMENSION AU PLUS 3

A l'aide des variétés de fronces et de doubles plis, nous pouvons, à l'instar de [Briançon–Speder] caractériser numériquement l'équisingularité au sens de Zariski des variétés de dimension inférieure ou égale à 3, ou plus généralement l'équisingularité d'un espace analytique le long de strates de codimension 2.

La théorie de l'équisingularité des courbes fournit la réponse lorsqu'on étudie l'équisingularité le long d'une strate (lisse) de codimension 1.

Lorsque on veut traduire numériquement l'équisingularité à la Zariski de X , espace analytique réduit, le long d'une sous variété lisse Y de codimension 2 dans X au voisinage d'un point de Y , on demande la constance le long de Y au voisinage du point considéré:

- des multiplicités polaires de X ,
- des multiplicités polaires des variétés de fronces et de doubles plis de X .
- des multiplicités polaires du lieu singulier $S(X)$ de X ,
- des multiplicités polaires du lieu singulier de $S(X)$.

On vérifie que c'est une condition nécessaire et suffisante pour que le discriminant d'une projection générale de X soit lui même équisingulier le long d'une strate de codimension 1.

Dans le cas où X est une hypersurface, c'est la définition même de Zariski. Lorsque X n'est plus une hypersurface nous proposons donc, comme définition par récurrence de l'équisingularité à la Zariski, et pour que notre caractérisation numérique reste valable:

X est équisingulière au sens de Zariski si sa projection hypersurface générale l'est.

Lorsque la dimension de X est au plus 3 on voit que l'on a ainsi caractérisé complètement l'équisingularité de X le long d'un sous espace quelconque. Remarquons aussi que dans ce cas, il suffit de considérer les projections linéaires dans un plongement donné de X pour étudier l'équisingularité de X (voir [Briançon–Speder]) ou le type dimensionnel de X [Zariski 3].

4.2. THÉORÈME DE BRIANÇON–HENRY

Rappelons l'énoncé de Briançon–Henry:

THÉOREME 4.2.1. *Soit X un germe de sous espace analytique dans $\mathbf{C}^n, 0$. Il existe un ouvert U de la grassmannienne $\mathbf{G}(n-2, n)$ tel que lorsque V appartient à U , la courbe polaire $P(X, V)$ a même saturé que le dirimant $\Delta(X, V)$.*

Faisons quelques remarques:

4.2.2. Le théorème montre que la projection de noyau V est une projection générale de la courbe $P(X, V)$, au sens suivant: le dirimant $\Delta(X, V)$ est équisingulier à (a le même type topologique que) * une projection générique de la courbe polaire.

Ceci implique, en particulier, qu'il n'existe pas de limite de bisécantes à la polaire $P(X, V)$ qui soit contenue dans V .

4.2.3. Lorsque $\dim(V) < n-2$ et que $P(X, V)$ est de dimension strictement supérieure à 1, l'énoncé du théorème n'est plus valable. Par exemple, on peut trouver X , hypersurface à singularité isolée à l'origine de $\mathbf{C}^4$, avec une variété polaire générale $P(X, V_1)$ lisse en dehors de 0. Une projection générale de cette variété polaire n'aura que des points doubles en codimension 1, alors que le dirimant correspondant, en général aura des cusps en codimension 1 si la projection de noyau V a des fronces.

4.2.4. Pour un drapeau général:

$$0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbf{C}^n,$$

on se souvient que la section de la polaire $P(X, V_k)$ par le plan V_{k+2} est la courbe polaire de la section $X \cap V_{k+2}$. Le résultat de Briançon–Henry, appliqué à cette dernière courbe polaire, permet d'affirmer qu'il n'existe pas de limite de bisécantes à $P(X, V_k)$, contenues dans V_{k+2} , qui soit incluse dans V_k .

4.2.5. Dans l'étude que nous avons faite des variétés de doubles plis, nous n'avons considéré que les limites de triplets (v, M', M'') pour lesquels la bisécante v est contenue dans M'' . Les bisécantes qui interviennent dans la situation étudiée ici peuvent être quelconques. L'espace qui les décrit est l'éclaté $\mathcal{P}^{[2]}(X)$ avec le diviseur exceptionnel $D_0^{[2]}$.

Cependant, dans la démonstration du Théorème 3.2.4, nous avons vu qu'un translaté général du cycle $\tau_{k,j}$ évite le diviseur $D_0^{[2]}$. Grâce à la Proposition 1.3.4 nous pouvons interpréter ce résultat de la manière suivante:

Nous commençons par construire l'espace:

$$\mathcal{X} = \{(x, g) \in \mathbf{C}^n \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}); g(x) \in P(X, V_k)\}$$

* Pour les courbes planes, l'équisingularité au sens de Zariski correspond à l'équisaturation au sens de [Zariski 2] ou à l'équisaturation lipschitzienne de [Pham–Teissier].

La projection $\phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est munie d'une section dont l'image est $\mathcal{Y} = 0 \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Pour un drapeau

$$V_k \subset \cdots \subset V_{k+j} \subset \cdots \subset V_{n-1}$$

assez général, le cycle $\tau_{k,j}$ vérifie les hypothèses de 2.2.3 et, pour $0 \leq j \leq n-k-1$, le dirimant de ϕ associé à V_{k+j} est équivariable au voisinage de l'identité de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. En particulier le dirimant de ϕ qui a la dimension de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est vide.

Si de plus on choisit $\tau_{k,j}$ pour qu'il ne rencontre pas le diviseur $D_0^{[2]}$ de l'espace $\mathcal{P}^{[2]}(X)$, on en déduit le théorème suivant, qui répond à la question de [Teissier 2]:

THÉORÈME 4.2.6. *Pour un drapeau assez général,*

- (1) *les dirimants relatifs du morphisme ϕ sont équivariables le long de $0 \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ au voisinage de $0 \times \mathrm{Id}$,*
- (2) *les dirimants relatifs des variétés de points doubles et de cusps (relatifs) du morphisme ϕ sont eux mêmes équivariables.*

Preuve. Seule l'assertion 2 est nouvelle par rapport à 2.2.2. Pour s'assurer de sa validité, on remarque que si l'un des ces dirimants relatifs n'était pas équivariable, une de ses sections générales de la dimension de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ne serait pas vide, ce qui entraînerait l'existence d'un point limite dans $D_0^{[2]}$ appartenant à $\tau_{k,j}$.

Remarque 4.2.7. La notion d'équisingularité que nous considérons ici (équivariable des dirimants relatifs le long d'une section $\mathcal{Y}$ du morphisme ϕ) est moins forte, en général que les conditions de Whitney (qui sont équivalentes à l'équivariable des dirimants absolus le long de $\mathcal{Y}$).

Ces deux notions coïncident lorsque ϕ est transverse à l'espace étudié (il existe alors un morphisme fini entre conormal relatif et conormal absolu). Ce n'est pas le cas ici, par exemple pour les variétés de points doubles du dirimant.

Terminons cette remarque par un exemple: Soit X la sous variété de $\mathbb{C}^3$ définie par $x^2 - yz^2 = 0$ et le morphisme $X \rightarrow \mathbb{C}$ donné par la fonction y . Les variétés polaires du morphisme y sont équivariables.

Remarque 4.2.8. On a montré dans [Henry–Merle–Sabbah] (Cor. 4.3.12. p. 249) que la construction des dirimants relatifs est transitive. La formation des *discriminants* relatifs ne l'est pas. En effet, à chaque étape, on introduit des points singuliers du dirimant qui ne sont pas singuliers sur la polaire correspondante (points froncs et doubles plis relatifs).

Le théorème précédent montre que, pour un drapeau assez général, les dirimants relatifs du cycle somme de $\Delta(\phi, V_k)$ et du cycle de ses points doubles $D(\phi, V_k)$ sont équivariables le long de $0 \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ au voisinage de l'identité. Il montre également que les dirimants relatifs du cycle

$$[\Delta(\phi, V_k)] + 2[D(\phi, V_k)]$$

sont équivariants. Ces derniers sont des composantes, comptées avec multiplicité des *discriminants relatifs* du morphisme ϕ .

COROLLAIRE 4.2.9. *Les projections planes d'une courbe polaire $P(X, V_{n-2})$ forment une famille équisingulière de courbes au voisinage de la projection de noyau V_{n-2} .*

Preuve. La projection de la courbe polaire sur le dirimant étant un morphisme birationnel, et une projection générale d'une courbe n'ayant que des points doubles comme singularités, le théorème montre que le morphisme ϕ , dans ce cas, n'a pas de points doubles, ce qui montre que $0 \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est le seul lieu singulier de la famille des projections planes de $P(X, V_k)$. Comme on sait que la variété polaire de même dimension que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est vide, on en déduit la conclusion.

On reconnaît dans ce dernier corollaire la généralisation du résultat de [Briançon–Henry] donnée dans [Teissier 2] (lemme clé chap. V 1.2.2 p. 462 et remarque p. 486).

Références

1. Briançon, J. and Henry, J.-P.: Équisingularité générique des familles de surfaces à singularité isolée. *Bull. Soc. Math. Fr.* 108 2 (1980) 259–281.
2. Briançon, J. and Speder, J.-P.: Les conditions de Whitney impliquent μ^* constant. *Ann. Inst. Fourier* 26 (1976) 153–163.
3. Fulton, W.: Intersection Theory. *Ergebnisse der Mathematik* 3 Folge. Band 2. Springer Verlag, 1984.
4. Fulton, W., Kleiman, S. L. and McPherson, R.: About the enumeration of contacts. *Algebraic Geometry, Proceedings Ravello* (1982) 156–196.
5. Henry, J.-P.: Numerical Invariants for Zariski Equisingularity. *Proceedings of the workshop on resolution of singularities* Università di Pisa, Dipartimento di Matematica, Sezione di Geometria e Algebra 1.82 (742) giugno 1993.
6. Henry, J.-P. and Lê, D.T.: Limites d'espaces tangents. *Séminaire F. Norguet 1974–75*, Springer Lecture Notes 482, pp. 251–265.
7. Henry, J.-P. and Merle, M.: Limites d'espaces tangents et transversalité des variétés polaires. *Actes de la conférence de la Rabida*, Springer Lecture Notes 961.
8. Henry, J.-P. and Merle, M.: Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka. *Proc. A.M.S. Summer Institute on Singularities*, Arcata, 1981.
9. Henry, J.-P. and Merle, M.: Conditions de régularité et éclatements. *Ann. Inst. Fourier* 37, 3 (1987) 159–190.
10. Henry, J.-P. and Merle, M.: Shade, Shadow and Shape. Chapitre “Geometry of Vision” pp. 143–168, in *Artificial and Biological Vision Systems*, G. A. Orban, H.-H. Nagel Editors, *Esprit Series*, edited in cooperation with the Commission of the European Communities, DG XIII, Springer Verlag 1992.
11. Henry, J.-P., Merle, M. and Sabbah, C.: Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4ème série, 17, 1984.
12. Hironaka, H.: Normal cones in Analytic Whitney Stratifications. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 36, P.U.F., 1970.
13. Hironaka, H.: Stratifications and Flatness in *Real and Complex Singularities* (Nordic Summer School, Oslo, 1976); Sijthoff and Noordhoff, 1977.
14. Kashiwara, M.: B-functions and holonomic systems. *Inv. Math.* 38 (1976), 33–53.
15. Kashiwara, M.: Systèmes micro-différentiels. *Cours à l'Université Paris-Nord*. (Notes de T. Monteiro.) Progress in Maths. Birkhauser 1983.
16. Kashiwara, M. and Schapira, P.: Microlocal study of sheaves. *Astérisque*, 128, 1985.

17. Kleiman, S. L.: On the Transversality of a General Translate. *Compositio Math*, 28 (1974) 287–297.
18. Kleiman, S. L.: Tangency and Duality. *Proc. 1984 Conf. in algebraic geometry*. CMS-AMS proceedings, 6 (1986) 163–226.
19. Kleiman, S. L.: About the conormal scheme. *Proc. Arcireale Conf. Lectures Notes* 1092, Springer.
20. Kleiman, S. L.: Multiple-point Formulas for maps. *Proc. Conf. on Enumerative and classical Algebraic Geometry Progress in Maths*. 24 Birkhauser (1982) 237–252.
21. Kleiman, S. L.: Multiple-point Formulas I: Iteration. *Acta Math*. 147 (1981) 13–49.
22. Lê, D. T. and Teissier, B.: Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières. *Annals of Math.*, 114 (1981) 457–491.
23. Lê, D. T. and Teissier, B.: Limites d'espaces tangents en géométrie analytique. *Comment. Math. Helvetici*, 63, 4 (1988) 540–578.
24. Lipman, J.: Reduction, Blowing up and Multiplicities. *Proc. Conf. on Transcendental Methods in Commutative Algebra*. George Mason University. Decker 1979.
25. Mather, J.: Stratifications and Mappings. in *Dynamical Systems*. M. Peixoto. (ed.) Academic Press. 1973.
26. Pham, F. and Teissier, B.: Fractions lipschitziennes d'une algèbre analytique. *Prépublication Centre de Maths*. Ecole Polytechnique 1969.
27. Sabbah, C.: Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux. *Astérisque* 130 (1985) 161–192.
28. Teissier, B.: Variétés polaires locales et conditions de Whitney. *C. R. Acad. Sci. Paris. Série A-B* 290, 1980.
29. Teissier, B.: Variétés polaires II. *Actes de la conférence de la Rabida, Lectures Notes* 961, Springer.
30. Thom, R.: Ensembles et morphismes stratifiés. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969) 240–284.
31. Verdier, J.-L.: Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard. *Inv. Math.*, 36 (1976) 295–312.
32. Whitney, H.: Tangents to an analytic variety. *Ann. of Math*. 81 (1964) 496–549.
33. Zariski, O.: Some open questions in the theory of singularities. *Bull. A.M.S.* 77, 4 (1971) 481–491.
34. Zariski, O.: Studies in equisingularity III. *Amer. Jour. of Math*. 90 (1968) 961–1023.
35. Zariski, O.: Foundations of a general theory of equisingularity on r -dimensional algebroid and algebraic varieties, of embedding dimension $r+1$. *Amer. Jour. of Math*. 101 (1979) 453–514.