

COMPOSITIO MATHEMATICA

CLAUDE HAYAT-LEGRAND

Représentation des groupes d'extension. Applications

Compositio Mathematica, tome 90, n° 3 (1994), p. 351-366

http://www.numdam.org/item?id=CM_1994_90_3_351_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Représentation des groupes d'extension. Applications.

CLAUDE HAYAT-LEGRAND

Laboratoire de Topologie et Géométrie, U.R.A. n° 1408, Université Paul Sabatier, U.F.R. M.I.G., 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse-Cedex, France

Received 16 July 1992; accepted in final form 16 February 1993

Le type d'homotopie du classifiant des équivalences d'homotopie d'un espace X , simplement connexe ayant seulement deux groupes d'homotopie Π et Π' non nuls et en dimension consécutives, est un produit croisé si une certaine classe d'obstruction est nulle. Cette obstruction est une classe θ dans $\text{Ext}_H^3(\Pi, \Pi')$, où H est donné par le type d'homotopie de X . Si Π et Π' sont des G -modules, G étant un groupe discret, la classe θ induit une classe θ_G dans $\text{Ext}_G^3(\Pi, \Pi')$. Lorsque les données précédentes s'étendent en une G -opération sur X , l'obstruction θ_G est nulle. On peut alors classifier les G -actions sur X par une classe caractéristique différence prenant ces valeurs dans $\text{Ext}_G^2(\Pi, \Pi')$. En particulier, ces résultats sont appliqués à la classification de certains types d'homotopie d'espaces Y , dont le groupe fondamental est isomorphe à G , ayant au plus $\Pi_2(Y) = \Pi$ et $\Pi_3(Y) = \Pi'$ non nuls, et possédant un revêtement universel de type d'homotopie donné [4]. Cette étude est basée sur une représentation du n -ième groupe de G -extensions $\text{Ext}_G^n(\Pi; \Pi')$, pour deux G -modules Π et Π' , comme espace des classes d'homotopie des sections d'un fibré construit à partir des G -modules Π et Π' qui a été énoncée dans [10] et qui est complètement démontrée ici.

Les classes caractéristiques d'une G -opération ont déjà été utilisées, dans des cas particuliers, pour calculer des différentielles de suites spectrales, celle du revêtement par Legrand A. [14], celle d'extension de groupes par Huebschmann J. [12], et celle de Kasparov en KK -théorie par Fieux E. [10]. Dans les cas cités plus haut, et dans le dernier cas quand $A = \mathbb{C}$, les classes sont construites avec un espace X ayant le type d'homotopie d'un groupe abélien, donc d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Ici, nous allons supposer, plus généralement que X et du type d'homotopie d'un produit tordu de deux espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Il faut noter aussi les travaux de J. Rutter [17] et Dwyer W. G.-Kan D. M. Smith J. H. [9].

La représentation de $\text{Ext}_G^n(\Pi, \Pi')$ pourrait s'établir à partir d'une suite spectrale d'Adams. Ici, on utilise les résultats de Shih W. [18], Didierjean G.

[7] sur le calcul des groupes d'homotopie de l'espace des équivalences d'homotopie de X , et les constructions de Cooke G. [5].

1. Représentation de $\text{Ext}_G^n(\Pi, \Pi')$, le n -ième groupe de G -extensions de deux G -modules Π et Π'

Si $\Pi = \mathbb{Z}$, on sait que $\text{Ext}_G^n(\mathbb{Z}, \Pi')$ est égal à $H^n(G, \Pi')$, la cohomologie du groupe G à coefficients dans le G -module Π' . Cette cohomologie peut être représentée par des classes d'homotopie d'un foncteur sections. Plus précisément, si $G \rightarrow WG \rightarrow \bar{W}G$ est le fibré universel associé à G , et si le foncteur Γ est le foncteur sections pointées appliqué ici au fibré $K(\Pi', n) \rightarrow K(\Pi', n) \times_G WG \rightarrow \bar{W}G$, de fibre l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\Pi', n)$, on sait que, [3] et [14], $H^n(G, \Pi') = \pi_0 \Gamma[K(\Pi', n) \times_G WG]$. Supposons, maintenant, que Π et Π' soient deux G -modules quelconques. Fixons un entier $p > 1$, (il sera, plus loin, l'indice du premier groupe d'homotopie non nul de l'espace sur lequel agira G). On demande que le groupe G opère, avec un point fixe, sur le groupe $\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1))$, des homomorphismes pointés de $K(\Pi, p)$ dans $K(\Pi', p+1)$, par une opération déduite, de façon classique, de l'opération de G sur Π et Π' . Le point fixe est l'application constante de $K(\Pi, p)$ sur le pointage de $K(\Pi', p+1)$. Comme $\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1))$ est un groupe abélien, on peut justifier l'itération $\bar{W}^{n-1} \text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG \rightarrow \bar{W}G$: Les résultats rappelés plus haut se prolongent par:

1.1 THÉORÉME. *Soient G un groupe discret, Π et Π' deux G -modules, on a, pour tout $n > 0$, un isomorphisme canonique de $\text{Ext}_G^n(\Pi, \Pi')$ sur le groupe d'homotopie des sections du fibré $\bar{W}^{n-1} \text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG \rightarrow \bar{W}G$:*

$$\text{Ext}_G^n(\Pi, \Pi') = \pi_0 \Gamma[\bar{W}^{n-1} \text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG].$$

En particulier:

1.2 COROLLAIRE. *Si Π et Π' sont des G -modules triviaux, on a:*

$$\text{Ext}_G^2(\Pi, \Pi') = [\bar{W}G, \text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+2))].$$

Preuve du Corollaire 1.2. Si Π et Π' sont des G -modules triviaux, alors

$$\begin{aligned} \bar{W} \text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG \\ = \bar{W} \text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times \bar{W}G \end{aligned}$$

Or, on sait [13] que $\bar{W} \text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) = \text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+2))_0$, où $\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+2))_0$ est la composante connexe de l'application constante sur le pointage de $K(\Pi', p+2)$. Comme $\bar{W}G$ est connexe, on trouve le résultat du corollaire 1.2.

Pour démontrer le théorème 1.1, on vérifie les trois propriétés caractéristiques à isomorphisme près du foncteur n -ième G -extension [4, p. 145]. On pose pour la démonstration:

$$\Gamma(n, \Pi, F) = \Gamma[\bar{W}^{n-1} \text{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p+1)) \times_G WG];$$

$$U_n(F) = \pi_0 \Gamma(n, \Pi, F), \text{ si } n > 0;$$

$$U_0(F) = \pi_0 \Gamma[\text{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p)) \times_G WG].$$

1.3 LEMME. *Une suite exacte courte de G -modules $0 \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow N \rightarrow 0$ donne une suite exacte longue:*

$$U_0(C) \rightarrow U_0(A) \rightarrow U_0(N) \rightarrow U_1(C) \rightarrow \cdots U_n(C) \rightarrow U_n(A) \rightarrow U_n(N) \rightarrow U_{n+1}(C) \cdots$$

Preuve. (a) Pour $n \geq 1$. La suite exacte courte de G -modules $0 \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow N \rightarrow 0$ donne une suite exacte de groupes simpliciaux abéliens:

$$0 \rightarrow K(C, p+1) \rightarrow K(A, p+1) \rightarrow K(N, p+1) \rightarrow 0,$$

que l'on peut considérer comme une fibration de base $K(N, p+1)$ et de fibre $K(C, p+1)$. Alors

$$(*) \text{Hom}(K(\Pi, p), K(C, p+1)) \hookrightarrow \text{Hom}(K(\Pi, p), K(A, p+1))$$

$$\begin{array}{c} j \downarrow \\ \text{Hom}(K(\Pi, p), K(N, p+1)), \end{array}$$

est un fibré sur l'image de j . Comme j a la propriété de relèvement des chemins, l'image d'une composante connexe par j est une composante connexe de la base. L'image de j est donc une union de composantes connexes. D'autre part, la suite exacte d'homotopie de $(*)$ donne la suite exacte

$$\text{Ext}(\Pi, A) \xrightarrow{\pi_0(j)} \text{Ext}(\Pi, N) \rightarrow \text{Ext}^2(\Pi, C).$$

Comme $\text{Ext}^2(\Pi, C)$ est nul, $\pi_0(j)$ est surjectif donc j est surjective, et $(*)$ est un fibré que l'on considère comme une suite exacte de groupes simpliciaux. Ces groupes simpliciaux sont abéliens, on peut leur appliquer le foncteur classifiant

\bar{W} , voir [14], et itérer $(n - 1)$ fois. On obtient, dans la catégorie des $\bar{W}G$ -fibrés [13] le diagramme suivant, où on note

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{F} & = & \text{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p + 1)) & & & & \\
 \bar{W}^{n-1}\tilde{C} & \hookrightarrow & \bar{W}^{n-1}\tilde{A} & \longrightarrow & \bar{W}^{n-1}\tilde{N} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \bar{W}^{n-1}\tilde{C} \times_G WG & \hookrightarrow & \bar{W}^{n-1}\tilde{A} \times_G WG & \longrightarrow & \bar{W}^{n-1}\tilde{N} \times_G WG & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \bar{W}G & = & \bar{W}G & = & \bar{W}G & &
 \end{array}$$

On sait que les espaces de sections pointées au-dessus de $\bar{W}G$ forment une fibration, d'où avec les notations choisies:

$$(**) \quad \Gamma(n, \pi, C) \hookrightarrow \Gamma(n, \pi, A) \rightarrow \Gamma(n, \pi, N)$$

est un fibration. Les termes de la suite exacte d'homotopie de cette fibration sont de la forme $\pi_i \Gamma[\bar{W}^{n-1}\tilde{F} \times_G WG]$. Le groupe G opère sur \tilde{F} en fixant un point, d'où on a:

$$\pi_i \Gamma[\bar{W}^{n-1}\tilde{F} \times_G WG] = \pi_0 \Gamma[\Omega^i \bar{W}^{n-1}\tilde{F} \times_G WG] = \pi_0 \Gamma[\bar{W}^{n-1-i}\tilde{F} \times_G WG],$$

Ω étant le foncteur de la catégorie des ensembles simpliciaux vers la catégorie des groupes simpliciaux [15], tel que $\Omega\bar{W}$ et $\bar{W}\Omega$ soient homotopes aux foncteurs identités de chaque catégorie. La suite exacte du fibré $(**)$ donne la suite exacte énoncée dans le lemme pour $n \geq 1$.

(b) Pour $n = 0$. Notons toujours $\tilde{F} = \text{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p + 1))$ et montrons d'abord que $\pi_0 \Gamma[\text{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p)) \times_G WG] = \pi_2 \Gamma[\bar{W}\tilde{F} \times_G WG]$. En effet, comme dans la partie (a), on a

$$\pi_2 \Gamma[\bar{W}\tilde{F} \times_G WG] = \pi_0 \Gamma[\Omega^2 \bar{W}\tilde{F} \times_G WG] = \pi_0 \Gamma[\Omega\tilde{F} \times_G WG].$$

Or les groupes $\Omega\tilde{F}$ et $\text{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p))$ sont tous les deux égaux au groupe $K(\text{Hom}(\Pi, F), 0)$, d'où l'égalité cherchée.

Comme dans (a), la suite exacte de groupes simpliciaux abéliens $0 \rightarrow \tilde{C} \rightarrow \tilde{A} \rightarrow \tilde{N} \rightarrow 0$, donne une suite exacte

$$\begin{aligned}
 \cdots & \rightarrow \pi_2 \Gamma[\bar{W}\tilde{C} \times_G WG] \rightarrow \pi_2 \Gamma[\bar{W}\tilde{A} \times_G WG] \rightarrow \pi_2 \Gamma[\bar{W}\tilde{N} \times_G WG] \\
 & \rightarrow \pi_1 \Gamma[\bar{W}\tilde{C} \times_G WG] \rightarrow \pi_1 \Gamma[\bar{W}\tilde{A} \times_G WG] \cdots
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a de façon évidente $\pi_1\Gamma[\bar{W}\tilde{F} \times_G WG] = \pi_0\Gamma[\tilde{F} \times_G WG]$.

Toutes les transformations utilisées étant fonctorielles, on obtient la suite exacte longue

$$U_0(C) \rightarrow U_0(A) \rightarrow U_0(N) \rightarrow U_1(C) \rightarrow U_1(C) \rightarrow U_1(A) \cdots.$$

□

Preuve de théorème 1.1. Comme il s'agit d'applications pointées, le terme $U_0(F)$ est égal à $\pi_0\Gamma[K(\text{Hom}(\Pi, F), 0) \times_G WG]$, c'est-à-dire à $\text{Hom}_G(\Pi, F)$.

La dernière propriété caractéristique à vérifier, est que $U_n(F) = 0$, pour $n > 0$, quand F est un module G -injectif. La formule d'associativité de [4, p. 165] permet d'écrire les égalités de foncteurs:

$$\text{Hom}(-, F) = \text{Hom}_{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G] \otimes -, F) = \text{Hom}(\mathbb{Z}[G], \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-, F)).$$

Puisque F est G -injectif, le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-, F)$ est exact. Le foncteur $\text{Hom}(\mathbb{Z}[G], -)$ est exact car $\mathbb{Z}[G]$ est libre, donc $\text{Hom}(-, F)$ est exact et F est injectif. Alors $\text{Ext}(\Pi, F)$ est nul, ainsi que $\text{Ext}_G^n(\Pi, F)$. La suite exacte longue [13]:

$$\begin{aligned} & \rightarrow H^{n-2}(G, \text{Ext}(\Pi, F)) \rightarrow H^n(G, \text{Hom}(\Pi, F)) \\ & \rightarrow \text{Ext}_G^n(\Pi, F) \rightarrow H^{n-1}(G, \text{Ext}(\Pi, F)), \end{aligned}$$

donne que $H^n(G, \text{Hom}(\Pi, F))$ est nul si F est un module G -injectif. Comme de plus, $\text{Ext}(\Pi, F)$ est nul, l'espace $\text{Hom}(K(\Pi, p), K(F, p+1))$ est un espace de type $K(\text{Hom}(\Pi, F), 1)$ et pour $n > 0$, $U_n(F) = \pi_0\Gamma(n, \Pi, F) = H^n(G, \text{Hom}(\Pi, F))$ est nul. □

2. Structure sur le classifiant d'un espace d'équivalences d'homotopie

Dans ce paragraphe iterviennent les méthodes de B -fibrations en groupes, de B -groupes structuraux pour un B -fibré principal, B étant considéré comme un espace de paramètres. On utilise les notations et les résultats de [13]. Soit donnée une suite exacte de groupes simpliciaux $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow 0$, avec A abélien. On va montrer que $\bar{W}E \rightarrow \bar{W}H$ est $\bar{W}H$ -principal. Dans ce cas la base du B -fibré coïncide avec B . La structure B -principale correspond à la donnée d'une famille de groupes isomorphes et d'une famille d'opérations indéxées par B qui opèrent sur les fibres de $\bar{W}E$ avec $B = \bar{W}H$.

2.1 PROPOSITION. *Etant donnée une suite exacte de groupes simpliciaux: $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow 0$, avec A abélien, alors $\bar{W}E \rightarrow \bar{W}H$ est un $\bar{W}H$ -fibré principal de $\bar{W}H$ -fibré structural égal à $\bar{W}A \rightarrow \mathcal{H} = \bar{W}A \times_t WH \rightarrow \bar{W}H$.*

2.2 REMARQUE. Si on sait que $\bar{W}E \rightarrow \bar{W}H$ est $\bar{W}H$ -principal, alors il est induit par un $\bar{W}H$ -morphisme $\theta: \bar{W}H \rightarrow \bar{W}(\mathcal{H})$ du $\bar{W}H$ -fibré universel, dont la $\bar{W}H$ -fibre est $\bar{W}A \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \bar{W}H$.

$$\begin{array}{ccc} \bar{W}E & \longrightarrow & W(\mathcal{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{W}H & \xrightarrow{\theta} & \bar{W}(\mathcal{H}) \\ & & \downarrow p \\ & & \bar{W}H. \end{array}$$

Le $\bar{W}H$ -fibré principal $\bar{W}E \rightarrow \bar{W}H$ est trivial si et seulement si la classe d'homotopie de θ est égale à la classe d'homotopie de la section nulle s du $\bar{W}H$ -fibré en groupes $\bar{W}^2A \rightarrow \bar{W}\mathcal{H} \rightarrow \bar{W}H$. Dans ce cas, $\bar{W}E \rightarrow \bar{W}H$ est isomorphe à la $\bar{W}H$ -fibre, c'est-à-dire au $\bar{W}H$ -fibré $\bar{W}A \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \bar{W}H$. En particulier, cela signifie qu'alors $\bar{W}E$ est muni d'une structure de $\bar{W}H$ -groupe isomorphe au $\bar{W}H$ -groupe $\bar{W}A \times_t \bar{W}H$.

Preuve de la proposition 2.1. A la suite exacte de groupes simpliciaux, $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow 0$, avec A abélien, est associé une opération $H \rightarrow \text{Aut } A$, qui fait de A un H -module et que l'on prolonge naturellement en une opération $u: H \rightarrow \text{Aut } \bar{W}A$. D'autre part, au fibré universel $H \rightarrow \bar{W}H \rightarrow \bar{W}H$ est associé une *fonction tordante* [13], $\tau: \bar{W}H \rightarrow H$ qui est une application de degré -1 , permettant d'expliquer $\bar{W}H$ comme le produit *tordu* de H et de $\bar{W}H$. Soit $t = ut$. Il s'agit de construire une opération principale sur le produit fibré de $\bar{W}A \times_t \bar{W}H$ et de $\bar{W}E$, au-dessus de $\bar{W}H$, telle que l'ensemble des classes d'équivalences soit $\bar{W}H$. On sait [13] qu'il y a des isomorphismes naturels:

$$\bar{W}A \times_t \bar{W}H = \bar{W}(A \times_t \bar{W}H).$$

Soit un $(n+1)$ -simplexe de $\bar{W}(A \times_t \bar{W}H)$ qui se projette sur $b \in \bar{W}_{n+1}H$. C'est un élément $\gamma = (g_n, g_{n-1}, \dots, g_0, b)$, où $b \in \bar{W}_{n+1}H$, $g_i \in (A \times_t \bar{W}H)_i$ est un i -simplexe de $A \times_t \bar{W}H$, et $p_1(g_i) = d_0^{n-i+1}b$, où p_1 est la première projection de $A \times_t \bar{W}H$ sur $\bar{W}H$.

Un i -simplexe de $A \times_t \bar{W}H$ est un élément qui s'écrit $g_i = (a_i, h_i)$ avec $a_i \in A_i$, $h_i \in \bar{W}_iH$, et on a $d_j g_i = (d_j a_i, d_j h_i)$ pour $j \neq 0$ et $d_0 g_i = (t(h_i) d_0 a_i, d_0 h_i)$. La relation $p_1(g_i) = d_0^{n-i+1}b$ signifie que $g_i = (a_i, d_0^{n-i+1}b)$, avec $b = (b_n, \dots, b_0, h)$ et $h = (b_n, \dots, b_0)$.

Soit un $(n+1)$ -simplexe de $\bar{W}E$ qui se projette par p_2 , (le morphisme définissant le $\bar{W}H$ -fibré $\bar{W}E \rightarrow \bar{W}H$), sur le même élément $b \in \bar{W}_{n+1}H$. Il s'écrit

$\sigma = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_0; b)$, où x_i est un i -simplexe de E et $p_2(x_i) = d_0^{n-i+1}b$.
Posons

$$f(\gamma)(\sigma) = (t(b)a_n x_n, t(d_1 b)a_{n-1} x_{n-1}, \dots, t(d_1^i b)a_{n-i} x_{n-i}, \dots, t(d_1^n b)a_0 x_0, b).$$

Nous allons montrer que f est simpliciale, c'est-à-dire que $f(d_{i+1}\gamma)(d_{i+1}\sigma) = d_{i+1}f(\gamma)(\sigma)$. On a

$$\begin{aligned} d_{i+1}\sigma &= (d_i x_n, \dots, d_1 x_{n-i+1}, x_{n-i-1} d_0 x_{n-i}, x_{n-i-2}, \dots, x_0; d_{i+1} b) \\ d_{i+1}\gamma &= (d_i g_n, \dots, d_1 g_{n-i+1}, g_{n-i-1} d_0 g_{n-i}, g_{n-i-2}, \dots, g_0, d_{i+1} b) \\ &= ((d_i a_n, d_i d_0 b), (d_{i-1} a_{n-1}, d_{i-1} d_0^2 b), \dots, (d_1 a_{n-i+1}, d_1 d_0^i b), \\ &\quad (a_{n-i-1}, d_0^{i+2} b)(t(d_0^{i+1} b)d_0 a_{n-i}, d_0^{i+2} b), (a_{n-i-2}, d_0^{i+3} b), \dots, \dots) \\ &= (\alpha_{n-1}, d_i d_0 b), (\alpha_{n-2}, d_{i-1} d_0^2 b), \dots, \\ &\quad (\alpha_{n-i}, d_1 d_0^i b), (\alpha_{n-i-1}), (\alpha_{n-i-2}, \dots; d_{i+1} b), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= d_i a_n, \alpha_{n-2} = d_{i-1} a_{n-1}, \dots, \alpha_{n-i} = d_1 a_{n-i+1}, \\ \alpha_{n-i-1} &= a_{n-i-1} t(d_0^{i+1} b) d_0 a_{n-i}, \alpha_{n-i-2} = a_{n-i-2} d_0^{i+3} b. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} f(d_{i+1}\gamma)(d_{i+1}\sigma) &= (t(d_{i+1} b \alpha_{n-1} \cdot d_i x_n, t(d_1 d_{i+1} b) \alpha_{n-2} \cdot d_{i-1} x_{n-1}, \dots \\ &\quad t(d_1^i d_{i+1} b)^{-1} \alpha_{n-i-1} \cdot x_{n-i-1} d_0 x_{n-i}, t(d_1^{i+1} d_{i+1} b)^{-1} \alpha_{n-i} \cdot x_{n-i}, \dots), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_{i+1}f(\gamma)(\sigma) &= d_i(t(b)a_n \cdot x_n), \dots, d_1(t(d_1^{i-1} b)a_{n-i+1} \cdot x_{n-i+1}), \\ &\quad t(d_1^{i+1} b)a_{n-i-1} \cdot x_{n-i-1} d_0(t(d_1^i b)a_{n-i} \cdot x_{n-i}), \dots. \end{aligned}$$

En utilisant que

$$d_1^i d_{i+1} = d_1^{i-1} d_1 d_{i+1} = d_1^{i-1} d_i d_1 = d_1^{i-j} d_{i-j+1} d_1^j = d_1^{i+1}, \text{ et } d_0 d_1^i = d_0^{i+1},$$

on est amené à comparer $A_1 = t(d_1^{i+1} b)a_{n-i-1} t(d_0^{i+1} b)d_0 a_{n-i} \cdot x_{n-i-1} d_0 x_{n-i}$ et

$$\begin{aligned} A_2 &= t(d_1^{i+1} b)a_{n-i-1} x_{n-i-1} \cdot t(d_0 d_1^i b)^{-1} t(d_1^{i+1} b)d_0 a_{n-i} d_0 x_{n-i} \\ &= t(d_1^{i+1} b)a_{n-i-1} \cdot x_{n-i-1} t(d_0^{i+1} b)^{-1} t(d_1^{i+1} b)d_0 a_{n-i} d_0 x_{n-i}. \end{aligned}$$

Comme

$$d_0^{i+1}b = (b_{n-i-1}, \dots) t(d_0^{i+1}b) = u(b_{n-i-1}): a \mapsto \widehat{b_{n-i-1}} \widehat{ab_{n-i-1}}^{-1},$$

et comme $u(b_{n-i-1})$ est un automorphisme, on a

$$A_1 = t(d_1^{i+1}b)(a_{n-i-1} \cdot d_0 a_{n-i}) \cdot x_{n-i-1} d_0 x_{n-i}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} A_2 &= t(d_1^{i+1}b)a_{n-i-1} \cdot x_{n-i-1}(x_{n-i-1})^{-1} t(d_1^{i+1}b)d_0 a_{n-i} x_{n-i-1} d_0 x_{n-i} \\ &= t(d_1^{i+1}b)a_{n-i-1} t(d_1^{i+1}b)d_0 a_{n-i} \cdot x_{n-i-1} d_0 x_{n-i} \\ &= t(d_1^{i+1}b)(a_{n-i-1} d_0 a_{n-i}) \cdot x_{n-i-1} d_0 x_{n-i} \end{aligned}$$

car $d_0^{i+1}b = (b_{n-i-1}, \dots)$, alors

$$t(d_0^{i+1}b) = u(b_{n-i-1}): a \mapsto \widehat{b_{n-i-1}} (\widehat{b_{n-i-1}})^2 (\widehat{b_{n-i-1}})$$

est un relevé quelconque de $b_{n-i-1} \in H$, dans E_{n-i-1} . On peut donc prendre $\widehat{b_{n-i-1}} = x_{n-i-1}$.

L'application f répond à la question, c'est-à-dire que c'est une opération principale sur le produit fibré de $\bar{W}A \times_t \bar{W}H$ et de $\bar{W}E$, au-dessus de $\bar{W}H$, telle que l'ensemble des classes d'équivalences soit $\bar{W}H$. \square

Nous allons utiliser cette proposition pour déterminer une structure principale sur le classifiant d'un espace d'équivalences d'homotopie pointées. Dans ce qui suit X est un espace simplement connexe, ayant deux groupes d'homotopie non nuls Π et Π' . Il est l'espace total d'un fibré dont la base est de type $K(\Pi, p)$ et la fibre de type $K(\Pi', p+1)$, classifié par un invariant d'Eilenberg $\eta \in H^{p+2}(K(\Pi, p), \Pi')$. Alors on connaît [15] le fibré:

$$(*) \quad \text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \rightarrow E(X) \rightarrow (\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_\eta,$$

$E(X)$ étant l'espace de Hopf des équivalences d'homotopie pointées de l'espace pointé X et $(\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_\eta$ étant le sous-groupe d'isotropie de η , pour l'opération évidente de $\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi'$ sur $H^{p+2}(K(\Pi, p), \Pi')$.

Remplaçons X par son complexe minimal associé que nous notons $M = K(\Pi', p+1) \times_\eta K(\Pi, p)$. Alors $E(X)$ est remplacé, à homotopie près par $\text{Aut } M$ et le fibré $(*)$ ci-dessus, donne une suite exacte

$$(**) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow \text{Aut } M \xrightarrow{j} H_\eta \rightarrow 0,$$

où A est le groupe simplicial abélien $\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1))$, et H_n est le groupe simplicial $(\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_n$. La suite exacte $(**)$ ci-dessus détermine une opération $\varphi: H_n \rightarrow \text{Aut } A$ définie par $\varphi(v, v') = (f \mapsto u \circ f \circ u^{-1})$, où u est défini par $j(u) = (v, v')$.

Considérons l'opération $\psi: H_n \rightarrow \text{Aut } A$ donnée par $\psi(v, v') = (f \mapsto v' \circ f \circ v^{-1})$, qui permet de définir le fibré associé au fibré universel déterminer par le groupe H_n .

2.3 LEMME. *Les opérations φ et ψ de H_n dans $\text{Aut } A$ définies ci-dessus coïncident.*

Preuve. L'élément (v, v') de H_n a un antécédent par j , que nous notons $u: K(\Pi', p+1) \times_n K(\Pi, p) \rightarrow K(\Pi', p+1) \times_n K(\Pi, p)$. Supposons montré que $u(x, x') = (v'(x') + g_u(x), v(x))$ (voir lemme 2.4). Comme $u^{-1}(y, y') = (v'^{-1}(y') + h_u^{-1}(y), v^{-1}(y))$, on doit avoir la relation $v'h_u^{-1}(y) + g_u v^{-1}(y) = 0$ pour que $u \circ u^{-1} = id$. Soit $f \in A$, alors on vérifie que $u \circ f \circ u^{-1}(y, y') = (y' + v' \circ f \circ v^{-1}(y), v^{-1}(y))$. \square

2.4 LEMME. *Soit Y un espace 1-connexe pointé et soit $u: K(\Pi', n) \times_n Y \rightarrow K(\Pi', n) \times_n Y$ un isomorphisme. Notons $v: Y \rightarrow Y$ et $v' \in \text{Aut } \Pi'$, les morphismes induits par u , respectivement, sur la base et sur $\text{Aut } \Pi'$. On suppose que v est un morphisme pointé, alors u vérifie $u(x, y) = (v'(x) + g(y), v(y))$, où g est une application de Y dans $K(\Pi', n)$.*

Preuve. L'opération de $K(\Pi', n)$ sur lui-même par translation induit naturellement une opération de $K(\Pi', n) \times K(\Pi', n)$ sur $\text{Hom}(K(\Pi', n), K(\Pi', n))$. Cette opération respecte l'isomorphisme des groupes simpliciaux: $\text{Hom}(K(\Pi', n), K(\Pi', n)) = K(\Pi', n) \times \text{Hom}(\Pi', \Pi')$ obtenu en identifiant $K(\Pi', n)$ aux translations et $\text{Hom}(K(\Pi', n), K(\Pi', n))$ aux morphismes induits en homotopie. Les applications de $K(\Pi', n) \times_n Y$ dans lui-même au dessus de v s'identifient aux sections du produit tordu $\mathcal{E} = \text{Hom}(K(\Pi', n), K(\Pi', n)) \times_{n \times n} Y \rightarrow Y$ où $K(\Pi', n) \times_{n \times n} Y$ est induit de $K(\Pi', n) \times_n Y$ par v , ([16, p. 14]). Notons s_u la section déterminée par le morphisme u donné. s_u est à valeurs dans la composante connexe du morphisme induit par v' (ce morphisme est un élément des fibres de \mathcal{E}). La réunion de ces composantes définissent un sous-fibré \mathcal{E}' de \mathcal{E} car Y est simplement connexe. La section s_u définit donc une application $g: Y \rightarrow K(\Pi', n)$ par $s_u(y) = ((x, y) \mapsto (v'(x) + g(y), y))$. Pour (x, y) dans $K(\Pi', n) \times_n Y$, on a alors $u(x, y) = s_u(y) \cdot x = (v'(x) + g(y), v(y))$. \square

Le type d'homotopie du classifiant de l'espace des équivalences d'homotopie d'un tel espace X est connu:

2.5 THÉORÈME. *Soit X un espace simplement connexe, ayant deux groupes d'homotopie non nuls Π et Π' et d'invariant d'Eilenberg $\eta \in H^{p+2}(K(\Pi, p), \Pi')$. Alors $\bar{W}E(X) \rightarrow \bar{W}(\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_n$ est classifié par un élément de $\text{Ext}_{(\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_n}^3(\Pi, \Pi')$. Si cette classe est nulle, alors $\bar{W}E(X)$*

est homotopiquement équivalent au fibré en groupes $\text{Hom}(K(\Pi, p), (K(\Pi', p+2))_0 \times_{\psi} K((\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_{\eta}, 1))$, où ψ est la fonction tordante qui permet de définir le fibré, de fibre $\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+2))_0$, associé au fibré universel déterminé par le groupe $(\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_{\eta}$.

Preuve. La suite exacte ci-dessus (**) donne une fibration:

$$(***) \quad 0 \rightarrow \bar{W}A \rightarrow \bar{W}\text{Aut } M \xrightarrow{j} \bar{W}H_{\eta} \rightarrow 0.$$

D'après la proposition 2.1, $\bar{W}\text{Aut } M$ a une structure de $\bar{W}H_{\eta}$ -fibré principal classifié par la classe d'homotopie d'une application $\theta: \bar{W}H_{\eta} \rightarrow \bar{W}(\bar{W}A \times_{\varphi} \bar{W}H_{\eta})$ (notations du lemme 2.3). D'autre part, on a [13, p. 38] les isomorphismes suivant $\bar{W}(\bar{W}A \times_{\varphi} \bar{W}H_{\eta}) = \bar{W}^2 A \times_{\bar{W}\varphi} \bar{W}H_{\eta}$. Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 2.3 pour conclure, d'après le théorème 1.1, que la classe d'homotopie de l'application classifiante θ détermine un élément de $\text{Ext}_{H_{\eta}}^3(\Pi, \Pi')$. Les espaces $\bar{W}\text{Aut } M$ et $\bar{W}E(X)$ sont du même type d'homotopie. D'autre part, il y a une inclusion $j: M \rightarrow X$ et une rétraction $r: X \rightarrow M$. Ceci définit un morphisme (pas seulement à homotopie près) $\text{Aut } M \rightarrow E(X)$, qui donne un morphisme $\bar{W}\text{Aut } M \rightarrow \bar{W}E(X)$. Il s'agit alors d'une équivalence d'homotopie et même d'une équivalence fibrée. \square

3. Classification des G-opérations

Soient G un groupe discret et $E(X)$ l'espace des équivalences d'homotopie qui sont des applications pointées. Une *G-opération* est un morphisme $\phi: G \rightarrow E(X)$ qui est un morphisme entre espaces de Hopf de l'espace de Hopf G dans l'espace de Hopf $E(X)$ (on précise que ϕ n'est pas un morphisme à homotopie près). Par la projection donnée dans la suite exacte (*) du paragraphe 2, une *G-opération* donne un morphisme $\varphi: G \rightarrow (\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_{\eta}$.

Considérons le $\bar{W}G$ -fibré $(\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X))$ induit par $\bar{W}\varphi$ du $\bar{W}H$ -fibré $\bar{W}E(X) \rightarrow \bar{W}H$:

$$\begin{array}{ccc} \bar{W}\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) & = & \bar{W}\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X)) & \longrightarrow & \bar{W}E(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{W}G & \xrightarrow{\bar{W}\varphi} & \bar{W}(\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_{\eta}. \end{array}$$

D'après le paragraphe 2 précédent, le $\bar{W}G$ -fibré $(\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X)) \rightarrow \bar{W}G$ est

$\bar{W}G$ -principal. L'opération $\bar{W}\phi$ détermine une section encore notée $\bar{W}\phi$ de ce fibré induit et la proposition suivante est un corollaire du théorème 2.5.

3.1 PROPOSITION. *Soit ϕ une G -opération pointée sur X espace pointé ayant deux groupes d'homotopie Π et Π' et d'invariant d'Eilenberg η . Si $\varphi: G \rightarrow (\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_\eta$ est le morphisme déduit de ϕ , alors le fibré induit $(\bar{W}\phi)^*(\bar{W}E(X))$ est équivalent au fibré $\bar{W}\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG$, par une équivalence qui fait de la classe de $\bar{W}\phi$ la classe de la section nulle de $\Gamma[\bar{W}\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG]$, l'espace des sections de ce fibré. \square*

3.2 Définition des classes caractéristiques associées à une G -opération. *Soit X un espace pointé ayant deux groupes d'homotopie Π et Π' et d'invariant d'Eilenberg η , à deux G -opérations pointées $\phi_0: G \rightarrow E(X)$ et $\phi_1: G \rightarrow E(X)$, induisant, par projection, le même $\varphi: G \rightarrow (\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_\eta$, on sait associer un élément $\theta(\phi_0, \phi_1)$, appartenant à $\text{Ext}_G^2(\Pi, \Pi')$. Cette classe est caractéristique dans le sens suivant: $\theta(\phi_0, \phi_1) = 0$ si et seulement si $[\bar{W}\phi_0] = [\bar{W}\phi_1]$. \square*

La question réciproque peut s'énoncer de la façon suivante: soit une classe $\theta \in \text{Ext}_G^2(\Pi, \Pi')$ et une G -opération pointée $\phi_0: G \rightarrow E(X)$, existe-t-il une G -opération pointée ϕ_1 telle que $\theta(\phi_0, \phi_1) = \theta$? Notre construction permet seulement de trouver, par différence, la classe d'homotopie d'un morphisme $\beta: \bar{W}G \rightarrow \bar{W}E(X)$. On peut considérer β comme un morphisme de $\beta: \bar{W}G \rightarrow \bar{W}GH(X)$, où $H(X)$ est l'espace des équivalences d'homotopie de X (ne préservant pas forcément le pointage). Par la construction de G. Cooke [5], on obtient un espace Y , une équivalence d'homotopie $f: X \rightarrow Y$ et une G -opération $\gamma: G \rightarrow H(Y)$ telle que $[\beta] = [f] \circ [\gamma]$. En utilisant que ce sont des classifiants pour certaines familles de fibrés [1], [20], G. Cooke associe à $[f]$ un morphisme que nous allons noté $\bar{W}f: \bar{W}H(X) \rightarrow \bar{W}H(Y)$ tel que $\bar{W}f \circ \bar{W}\gamma = \bar{W}\beta$.

Savoir quand la dimension de l'espace Y est finie, est une question qui se rapproche d'un problème posé par Steenrod voir [2] et [21]. D'autre part, il reste à déterminer quand on peut imposer à β d'avoir pour but $\bar{W}E(Y)$ et non $\bar{W}H(Y)$. Une réponse est donnée dans le paragraphe suivant.

3.3 REMARQUES. 1. D'après les paragraphes précédents, si $\text{Ext}_G^2(\Pi, \Pi')$ est nul, alors la donnée d'un morphisme $\varphi: G \rightarrow (\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_\eta$ détermine la classe d'homotopie d'une application, $\bar{W}\phi: \bar{W}G \rightarrow \bar{W}E(X)$, telle que la projection de $\bar{W}\phi$ soit $\bar{W}\varphi$.

2. Les cas particuliers connus [9], [12], [13] sont de deux types: ou $\varphi: G \rightarrow (\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')_\eta$ a pour image l'élément neutre, c'est-à-dire que Π et Π' sont de G -modules triviaux, ou l'invariant d'Eilenberg η est nul, alors $E(X)$ est homotope à $\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times (\text{Aut } \Pi \times \text{Aut } \Pi')$. Dans ces deux cas, il existe une section "canonique" de $\bar{W}G$ dans $(\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X))$, dont la classe est la classe de l'élément nul de $\Gamma[\bar{W}\text{Hom}(K(\Pi, p),$

$K(\Pi', p+1)) \times_G WG]$. Les classes associées à une G -opération (def. 3.2) sont alors des classes caractéristiques au sens classique, c'est-à-dire qu'elles sont nulles si et seulement si la G -opération est homotope à l'opération “canonique” sur X , déduite de la section “canonique” de $\bar{W}G$ dans $(\bar{W}\varphi)^*(\bar{W}E(X))$.

4. Application

G. Cooke [5, th. 1.3] définit une famille \mathcal{F} constituée des types d'homotopie d'espaces, ayant un revêtement universel de type d'homotopie \tilde{X} donné et de groupe fondamental isomorphisme à G . Il donne une classification mettant en bijection cette famille \mathcal{F} avec un quotient de $[K(G, 1), \bar{W}H(\tilde{X})]$ les classes d'homotopie pointées d'applications pointées de but $\bar{W}H(\tilde{X})$. L'espace $H(\tilde{X})$ est l'espace des équivalences d'homotopie de \tilde{X} (ne préservant pas forcément le pointage). Les résultats précédents permettent de calculer un sous-groupe de $[K(G, 1), \bar{W}H(\tilde{X})]$ comme un groupe d'extensions. Ce groupe d'extensions va être en bijection avec une sous famille de \mathcal{F} que nous allons définir.

Une fois pour toute, on choisit ici des groupes Π_2 et Π_3 et leur structure de G -modules, de même qu'une opération cohomologique $\eta \in H^4(K(\Pi_2, 2), \Pi_3)$, et un morphisme $\theta: K(G, 1) \rightarrow K((\text{Aut } \Pi_2 \times \text{Aut } \Pi_3)_\eta, 1)$. Ces données fixent en particulier, le type d'homotopie d'un espace \tilde{X} , simplement connexe, tel que $\pi_2(\tilde{X}) = \Pi_2$ et $\pi_3(\tilde{X}) = \Pi_3$, ayant η comme invariant de Postnikov. Pour simplifier, on va supposer que Π_2 est abélien libre, alors la suite exacte:

$$0 \rightarrow \text{Ext}(\Pi_2, \Pi_3) \rightarrow \pi_0 H(\tilde{X}) \rightarrow (\text{Aut } \Pi_2 \times \text{Aut } \Pi_3)_\eta \rightarrow 1$$

permet d'identifier $\pi_0 H(\tilde{X})$ à $(\text{Aut } \Pi_2 \times \text{Aut } \Pi_3)_\eta$, et on sait que $\pi_0 H(\tilde{X})$ est égal à $\pi_0 E(\tilde{X})$.

4.1 Définition des obstructions $[\theta_1]$ et $[\theta_2]$. $H(\tilde{X})$ étant une union de composantes connexes, la suite de morphismes $E(\tilde{X}) \rightarrow H(\tilde{X}) \rightarrow \tilde{X}$ est un fibré de Kan et la suite

$$\tilde{X} \rightarrow \bar{W}E(\tilde{X}) \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$$

vérifie une suite exacte d'homotopie d'une fibration. Transformons le morphisme $\bar{W}E(\tilde{X}) \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$ en une fibration $E \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$ et soit F la fibre au dessus d'un point. Comme par construction, il existe un morphisme entre \tilde{X} et F , ils sont du même type d'homotopie. On est ramené à un problème classique d'obstruction: les obstructions pour qu'un morphisme $\varphi: K(G, 1) \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$ se relève à $\bar{W}E(\tilde{X})$ sont dans $H^{i+1}(\bar{W}H(\tilde{X}); \pi_i(\tilde{X}))$.

En utilisant la théorie des B -fibrés [13], ces obstructions s'interprètent à

l'aide des décompositions de Postnikov et des décompositions de Postnikov fibrées. On décide de noter en indice les indices des groupes d'homotopie, par exemple, on note $X_{2,3}$ pour \tilde{X} . Faisons une décomposition de Postnikov fibrée de $E \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$, le fibré associé à l'application $\bar{W}E(\tilde{X}) \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$.

$$\begin{array}{ccccc}
 K(\Pi_3, 3) & \hookrightarrow & E_{123} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 K(\Pi_2, 2) & \hookrightarrow & E_{12} & \xrightarrow{\xi_3} & K(\Pi_3, 4) \times_{t'} K(\text{Aut } \Pi_3, 1) \\
 & \nearrow & \downarrow & & \\
 K(G, 1) & \hookrightarrow & \bar{W}H(\tilde{X}) & \xrightarrow{\xi_2} & K(\Pi_2, 3) \times_t K(\text{Aut } \Pi_2, 1)
 \end{array}$$

Le premier étage est le fibré $K(\Pi_2, 2) \rightarrow E_{1,2} \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$ classifié, en tant que $\bar{W}H(\tilde{X})$ -fibré, par la classe d'homotopie d'une application $\xi_2: \bar{W}H(\tilde{X}) \rightarrow K(\Pi_2, 3) \times_{t_2} K(\text{Aut } \Pi_2, 1)$. La première obstruction pour que le morphisme $\varphi: K(G, 1) \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$ se relève à $\bar{W}E(\tilde{X})$ est que la classe $[\theta_1]$ de $\xi_2 \circ \varphi$ soit nulle dans le 3-ième groupe de cohomologie tordue de $K(G, 1)$ à coefficients dans le système de coefficients déterminé par l'action de G sur Π_2 c'est-à-dire coïncide avec une section canonique du fibré induit, sur $K(G, 1)$, du fibré en groupes $K(\Pi_2, 3) \times_{t_2} K(\text{Aut } \Pi_2, 1) \rightarrow K(\text{Aut } \Pi_2, 1)$. Le morphisme de $K(G, 1)$ sur $K(\text{Aut } \Pi_2, 1)$ est donné par l'opération de G sur Π_2 .

Supposons que $[\theta_1]$ soit nulle. Le deuxième étage de Postnikov fibré de $E \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$, est le fibré $E \rightarrow E_{1,2}$ qui est classifié, en tant que $E_{1,2}$ -fibré, par la classe d'homotopie d'une application $\xi_3: E_{1,2} \rightarrow K(\Pi_3, 4) \times_{t_3} K(\text{Aut } \Pi_3, 1)$. Supposer que $[\theta_1]$ est nulle signifie que le fibré induit du fibré $E_{1,2} \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$ par φ , est un fibré en groupes. Il admet donc une section canonique s . Si de plus la classe $[\theta_2]$ de $\xi_3 \circ s$ est nulle dans le 4-ième groupe de cohomologie tordue de $K(G, 1)$ à coefficients dans le système de coefficients déterminé par l'action de G sur Π_3 , alors le morphisme $\varphi: K(G, 1) \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$ se relève à $\bar{W}E(\tilde{X})$.

4.2 Remarque. Par une démonstration classique dans les décompositions de Postnikov, que nous ne ferons pas ici, on peut donner une interprétation de ξ_2 et ξ_3 comme des invariants dans la décomposition de Postnikov d'un espace X dont le groupe fondamental est G , qui admet \tilde{X} comme revêtement universel, avec les opérations données de G sur Π_2 et Π_3 tel que le fibré $X_{2,3} \rightarrow X \rightarrow K(G, 1)$ soit classifié par le morphisme $\varphi: K(G, 1) \rightarrow \bar{W}H(X_{2,3})$.

4.3 Définition de \mathcal{F}_θ . Considérons l'ensemble des couples (Y, u) tel que l'espace Y ait un revêtement universel \tilde{Y} de type d'homotopie \tilde{X} et tel que u soit un triplet d'isomorphismes de $\pi_1(Y)$ sur G et de $\pi_i(Y)$ sur Π_i , $i = 1, 2$. Notons \mathcal{F} le quotient de cet ensemble de (Y, u) par $(Y, u) \sim (Z, v)$ s'il existe une équivalence d'homotopie $f: Y \rightarrow Z$ vérifiant $v_i \circ \pi_i(f) = u_i$.

4.4 LEMME. Si $(Y, u) \sim (Z, v)$ et si $\varphi_{\tilde{Y}}: K(G, 1) \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$ est le morphisme classifiant du revêtement universel $\tilde{Y} \rightarrow Y$, alors la classe d'homotopie de $\varphi_{\tilde{Y}}$ est égale à la classe d'homotopie de φ_Z .

Preuve. L'équivalence entre (Y, u) et (Z, v) est donnée par une équivalence d'homotopie $f: Y \rightarrow Z$. On est dans la situation où f se projette en une équivalence d'homotopie $\tilde{f}: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Z}$, d'où une équivalence d'homotopie \tilde{f} de \tilde{X} .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \tilde{Y} & & & & & \\
 & \swarrow & \searrow & & & & \\
 \tilde{X} & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & K(\pi_1(Y), 1) & \xrightarrow{u_1} & K(G, 1) \\
 & \downarrow \tilde{f} & \downarrow f & & \downarrow v_1^{-1} \circ u_1 & & \downarrow id \\
 & & Z & \longrightarrow & K(\pi_1(Z), 1) & \xrightarrow{v_1} & K(G, 1) \\
 & \uparrow & \uparrow & & & & \\
 & \tilde{Z} & & & & & \bar{W}H(\tilde{X}) \\
 & & & & & \searrow & \downarrow \Gamma_{\tilde{f}} \\
 & & & & & & \bar{W}H(\tilde{X})
 \end{array}$$

La condition $v_i \circ \pi_i(f) = u_i$ impose à $\pi_i(\tilde{f})$ d'être l'identité sur Π_i . La classe d'homotopie de \tilde{f} est donc un élément de $\pi_0 H^h(\tilde{X})$, où $H^h(\tilde{X})$ est l'espace des équivalences d'homotopie qui induisent l'identité sur les groupes d'homotopie de \tilde{X} . On voit ici intervenir une opération de $\pi_0 H^h(\tilde{X})$ sur $\bar{W}H(\tilde{X})$, mais l'hypothèse Π_2 abélien libre implique que $\pi_0 H^h(\tilde{X})$ est trivial car il est égal à $\text{Ext}(\Pi_2, \Pi_3)$. \square

Parmi les données choisies une fois pour toute, nous avons fixé un morphisme $\theta: K(G, 1) \rightarrow K((\text{Aut } \Pi_2 \times \text{Aut } \Pi_3)_n, 1)$. D'après la remarque 4.2, ces données déterminent aussi les classes $[\theta_1]$ et $[\theta_2]$. Notons \mathcal{F}_θ la restriction de l'ensemble \mathcal{F} , défini en 4.3, aux classes de (Y, u) tels que les classes d'obstructions $[\theta_1]$ et $[\theta_2]$, associées au type d'homotopie de Y , soient nulles et telles que le morphisme classifiant du fibré universel $\varphi_{\tilde{Y}}: K(G, 1) \rightarrow \bar{W}E(\tilde{X})$ vérifie $\pi_1 \varphi_{\tilde{Y}} = \theta$.

4.5 THÉORÈME. Soit \tilde{X} un espace simplement connexe ayant deux groupes d'homotopie $\pi_2(\tilde{X}) = \Pi_2$, $\pi_3(\tilde{X}) = \Pi_3$, avec Π_2 libre, et une action d'un groupe discret G sur Π_2 et Π_3 . Alors l'ensemble \mathcal{F}_θ des types d'homotopie défini ci-dessus ci-dessus est en bijection avec $\text{Ext}_G^2(\Pi_2, \Pi_3)$.

Preuve. Grâce aux paragraphes précédents, on sait comment une élément de $\text{Ext}_G^2(\Pi_2, \Pi_3)$ détermine la classe d'homotopie d'un morphisme $\varphi: K(G, 1) \rightarrow \bar{W}E(\tilde{X})$ tel que $\pi_1 \varphi = \theta$, qui se prolonge en un morphisme $\varphi'': K(G, 1) \rightarrow \bar{W}H(\tilde{X})$. On sait par G. Cooke construire un espace Y dont le groupe fondamental est G , ayant un revêtement universel \tilde{Y} tel que la classe d'homotopie de φ'' soit un morphisme classifiant pour (Y, h) où h est une

équivalence d'homotopie entre \tilde{X} et \tilde{Y} . Par construction φ'' se relève à $\bar{W}E(\tilde{X})$ et $(Y, (\pi_1(h), \pi_2(h), \pi_3(h))$ est un élément de \mathcal{F}_θ .

La définition de \mathcal{F}_θ a été faite pour que la construction réciproque de G. Cooke associe, à un représentant (Y, u) d'un élément de \mathcal{F}_θ , un élément de $\text{Ext}_G^2(\Pi_2, \Pi_3)$. \square

5. Annexe: Construction d'un morphisme entre $\text{Ext}_G^n(\Pi, \Pi')$ et $\pi_0\Gamma[\bar{W}^{n-1}\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG]$

Pour $n = 0$, on a évidemment $\text{Hom}_G(\Pi, \Pi') = \pi_0\Gamma[\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p)) \times_G WG]$. Pour $n = 1$, soit une suite exacte de G -modules $0 \rightarrow \Pi' \rightarrow A \rightarrow \Pi \rightarrow 0$. Il lui est associé une suite exacte: $0 \rightarrow K(\Pi', p) \rightarrow K(A, p) \rightarrow K(\Pi, p) \rightarrow 0$, et une suite exacte de $\bar{W}G$ -fibrés:

$$\bar{W}G \rightarrow K(\Pi', p) \times_G WG \rightarrow K(A, p) \times_G WG \rightarrow K(\Pi, p) \times_G WG \rightarrow \bar{W}G.$$

C'est une $\bar{W}G$ -fibration principale. Elle est classifiée par un $\bar{W}G$ -morphisme $K(\Pi, p) \times_G WG \rightarrow \bar{W}G \bowtie (K(\Pi', p) \times_G WG)$.

Notons $\xi: K(\Pi, p) \times_G WG \rightarrow K(\Pi', p+1) \times_G WG$ le morphisme obtenu en composant le morphisme précédent par l'isomorphisme canonique $\bar{W}G \bowtie (K(\Pi', p) \times_G WG) = K(\Pi', p+1) \times_G WG$. On sait qu'un tel morphisme ξ détermine un élément de $\pi_0\Gamma[\text{Hom}(K(\Pi, p), K(\Pi', p+1)) \times_G WG]$.

Pour $n = 2$, soit une suite exacte de G -modules $0 \rightarrow \Pi' \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \Pi \rightarrow 0$. Il lui est associé deux suites exactes: $0 \rightarrow \Pi' \rightarrow A \rightarrow K \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow K \rightarrow B \rightarrow \Pi \rightarrow 0$, d'où deux suites exactes $0 \rightarrow K(\Pi', p) \rightarrow K(A, p) \rightarrow K(K, p) \rightarrow 0$, et $0 \rightarrow K(K, p-1) \rightarrow K(B, p-1) \rightarrow K(\Pi, p-1) \rightarrow 0$, et deux suites exactes de $\bar{W}G$ -fibrés:

$$\bar{W}G \rightarrow K(\Pi', p) \times_G WG \rightarrow K(A, p) \times_G WG \rightarrow K(K, p) \times_G WG \rightarrow \bar{W}G,$$

et

$$\begin{aligned} \bar{W}G &\rightarrow K(K, p-1) \times_G WG \rightarrow K(B, p-1) \times_G WG \\ &\rightarrow K(\Pi, p-1) \times_G WG \rightarrow \bar{W}G. \end{aligned}$$

Ce sont des $\bar{W}G$ -fibrations principales. Elles sont respectivement classifiées par un $\bar{W}G$ -morphisme $K(K, p) \times_G WG \rightarrow \bar{W}G \bowtie (K(\Pi', p) \times_G WG)$, et $K(\Pi, p-1) \times_G WG \rightarrow \bar{W}G \bowtie (K(K, p-1) \times_G WG)$.

Notons $\xi: K(K, p) \times_G WG \rightarrow K(\Pi', p+1) \times_G WG$ obtenu en composant

le morphisme précédent par l'isomorphisme canonique: $\bar{W}G \bowtie (K(\Pi', p) \times_G WG) = K(\Pi', p+1) \times_G WG$, et $\eta: K(\Pi, p-1) \times_G WG \rightarrow K(K, p-1) \times_G WG$ obtenu en composant le morphisme précédent par l'isomorphisme canonique $\bar{W}G \bowtie (K(K, p-1) \times_G WG) = K(K, p) \times_G WG$. On sait qu'un tel morphisme $\xi \circ \eta$ détermine un élément de $\pi_0 \Gamma[\text{Hom}(K(\Pi, p-1), K(\Pi', p+1)) \times_G WG]$, qui est isomorphe à $\pi_0 \Gamma[\bar{W}(\text{Hom}(K(\Pi, p-1), K(\Pi', p)) \times_G WG)]$.

Références

1. Allaud, G., On the classification of fibre space. *Math. Z.* 92, 110–125, (1966).
2. Assadi, A., Homotopy actions and cohomologie of finite groups, *LNM 1217*, 26–57, (1986).
3. Baues, H. J., Algebraic Homotopy. *Cambridge Studies in Advanced Math.* 15, Cambridge University Press, (1990).
4. Cartan, H., and Eilenberg, S., *Homological Algebra*. Princeton University Press, (1973).
5. Cooke, G., Replacing homotopy actions by topological actions. *Trans. of A.M.S.*, 237, (1978).
6. Cuntz, J., A New Look at KK-theory, *K-Theory*, 31–51, (1987).
7. Didierjean, G., Homotopie de l'espace des équivalences fibrées. *Ann. Inst. Fourier*, 35(3), 33–47, (1985).
8. Dold, A., and Lashof, R., Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalence of bundles. *Ill. J. Math.* 3, 285–305, (1959).
9. Dwyer, D. G., Kan, D. M. and Smith, J. H., Towers of fibrations and homotopical wreath products. *J. Pure and Applied Algebra*, 3, 285–305, (1989).
10. Fieux, E., Classes caractéristiques en KK-théorie des C^* -algèbres avec opérateurs. Thèse, URA 1408 Top. et Géom., U.P.S. Toulouse, (1990).
11. Hayat-Legrand, C., Classes homotopiques associées à une G -opération. *LNM 1509*, 134–138, (1990).
12. Huebschmann, J., Change of rings and characteristic classes. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 106, 29, (1989).
13. Legrand, A., Homotopie des espaces de sections. *LNM 941*, (1982).
14. Legrand, A., Caractérisation des opérations d'algèbres sur les modules différentiels. *Compositio Math.*, 66, 23–36, (1988).
15. May, J. P., *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostrand, (1963).
16. Mac Lane, S., *Homology*, Springer Verlag, (1979).
17. Rutter, J., The group of homotopy self-equivalences of non-simply-connected spaces using Postnikov decompositions, I.H.E.S. preprint, (1990).
18. Shih, W., On the group of equivalences maps. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 492, 361–365, (1964).
19. Smith, L., Lectures on the Eilenberg-Moore Spectral Sequence. *LNM 134*, (1970).
20. Stasheff, J. D., A classification theorem for fibre spaces. *Topology* 2, 239–246, (1963).
21. Vogel, P., On Steenrod's problem for non-abelian finite groups. *LNM 1051*, 660–665, (1984).