COMPOSITIO MATHEMATICA

PIERRE DELIGNE
GEORGIOS PAPPAS

Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant

Compositio Mathematica, tome 90, nº 1 (1994), p. 59-79
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1994__90_1_59_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica **90**: 59–79, 1994.
© 1994 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*

Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant

PIERRE DELIGNE[1] et GEORGIOS PAPPAS[2]

[1]*School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey 08540*
[2]*Department of Mathematics, Columbia University, New York, New York 10027*

Received 4 May 1992; accepted in final form 5 November 1992

Soient K un corps de nombres totalement réel de degré g sur $\mathbb{Q}$ et R l'anneau de ses entiers. Fixons un entier $n \geqslant 3$ (le niveau), soit $\mathbb{Z}[\xi_n] \subset \mathbb{C}$ engendré par les racines n^{iemes} de l'unité et soit $\Gamma(n)$ le sous-groupe de congruence de niveau n

$$\Gamma(n) := \operatorname{Ker}(SL(2, R) \to SL(2, R/nR)).$$

Dans [14], M. Rapoport considére un problème de modules pour des variétés abéliennes de dimension g, à multiplication par R, munies de données auxiliaires convenables. L'espace de modules $\mathscr{M}^R$ correspondant est un espace algébrique sur $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$. L'espace algébrique $\mathscr{M}^R$ sur $\mathbb{C}$ qui s'en déduit par l'extension des scalaires $\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n] \hookrightarrow \mathbb{C}$ est la variété de Shimura $X^g/\Gamma(n)$, où X est le demi-plan de Poincaré, sur lequel $SL(2, K)$ agit via les g plongements de $SL(2, K)$ dans $SL(2, \mathbb{R})$ déduits des plongements réels de K.

Une fois choisie une donnée combinatoire de type convenable, Rapoport définit une compactification $\overline{\mathscr{M}}^R$ de $\mathscr{M}^R$, qui sur $\mathbb{C}$ se réduit à une compactification toroïdale à la Mumford et al [11] de $\mathscr{M}^R$.

Dans [14], Rapoport affirme que $\overline{\mathscr{M}}^R$ est propre et lisse sur $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$. Un corollaire, exploité dans Deligne-Ribet [4], est l'irréductibilité des fibres géométriques de $\mathscr{M}^R$ sur $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$. L'assertion de propreté est fausse en les caractéristiques (premières à n) divisant le discriminant Δ de K sur $\mathbb{Q}$. Le problème est à distance finie: non-propreté de $\mathscr{M}^R$ sur l'espace de modules des variétés abéliennes polarisées, en les caractéristiques divisant Δ. Dans l'application [14] pages 322–323 du critère valuatif de propreté, le cas où il y a bonne réduction n'est pas traité.

Pous $[K:\mathbb{Q}] = 2$, que $\overline{\mathscr{M}}^R$ soit propre et lisse contredisait d'ailleurs [6] 4.4, d'après lequel l'action de Gal $(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur la cohomologie l-adique de $\overline{\mathscr{M}}^{\underline{R}}$ est ramifiée en les nombres premiers p (premiers à l et n) divisant Δ.

Pour rétablir la propreté, il faut modifier le problème de modules considéré, remplaçant $\mathscr{M}^R$ par un espace de modules de variétés abéliennes $\mathscr{M}$ dont $\mathscr{M}^R$ est un ouvert fibre à fibre dense. Le schéma $\mathscr{M}$ sur $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$ n'est plus

lisse en les mauvaises caractéristiques. Rien n'est à changer aux arguments de Rapoport pour compactifier $\mathcal{M}$ en $\bar{\mathcal{M}}$ propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$: on prend pour espace $\bar{\mathcal{M}}$ le recollement de $\bar{\mathcal{M}}^R$ et $\mathcal{M}$ le long de $\mathcal{M}^R$.

Dans le présent article, nous définissons $\mathcal{M}$ et déterminons ses singularités. Les fibres de $\mathcal{M} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n]$ sont normales et de là résulte en toute caractéristique l'iréductibilité des fibres géométriques de $\bar{\mathcal{M}}$, et donc de $\mathcal{M}^R$.

Sur $\mathbb{C}$, déformer une variété abélienne polarisée A revient à déformer le sous-espace $F^0 \subset H_1(A, \mathbb{C})$ (filtration de Hodge) parmi les sous-espaces lagrangiens de $H_1(A, \mathbb{C})$. Pour $x \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, ceci permet d'identifier le complété formel de $\mathcal{M}$ en x avec l'espace de modules formels $\mathcal{M}'(x)$ des déformations d'un objet d'algèbre multilinéaire attaché à x. En général, la théorie cristalline des déformations joue un rôle analogue. Elle requiert toutefois des puissances divisées et de ce fait ne fournit un isomorphisme entre le complété formel $\mathcal{M}^R_x$ de $\mathcal{M}^R$ en un point fermé x et $\mathcal{M}'(x)$ convenablement défini qu'après l'adjonction de puissances divisées sur l'idéal maximal. Nous prouverons néanmoins *l'existence* d'un isomorphisme entre $\mathcal{M}^R_x$ et $\mathcal{M}'(x)$. L'astuce que nous utilisons a été trouvée indépendamment par J. de Jong dans sa thèse (Moduli of abelian varieties and Dieudonné modules of finite group schemes, Ch. 2, Prop. 3.6, 4.5, Nijmegen 1992). Dans la présentation de de Jong, on obtient plutôt un isomorphisme canonique entre des schémas formels formellement lisses sur $\mathcal{M}^R_x$ et $\mathcal{M}'(x)$.

La méthode suivie s'applique à d'autre cas. Elle fournit des modèles pour les singularités d'espaces formels de modules en particulier dans les cas suivants.

(i) Variétés abéliennes A munies d'une structure de R-module $\rho: R \to \mathrm{End}(A)$ et d'une polarisation principale $\varphi: A \xrightarrow{\sim} A^*$ qui soit R-linéaire.

(ii) Triples (A, B, u) formés de variétés abéliennes principalement polarisées A et B de dimension d et d'une isogénie $u: A \to B$ avec ${}^t uu = p.\mathrm{Id}_A$.

Comment traiter ces cas, et des variantes, sera expliqué au paragraphe 5.

Nous remercions D. Eisenbud d'une lettre instructive sur l'espace des paires de matrices symétriques X, Y vérifiant $XY = p$.

1. Rappels sur les schémas abéliens

Nous aurons à utiliser des résultats bien connus sur les schémas abéliens. Leur preuve est éparse dans la littérature et nous n'avons pas toujours pu trouver des références où figurent les assertions voulues: certaines de nos références n'énoncent qu'un cas particulier (corps de base, parfois algébriquement clos), mais avec une preuve valable dans le cas général.

1.1 Soit $f: A \to S$ un schéma abélien sur S. Nous supposons l'existence du schéma de Picard $\mathrm{Pic}_S(A)$ classifiant les faisceaux inversibles trivialisés le long

de la section nulle. L'existence de $\mathrm{Pic}_S(A)$ est connue pour A projectif sur S [5]. Noter que A est projectif sur S si S est artinien local de caractéristique résiduelle finie [12]. Travailler avec des espaces algébriques permettrait de se débarasser de l'hypothèse de projectivité ([1], §7).

Si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur A et u un morphisme de but A, nous écrirons $\mathscr{L}(u)$ pour $u^*\mathscr{L}$. Notons x, y (resp. x, y, z) les projections de $A \times_S A$ (resp. $A \times_S A \times_S A$) sur A et posons

$$\mathrm{car}(\mathscr{L}) := \mathscr{L}(x+y)\mathscr{L}(x)^{-1}\mathscr{L}(y)^{-1}\mathscr{L}(e) \text{ (sur } A \times_S A). \tag{1.1.1}$$

$$\mathrm{cub}(\mathscr{L}) := \mathscr{L}(x+y+z)\mathscr{L}(x+y)^{-1}\mathscr{L}(x+z)^{-1}\mathscr{L}(x+y)^{-1} \otimes \mathscr{L}(x)\mathscr{L}(y)\mathscr{L}(z)\mathscr{L}(e)^{-1} \text{ (sur } A \times_S A \times_S A). \tag{1.2.1}$$

A x fixé, le faisceau inversible $\mathrm{car}(\mathscr{L})$ sur A est trivialisé le long de la section neutre: la donnée de $\mathrm{car}(\mathscr{L})$ équivaut à celle d'un morphisme

$$\varphi_{\mathscr{L}}\colon A \to \mathrm{Pic}_S(A). \tag{1.1.3}$$

Ce morphisme envoie section neutre sur section neutre. C'est donc un homomorphisme ([10]6.4). Que (1.1.3) soit un homomorphisme équivaut au théorème du cube, i.e. à la trivialité de $\mathrm{cub}(\mathscr{L})$. Que $\mathrm{cub}(\mathscr{L})$ soit trivial a aussi l'interprétation suivante: les valeurs prises par $\varphi_{\mathscr{L}}$, dans $\mathrm{Pic}_S(A)$, correspondent à des faisceaux inversibles $\mathscr{M}$ tels que $\mathrm{car}\,\mathscr{M}$ soit trivial, ou, ce qui revient au même, que $\varphi_{\mathscr{M}}$ soit trivial.

Soit $A^* \subset \mathrm{Pic}_S(A)$ classifiant les faisceaux inversibles $\mathscr{L}$ trivialisés le long de la section neutre pour lesquels $\mathrm{car}(\mathscr{L})$ (ou $\varphi_{\mathscr{L}}$) est trivial. L'argument ([10]6.7), montre que A^* est lisse sur S. Par rigidité ([10]6.1), A^* est ouvert et fermé dans $\mathrm{Pic}_S(A)$.

Si $\mathscr{L}$ est ample, $\varphi_{\mathscr{L}}$ envoie A sur A^*. Il suffit de le vérifier pour S spectre d'un corps algébriquement clos, auquel cas c'est [9] §8, Th. 1. Il en résulte que A^* est un schéma abélien sur S. Par définition, on a une suite exacte de faisceaux *fpqc*

$$0 \to A^* \to \mathrm{Pic}_S(A) \to \underline{\mathrm{Hom}}_S(A, A^*). \tag{1.1.4}$$

Le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}$ est représentable par un espace algébrique propre sur S et même, étant non ramifié, par un schéma.

Le faisceau inversible universel sur $A \times_S \mathrm{Pic}_S(A)$, restreint à $A \times_S A^*$, est le faisceau inversible de Poincaré. Il définit un morphisme de A dans A^{**}. Ce morphisme est un isomorphisme. Il suffit de le vérifier pour S spectre d'un corps algébriquement clos, auquel cas c'est [9], §13 corollaire p. 132.

Il résulte des définitions que pour $\mathscr{L}$ inversible sur A, l'homomorphisme $\varphi_{\mathscr{L}}$ de A dans A^* est symétrique, i.e. coïncide avec son transposé ${}^t\lambda: A = A^{**} \to A^*$. Réciproquement, on a

PROPOSITION 1.2. *Localement pour la topologie fppf, tout morphisme symétrique de A dans A^* provient d'un faisceau inversible sur A.*

Preuve: La fibre en (x, y) du faisceau inversible de Poincaré $\mathscr{P}$ dépend bimultiplicativement de (x, y). Il résulte alors des définitions que pour tout morphisme $\lambda: A \to A^*$, l'image inverse de $\mathscr{P}$ par $(1, \lambda)\ A \to A \times A^*$ vérifie

$$\varphi_{(1,\lambda)^*\mathscr{P}} = \lambda + {}^t\lambda.$$

En particulier, pour λ symétrique, $\mathscr{M} := (1, \lambda)^*\mathscr{P}$ vérifie $\varphi_{\mathscr{M}} = 2\lambda$. Puisque $\mathrm{Hom}_S(A, A^*)$ est sans torsion, il suffit de montrer que, localement pour la topologie *fppf*, $\mathscr{M}$ est de la forme $\mathscr{L}^{\otimes 2}$. Un schéma en groupes K commutatif fini localement libre de rang N est annulé par N ([13], p. 3). La démonstration de [8] 2.3(i) montre alors qu'une extension de K par $\mathbb{G}_m$ est localement triviale, pour la topologie *fppf*. Si on applique ceci à A_n on peut répéter la démonstration de [9] §23, Th. 3, p. 231 pour conclure que si $\varphi_{\mathscr{L}}$ est nul sur A_n, $\mathscr{L}$ est localement *fppf* de la forme $\mathscr{L}_1^{\otimes n}$. Il reste à faire $n = 2$.

1.3 Le foncteur des homomorphismes symétriques de A dans A^* est représentable par $\underline{\mathrm{Hom}}_S(A, A^*)^{\mathrm{sym}}$, non ramifié sur S, et 1.2 montre, par descente *fppf*, que

$$\mathscr{L} \mapsto \varphi_{\mathscr{L}}: \mathrm{Pic}_S(A) \to \underline{\mathrm{Hom}}_S(A, A^*)^{\mathrm{sym}}$$

est une morphisme lisse. Ceci permet de remplacer dans 1.2 la topologie *fppf* par la topologie étale, et de préciser 1.1.4 par une suite exacte de faisceaux pour la topologie étale

$$0 \to A^* \to \mathrm{Pic}_S(A) \to \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{sym}}(A, A^*) \to 0. \tag{1.3.1}$$

On peut en déduire:

PROPOSITION 1.4. *Soit φ un morphisme symétrique de A dans A^*. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) *Après tout changement de base* $\mathrm{Spec}(k) \to S$ *à un corps algébriquement clos, φ est de la forme $\varphi_{\mathscr{L}}$ avec $\mathscr{L}$ ample sur A.*

(ii) *Localement pour la topologie étale, φ est de la forme $\varphi_{\mathscr{L}}$ avec $\mathscr{L}$ relativement ample sur A.*

(iii) *Le faisceau inversible* $(1, \varphi)^*\mathscr{P}$ *est relativement ample sur A.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que φ est *positif*, ou que φ est une *polarisation* de A. La conditon (i) est la définition choisie dans [10] 6.3, p. 120.

Nous aurons besoin de (ii) pour vérifier que certaines formes bilinéaires antisymétriques attachées à φ sont alternées.

1.5 Dans chacune des théories de cohomologie usuelles, on dispose des deux méthodes suivantes pour attacher une "forme de Riemann" à un morphisme symétrique φ de A dans A^*.

(A) Un faisceau inversible $\mathscr{M}$ a une classe de Chern $c_1(\mathscr{M})$ dans $H^2(A)$. Ce groupe est $\overset{2}{\wedge}H^1(A)$, $H^1(A)$ est le dual de $H_1(A)$ et $h \in H^2(A)$ s'identifie à une forme alternée sur $H_1(A)$: la forme $\langle x \wedge y, h\rangle$.

Appliquant ceci à $\mathscr{P}$ sur $A \times A^*$ et utilisant que $H_1(A \times A^*) = H_1(A) \oplus H_1(A^*)$, on déduit de $\mathscr{P}$ une dualité entre $H_1(A)$ et $H_1(A^*)$. Noter qu'elle change de signe quand on permute les rôles de A et A^*. C'est une dualité parfaite. A $\varphi: A \to A^*$ on attache la forme suivante sur $H_1(A)$:

$$\psi_\varphi(x, y) := \langle x, \varphi(y)\rangle \tag{1.5.1}$$

(B) Localement pour la topologie étale, φ provient d'un faisceau inversible $\mathscr{L}$. On prend sur $H_1(A)$ la forme alternée définie par $c_1(\mathscr{L})$. Si $\mathscr{M}$ sur A est tel que car $\mathscr{M}$ soit trivial, on déduit formellement de c_1 car $\mathscr{M} = 0$ que $c_1\mathscr{M} = 0$. La forme alternée définie par $c_1(\mathscr{L})$ ne dépend donc que de φ.

Que ces deux définitions soient équivalentes résulte formellement, en prenant les classes de Chern, de ce que car$(\mathscr{L})$ est l'image inverse de $\mathscr{P}$ par $(1, \varphi): A \times A \to A \times A^*$. L'interprétation (B) montre que la forme (1.5.1) est alternée.

1.6 Les cas qui nous intéressent sont ceux de la cohomologie de de Rham et de la cohomologie cristalline. Pour A un schéma abélien sur S, le premier faisceau de cohomologie de de Rham $H^1_{DR}(A/S)$ est $R^1f_*\Omega^*_{A/S}$. C'est une extension de faisceaux localement libres sur S:

$$0 \to f_*\Omega^1_{A/S} \to H^1_{DR}(A/S) \to R^1f_*\mathscr{O} \to 0.$$

En noyau, le dual de Lie(A). En quotient, Lie $\mathrm{Pic}_S(A^*)$, l'algèbre de Lie de la variété abélienne duale A^*. Le dual $H_1^{DR}(A/S)$ est une extension

$$0 \to \mathrm{Lie}(A^*)^\vee \to H_1^{DR}(A/S) \to \mathrm{Lie}(A) \to 0. \tag{1.6.1}$$

D'après [2] 5.1, la dualité entre $H_1^{DR}(A/S)$ et $H_1^{DR}(A^*/S)$ définie par le faisceau inversible de Poincaré (1.5) est une dualité parfaite, pour laquelle Lie$(A^*)^\vee$ et Lie $(A)^\vee$ sont l'orthogonal l'un de l'autre.

Soient A_0 un schéma abélien sur S_0 et supposons que S_0 soit défini dans S par un idéal nilpotent muni de puissances divisées. La cohomologie cristalline $H^1_{\mathrm{cr}}(A_0/S)$ est un module localement libre sur S. Soit $H_1^{\mathrm{cr}}(A_0/S)$ son dual. Sa

restriction à S_0 est $H_1^{DR}(A_0/S_0)$. Du résultat analogue en cohomologie de de Rham, on déduit que $c_1(\mathscr{P})$ définit une dualité parfaite entre $H_1^{cr}(A_0/S)$ et $H_1^{cr}(A_0^*/S)$ ([2] 5.1.8). Un morphisme symétrique $\varphi: A_0 \to A_0^*$ définit par 1.5 une forme alternée sur $H_1^{cr}(A_0/S)$.

2. Le problème de modules

2.1 Soient K, R, g et n comme dans l'introduction et L un R-module inversible muni d'une notion de positivité: pour chaque plongement réel σ de F, une orientation de la droite $L \otimes_{R,\sigma} \mathbb{R}$.

Sur un schéma de base S, considérons les objets du type suivant

(2.1.1) Un schéma abélien A sur S, de dimension relative g.

(2.1.2) Une structure de R-module sur $A: R \to \mathrm{End}(A)$.

(2.1.3) Un R-homomorphisme $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ de L dans les homomorphismes R-linéaires symétriques de A dans A^*. On exige que les éléments totalement positifs de L aient une image positive, et que le morphisme

$$A \otimes_R L \to A^* \tag{2.1.3.1}$$

soit un isomorphisme (cf. 2.6).

(2.1.4) Un isomorphisme R-linéaire du schéma constant $(R/nR)^2$ sur S avec celui, A_n, des points de n-division.

Un objet (2.1.1)–(2.1.4) n'a pas d'automorphisme non trivial. Si G est le foncteur qui à chaque S attache l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets (2.1.1)–(2.1.4), des arguments connus montrent que G est représentable par un espace algébrique $\mathscr{M}_n^L$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$. Pour $\lambda > 0$ dans L, une application de critère valuatif de propreté montre que (A, φ_λ) définit un morphisme propre de $\mathscr{M}_n^L$ dans un espace de modules de schémas abéliens polarisés, au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$.

Le schéma $\mathscr{M}_n$ de l'introduction est l'une des composantes connexes de $\mathscr{M}_n^L$, pour L la différente inverse D^{-1} de R sur $\mathbb{Z}$. Voir 2.15.

THÉORÈME 2.2. *Soit Δ le discriminant de R sur $\mathbb{Z}$. Le schéma $\mathscr{M}_n^L$ est lisse au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n\Delta])$, *plat d'intersection complète relative au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ *et, pour p premier à n divisant Δ, le lieu de non lissité de $\mathscr{M}_n^L$ en caractéristique p est de codimension* 2 *dans la fibre de caractéristique p.*

La preuve sera donnée en 4.5.

COROLLAIRE 2.3. *Les fibres de $\mathscr{M}_n^L \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ sont normales.*

Elles sont en effet d'intersection complète, donc de Cohen Macaulay, et lisse en codimension 0 et 1. Appliquer le critère de Serre EGA IV 5.8.6.

2.4 Les constructions de Rapoport [14] fournissent une compactification $\bar{\mathcal{M}}_n^L$ de $\mathcal{M}_n^L$, lisse à l'infini si on veut, dans laquelle $\mathcal{M}_n^L$ est dense fibre à fibre. Cette compactification vérifie encore 2.2, 2.3. Le morphisme $\bar{\mathcal{M}}_n^L \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ a donc une factorisation de Stein par T fini étale sur $\mathbb{Z}[1/n]$, et les fibres géométriques de $\mathcal{M}_n^L \to T$ sont irréductibles.

2.5 Nous appellerons un objet (2.1.1) à (2.1.3) un *schéma abélien à multiplication réelle par* R et L-polarisé. Une structure (2.1.4) est *une structure de niveau* n. Ces structures ne joueront qu'un rôle de figurant. Elles servent à éliminer les automorphismes et on eut pu les remplacer par la considération de champs algébriques. Puisque $\mathcal{M}_{nm}^L$ est fini étale sur $\mathcal{M}_n^L[1/m]$, elles sont sans influence sur la nature des singularités.

2.6 Le produit tensoriel dans (2.1.3.1) peut être défini comme un produit tensoriel de faisceaux sur le gros site étale. Voici une description plus concrète: pour $\lambda \neq 0$ dans L, et a l'idéal de R tel que $\lambda: R \hookrightarrow L$ identifie L à l'idéal fractionnaire a^{-1}, $A \otimes_R L$ s'identifie au quotient de A par le sous-schéma en groupes des points de a-division. La condition (2.1.3.1) revient donc à ce que pour $\lambda \neq 0$ dans L, $\varphi(\lambda)$ soient une isogénie de noyau le sous-schéma en groupes des points de a-divisions, pour a l'annulateur de $L/R\lambda$.

Pour $L = R$, la donnée (2.1.3) se réduit à celle d'une polarisation principale R-linéaire.

PROPOSITION 2.7. *Soient S le spectre d'un corps k et A un schéma abélien à multiplication réelle par R sur k, L-polarisé. Dans le groupe de Grothendieck des $k \otimes R$-modules de type fini, Lie (A) a même classe que le $k \otimes R$-module libre de rang* 1.

Preuve: La k-algèbra $k \otimes R$ est de dimension finie sur k, donc est un produit fini de k-algèbres artiniennes locales $R_i (i \in I)$. Soit k_i le corps résiduel de R_i. Un $k \otimes R$-module M est un produit de R_i-modules M_i et le groupe de Grothendieck $K(k \otimes R)$ est $\mathbb{Z}^I$, *avec* $M \mapsto (lg_{R_i}(M_i))_{i \in I}$. On $lg_{R_i}(M_i) = \dim_k(M_i)/[k_i : k]$. Sur cette description, on vérifie que les foncteurs exacts "passage au k-dual" et "tensorisaton sur R avec un R-module inversible" agissent trivialement sur $K(k \otimes R)$.

Pour k' une extension de k, on a $K(k \otimes R) \hookrightarrow K(k' \otimes R)$. Il suffit donc de traiter du cas où k est parfait. La polarisation fournit un isomorphisme de suites exactes (1.6.1) de R-modules

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathrm{Lie}(A^*)^* \otimes L & \to & H_1^{DR}(A) \otimes L & \to & \mathrm{Lie}(A) \otimes L & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & \mathrm{Lie}(A)^* & \to & H_1^{DR}(A^*) & \to & \mathrm{Lie}(A^*) & \to 0
\end{array}$$

de sorte que dans le groupe de Grothendieck

$$[H_1^{DR}(A)] = [\mathrm{Lie}(A)] + [\mathrm{Lie}(A^*)] = 2[\mathrm{Lie}(A)]$$

On conclut par [14] lemme 1.3, d'après lequel $H_1^{DR}(A)$ est un $k \otimes R$-module libre de rang 2.

REMARQUE 2.8. Pour A muni de $R \to \mathrm{End}(A)$, montrons que $H_1^{DR}(A)$ est, localement sur S, libre sur $\mathcal{O}_S \otimes R$. Puisque H_1^{DR} est localement libre sur $\mathcal{O}_S$, il suffit de le vérifier après extension des scalaires à un corpos résiduel, i.e., pour S spectre d'un corps k. Pour vérifier que H_1^{DR} est libre sur $k \otimes R$, il suffit alors de vérifier qu'il est projectif de type fini et de même classe dans $K(k \otimes R)$ qu'un $k \otimes R$-module libre. Ces deux assertions se vérifient après extension des scalaries et, pour k parfait, résultent de [14] Lemme 1.3.

COROLLAIRE 2.9. *Soit A un schéma abélien sur S à multiplication réelle par R, L-polarisé. Supposons que le discriminant de R sur $\mathbb{Z}$ soit inversible sur S. Alors, localement sur S,* $\mathrm{Lie}(A)$ *est un $\mathcal{O}_S \otimes R$-module libre de rang* 1.

Preuve. Il suffit de le vérifier pour S spectre d'un corps k. Par hypothèse, $k \otimes R$ est semi-simple de sorte que 2.9 résulte de 2.7.

2.10 D'après 2.9, tant que le discriminant Δ est inversible sur S, nos schémas abéliens à multiplication réelle par R et L-polarisé coïncident avec les schémas abéliens à multiplication réelle X par R de [14], munis d'un isomorphisme positif $\mathscr{P}(X) \xrightarrow{\sim} L$. Appliquant [14] 1.20, on voit que $\mathscr{M}_n^L$ est lisse au-dessus de Spec $(\mathbb{Z}[1/n\Delta])$.

2.11 La différente inverse D^{-1} de R est le plus grand sous R-module X de F tel que $Tr_{F/\mathbb{Q}}(X) \subset \mathbb{Z}$. Par $x \mapsto Tr_{F/\mathbb{Q}}(\lambda x)$, elle s'identifie au $\mathbb{Z}$-dual $R^\vee$ de R. Pour B un anneau commutatif et M un $B \otimes R$-module, le B-dual $M^\vee$ et le $(B \otimes R)$-dual M' sont liés par

$$\begin{aligned} M^\vee &= \mathrm{Hom}_B(M, B) = \mathrm{Hom}_{B \otimes R}(M, \mathrm{Hom}(R, B)) \\ &= \mathrm{Hom}_{B \otimes R}(M, B \otimes R^\vee) = M' \otimes_R R^\vee. \end{aligned}$$

Pour M et N deux $B \otimes R$-modules,

$$\mathrm{Hom}_{B \otimes R}(M, N^\vee) = \mathrm{Hom}_B(M \otimes_{B \otimes R} N, B)$$

s'identifie donc à $\mathrm{Hom}_{B \otimes R}(M \otimes_{B \otimes R} N, B \otimes R) \otimes_R R^\vee$. A une forme bilinéaire Φ vérifient $\Phi(rm, n) = \Phi(m, rn)$ correspond la forme $B \otimes R$-bilinéaire Φ_1, à valeurs dans D^{-1}, avec

$$Tr\,\Phi_1 = \Phi.$$

2.12 Soit A un schéma abélien sur S à multiplication réelle par R et L-polarisé. Appliquant 2.11 aux formes bilinéaires Ψ_λ sur $H_1^{DR}(A/S)$ définies (1.5, 1.6) par les $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in L$, on obtient sur le $\mathcal{O}_S \otimes R$-module H_1^{DR} une forme alternée $\mathcal{O}_S \otimes R$-bilinéaire Ψ à valeurs dans $\mathcal{O}_S \otimes L^{-1}D^{-1}$, avec

$$\psi_\lambda = Tr(\lambda\Psi)$$

On l'appelle la *forme de L-polarisation* de $H_1^{DR}(A)$. L'hypothèse (2.1.3.1) assure qu'elle est non dégénérée. Par 1.6, le sous-$\mathcal{O} \otimes R$-module $\mathrm{Lie}(A^*)^\vee$ de $H_1^{DR}(A/S)$ est son propre Ψ-orthogonal. Localement sur S, il existe $\lambda \in L$ tel que $|L/R\lambda|$ soit inversible sur S. Pour un tel λ, il revient au même de dire que $\mathrm{Lie}(A^*)^\vee$ est son propre Ψ_λ-orthogonal. Parce que $H_1^{DR}(A/S)$ est localement libre de rang 2 sur $\mathcal{O} \otimes R$, deux formes alternées non dégénérées diffèrent localement par un facteur inversible, et il revient encore au même de dire que $\mathrm{Lie}(A^*)^\vee$ est son propre orthogonal pour la forme alternée $x \wedge y$ à valeurs dans $\wedge^2_{\mathcal{O}\otimes R} H_1^{DR}$.

On définit de même une forme de L-polarisation en cohomologie cristalline.

Sur le schéma en groupes A_n des points de division par n, les formes alternées définies par les φ_λ, à valeurs dans μ_n, fournissent de même une forme alternée $R/n\,R$-bilinéaire non dégénérée à valeurs dans $L^{-1}D^{-1} \otimes \mu_n$. On l'appelle aussi forme de L-polarisation.

2.13 Une structure de niveau n

$$(R/nR)^2 \xrightarrow{\sim} A_n$$

composée avec la forme de L-polarisation, définit un isomorphisme

$$R/nR = \overset{2}{\wedge}(R/nR)^2 \xrightarrow{\sim} L^{-1}D^{-1} \otimes \mu_n, \tag{2.13.1}$$

i.e., prenant l'image de 1, une section sur S du faisceau $L^{-1}D^{-1} \otimes \mu_n$, qui en soit un $R/n\,R$-générateur. Pour obtenir le $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$-schéma $\mathcal{M}$ de l'introduction, il faut prendre $L = D^{-1}$. On a alors

$$L^{-1}D^{-1} \otimes \mu_n = R \otimes \mu_n \supset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mu_n = \mu_n$$

et $\mathcal{M}$ est le sous-schéma ouvert et fermé de $\mathcal{M}_n^{D^{-1}}$ classifiant les variétés abéliennes à multiplication réelle par R, L-polarisées, munies d'une structure de niveau n dont l'invariant (2.13.1) est la racine primitive n^{ieme} de l'unité ζ_n.

3. Un modèle local

3.1 Soient K, R, n, L et $\mathcal{M}_n^L$ comme en 2.1.4. Ecrivons simplement $\mathcal{M}$ pour $\mathcal{M}_n^L$ et soit A le schéma abélien universel sur $\mathcal{M}$. Soit x un point fermé de $\mathcal{M}$. Son

corps résiduel k est fini. Soit p sa caractéristique. D'après 2.8, dans un voisinage de x, $H_1^{DR} := H_1^{DR}(A/\mathcal{M})$ est un $\mathcal{O} \otimes R$-module libre de rang 2.

Soit X le premier voisinage infinitésimal de x, en caractéristique p. Si m est l'idéal définissant x, X est le sous-schéma de $\mathcal{M}$ défini par l'idéal $m^2 + (p)$. La connexion de Gauss-Manin constantifie la restriction à X du fibré H_1^{DR}: parce que k est parfait, X est un k-schéma et, sur X, H_1^{DR} s'identifie canoniquement au fibré constant image inverse de la fibre en x de H_1^{DR}.

Dans un voisinage assez petit U de x, H_1^{DR} admet une base e_1, e_2 sur $\mathcal{O} \otimes R$ qui, sur X, soit constante. Soient $e = (e_1, e_2): (\mathcal{O} \otimes R)^2 \xrightarrow{\sim} H_1^{DR}$ et $F := e^{-1}(\mathrm{Lie}(A^*)^\vee)$. D'après 2.12, F est un $\mathcal{O} \otimes R$-sous-module de $(\mathcal{O} \otimes R)^2$, localement facteur direct en tant que $\mathcal{O}$-sous-module, et F est son propre orthogonal pour la forme alternée standard $x \wedge y$ sur $(\mathcal{O} \otimes R)^2$. Il existe N premier à p tel que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[1/N]$ soit libre de rang un sur $R[1/N]$. Si en est une base, sur $U[1/N]$, la forme alternée $t(x \wedge y)$ sur $(\mathcal{O} \otimes R)^2$, *à* valeurs dans $\mathcal{O}$, est non dégénérée et F est lagrangien pour $t(x \wedge y)$.

3.2 Soit G le foncteur qui à chaque schéma S associe l'ensemble des – $\mathcal{O} \otimes R$ – sous modules de $(\mathcal{O} \otimes R)^2$ qui soient localement facteur direct comme $\mathcal{O}$-module et leur propre orthogonal pour la forme alternée standard. Ce foncteur est représentable par un sous-schéma fermé $\mathcal{N}$ de la grassmannienne.

La construction 3.1 fournit, au voisinage de x, un morphisme

$$U \to \mathcal{N} \tag{3.2.1}$$

de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

THÉORÈME 3.3. *Le morphisme* 3.2.1 *est étale en* x.

Preuve. Soient x_0 l'image de x dans $\mathcal{N}$, $N_{x_0}^\wedge$ le complété de $\mathcal{N}$ en x_0 et $\mathcal{N}_x^\wedge$ le revêtement fini étale de $\mathcal{N}_{x_0}^\wedge$ de fibre spéciale x: $\mathcal{N}_x^\wedge$ est déduit de $\mathcal{N}_{x_0}^\wedge$ par "extension du corps résiduel" de $k(x_0)$ à $k = k(x)$. Soit $\mathcal{M}_x^\wedge$ le complété formel de $\mathcal{M}$ en x. Le morphisme induit par (3.2.1) de $\mathcal{M}_x^\wedge$ dans $\mathcal{N}$ se factorise par $\mathcal{N}_x^\wedge$, et 3.3 équivaut à ce que

$$\mathcal{M}_x^\vee \to \mathcal{N}_x^\vee \tag{3.3.1}$$

soit un isomorphisme.

Dans (3.3.1), $\mathcal{M}_x^\vee$ est l'espace formel de modules du schéma abélien à multiplication réelle par R L-polarisé A_0 sur k, fibre de A en x. Si F_0 est la fibré de F en x, $\mathcal{N}_x^\vee$ est l'espace formel de modules des déformations de F_0 comme $\mathcal{O} \otimes R$-sous module de $(\mathcal{O} \otimes R)^2$ égal à son orthogonal. Dans ces problèmes de modules formels, on ne considère que des déformations sur des spectres $\mathrm{Spec}(B)$, pour B local artinien de corps résiduel k; B est automatiquement une algèbre sur l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt. Il n'était pas nécessaire de

mentionner la structure de niveau n qui apparaît dans la définition de $\mathscr{M}$, car celle de A_0 se prolonge uniquement à une déformation. La structure de R-module et la L-polarisation de A_0 se prolongent d'au plus une façon à une déformation du schéma abélien A_0 et $\mathscr{M}_x^\vee$ est donc l'espace formel de modules pour les déformations de A_0 auxquelles s'étendent la structure de R-module et la polarisation.

3.4 Le théorème 3.3 est une application de la théorie cristalline [7] V. 1.10, des déformations des schémas abéliens. Rappelons cette théorie. Soit B artinien local de corps résiduel k, $I \subset B$ un idéal de carré nul et $B_0 = B/I$. On pourrait plus généralement prendre pour I un idéal muni de puissances divisées nilpotentes. Le cas où $I^2 = 0$ et où I est muni des puissances divisées nulles nous suffira. Un schéma abélien X_0 sur B_0 définit un groupe d'homologie cristalline $H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/B)$ qui est un B-module libre. Si X est une déformation de X_0 sur B, on a un isomorphisme canonique

$$H_1^{DR}(X/B) \xrightarrow{\sim} H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/B).$$

La construction est fonctorielle en B, et $H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/B) \otimes_B B_0 = H_1^{DR}(X_0/B_0)$.

Dans le cas particulier où $B_0 = k$ et où B est la k-algèbre $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ des nombres duaux, on peut prendre comme déformation la déformation triviale: extension des scalaires à $k[\varepsilon]$, et

$$H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/k[\varepsilon]) = H_1^{DR}(X_0) \otimes_k k[\varepsilon].$$

Pour toute déformation X, on a alors $H_1^{DR}(X/k[\varepsilon]) = H_1^{DR}(X_0) \otimes_k k[\varepsilon]$. Cette "constantification" est donnée par la connexion de Gauss-Manin.

Si X/B est une déformation de X_0/B_0, le sous-espace $F^0H_1^{DR}(X/B) := \mathrm{Lie}(X^*)^\vee$ de $H_1^{DR}(X/B) = H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/B)$ est une déformation du sous-espace $F^0H_1^{DR}(X_0/B_0)$ de $H_1^{DR}(X_0/B_0) = H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/B) \otimes_B B_0$.

Cette application des déformations de X_0 vers les déformations de $F^0H_1^{DR}(X_0)$ est bijective. De plus, si X et Y sont des déformations de schémas abéliens X_0 et Y_0, un morphisme $f_0: X_0 \to Y_0$ induit $f_0^{\mathrm{cr}}: H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/B) \to H_1^{\mathrm{cr}}(Y_0/B)$ et f_0 se déforme en $f: X \to Y$ si et seulement si

$$f_0^{\mathrm{cr}}(F^0H_1^{DR}(X/B)) \subset F^0H_1^{DR}(Y/B).$$

En particulier

(3.4.1) Supposons X_0 muni d'une structure de R-module et soit X la déformation de X_0 correspondant à $F \subset H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/B)$. Pour que la structure de R-module de X_0 se déforme à X, il faut et il suffit que F soit R-stable, i.e., un $B \otimes R$-sous-module de $H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/B)$.

(3.4.2) Pour qu'un morphisme symétrique $\varphi_0: X_0 \to X_0^*$ se déforme à X, il faut et il suffit que F soit Ψ_{φ_0}-isotrope.

(3.4.3) Si X_0 est à multiplication réelle par R et L-polarisé, pour que les multiplications réelles et L-polarisation se déforment à X, il faut et il suffit que F soit un $B \otimes R$-sous-module de $H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/B)$ isotrope (et donc égal à son orthogonal pour la forme de L-polarisation Ψ sur $H_1^{\mathrm{cr}}(X_0/B)$ (2.12).

Appliquons (3.4.3) à $B_0 = k$, $B = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. On trouve que les k-schémas réduction mod p de $\mathscr{M}_x^\wedge$ et $\mathscr{N}_z^\wedge$ ont mêmes points à valeur dans $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. En d'autres termes:

LEMME 3.5. *Le morphisme* (3.3.1) *induit un isomorphisme sur les espaces tangent de Zariski en x des réductions* mod p *de* $\mathscr{M}_x^\wedge$ *et* $\mathscr{N}_x^\wedge$.

Il résulte de 3.5 que le morphisme (3.3.1): $\mathscr{M}_x^\wedge \to \mathscr{N}_x^\wedge$ a pour fibre spéciale le schéma réduit $\{x\}$. Il identifie donc $\mathscr{M}_x^\wedge$ a un sous-schéma fermé de $\mathscr{N}_x^\wedge$. Soient C la $W(k)$-algèbre locale complète dont $\mathscr{N}_x^\wedge$ est le spectre, J l'idéal définissant le sous-schéma $\mathscr{M}_x^\wedge$, qui est donc le spectre de $B_0 := C/J$, m l'idéal maximal de C et $B := C/Jm$. Sur B_0, on dispose du schéma abélien à multiplication réelle par R et L-polarisé universel A_0, et $H_1^{DR}(A_0)$ est muni d'une $B_0 \otimes R$-base e_1, e_2 déduite de celle de 3.1.

L'idéal $\mathrm{I} = J/Jm$ de B est de carré nul. On peut donc appliquer à B_0 et B la théorie 3.4, ou plutôt sa variante formelle sur des anneaux locaux complets. Relevons e_1 et e_2 à $H_1^{\mathrm{cr}}(A_0/B)$ en $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$. Puisque ce H_1^{cr} est libre sur B, $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base de H_1^{cr}, sur $B \otimes R$. Le sous-espace universel de $(\mathscr{O} \otimes R)^2$ sur $\mathscr{N}$ induit sur $\mathrm{Spec}(B)$ un sous-module $F \subset H_1^{\mathrm{cr}}(A_0/B)$ qui, par (3.4.3), correspond à une déformation A de A_0 sur B. Par la propriété universelle de $\mathrm{Spec}(B_0) = \mathscr{M}_x^\wedge$, A est l'image inverse de A_0 par une retraction $\varphi: \mathrm{Spec}(B) \to \mathscr{M}_x^\wedge = \mathrm{Spec}(B_0)$. Passant au langage des anneaux, on obtient $\varphi^*: B_0 \to B$ qui est une section de la projection de B sur B_0. On a donc

$$B = B_0 \oplus I, \text{ avec } I^2 = 0.$$

Par 3.5, $\mathrm{Spec}(B)$ et $\mathrm{Spec}(B_0)$ ont même espace tangent de Zariski à l'origine. On a donc $I = 0$, $J = Jm$ et $J = 0$. Ceci prouve 3.3.

4. Singularités

Soient S un schéma et $\mathscr{R}$ un faisceau localement libre de type fini de $\mathscr{O}_S$-algèbres commutatives. Pour $a: T \to S$ un S-schéma, soit $\mathscr{R}_T := a^*\mathscr{R}$ et soit $G(T)$ l'ensemble des sous-$\mathscr{R}_T$-modules de $\mathscr{R}_T^2$, localement facteur direct comme $\mathscr{O}_T$-sous-module et leur propre orthogonal pour la forme alternée $x \wedge y$ standard sur $\mathscr{R}_T^2$.

Le foncteur G est représentable par un sous-schéma fermé $\mathcal{N}(S, \mathcal{R})$ de la grassmannienne des quotients localement libres du $\mathcal{O}$-module $\mathcal{R}^2$. Fonctorialités:

(4.1.1) Pour T sur S, $\mathcal{N}(T, \mathcal{R}_T)$ est déduit de $\mathcal{N}(S, \mathcal{R})$ par changement de base.

(4.1.2) Pour $\mathcal{R}$ un produit fini de $\mathcal{O}_S$-algèbres $\mathcal{R}_i$, $\mathcal{N}(S, \mathcal{R})$ est le produit fibré sur S des $\mathcal{N}(S, \mathcal{R}_i)$.

Pour a: $T \to S$ fini étale sur S et $\mathcal{R}$ de la forme $a_* \mathcal{R}_1$, localisant (4.1.2) pour la topologie étale, on obtient

(4.1.3) $\mathcal{N}(S, a_* \mathcal{R}_1)$ est déduit de $\mathcal{N}(T, \mathcal{R}_1)$ par restriction des scalaires à la Weil:

$$\mathcal{N}(S, a_* \mathcal{R}_1) = \prod_{T/S} \mathcal{N}(T, \mathcal{R}_1)$$

4.2 Prenons pour S le spectre d'un corps k et pour $\mathcal{R}$ la k-algèbre $k[T]/(T^N)$. Si F est un $\mathcal{R}$-sous-module de $\mathcal{R}^2$, il existe une base (e_1, e_2) de $\mathcal{R}^2$ et des entiers i et j $(0 \leqslant i \leqslant j \leqslant N)$ tels que F soit engendré par $T^i e_1$ et $T^j e_2$: appliquer le théorème de structure des modules sur un anneau de valuation discrète au $k[[T]]$-module $\mathcal{R}^2/F$. L'orthogonal de F est engendré par $T^{N-j} e_1$, $T^{N-1} e_2$ et, pour que F soit son propre orthogonal, il faut et il suffit que $i + j = N$.

Cette construction est compatible au changement de corps de base et fournit une stratification de $\mathcal{N}(S, \mathcal{R})$ selon la valeur de $i (0 \leqslant i \leqslant N/2)$. Soit G_i le sous-foncteur de G classifiant les F tels que $T^i \mathcal{R}_T^2 \supset F \supset T^{N-i} \mathcal{R}_T^2$. Il est représenté par un sous-schéma fermé $\mathcal{N}_i(S, \mathcal{R})$ et

$$\mathcal{N}_i(S, \mathcal{R}) \cong \mathcal{N}(S, k[T]/(T^{N-2i})).$$

Le complément $\mathcal{N}_i^0$ de $\mathcal{N}_{i+1}(S, \mathcal{R})$ dans $\mathcal{N}_i(S, \mathcal{R})$ classifie les F tels que $T^i \mathcal{R}^2 \supset F \supset T^{N-i} \mathcal{R}^2$ et que F soit localement facteur direct de $T^i \mathcal{R}^2 / T^{N-i} \mathcal{R}^2$, en tant que $\mathcal{R}/(T^{N-2i})$-module.

On a

$$\mathcal{N}_i^0 \simeq \prod_{\operatorname{Spec} k[T]/(T^{N-2i})/\operatorname{Spec}(k)} \mathbb{P}^1. \tag{4.2.4}$$

C'est un schéma lisse de dimension $N - 2i$.

4.3 Soit S quelconque et $\mathcal{R}$ de la forme $k[T]/(P)$ pour P un polynôme monique de degré N: $P = T^N + \Sigma_{i=0}^{N-1} p_i T_i$. Soit $s \in S$ et supposons que les p_i s'annulent en s. Après extension des scalaires à $k(s)$, $\mathcal{R}$ devient $\mathcal{R}_s$, de la forme 4.2.

Fixons une base e_1, e_2 de $\mathcal{R}^2$ et soit x le point de la fibre de $\mathcal{N}(S, \mathcal{R})$ en s

qui correspond au sous-module de $\mathscr{R}^2$ engendré par $T^i e_1$, et $T^j e_2$ avec $i + j = N$. Nous allons donner une carte locale pour $\mathscr{N}(S, \mathscr{R})$ au voisinage de x.

La carte contient les F qui sont graphes d'une application $\mathcal{O}$-linéaire f de A dans B, pour A et B les sous-modules correspondant à la partition suivante de la $\mathcal{O}$-base de $\mathscr{R}^2$ formée des $T^p e_1$ et $T^q e_2$ $(0 \leqslant p, q < N)$

$$A: p \geqslant i, q \geqslant j \quad B: p < i, q < j.$$

Soit F dans la carte, graphe de f, et posons

$$f(T^i e_1) = ae_1 + ce_2 \quad f(T^j e_2) = be_1 + de_2 \tag{4.3.1}$$

$$a = \sum_0^{i-1} a_k T^k,\ b = \sum_0^{i-1} b_k T^k,\ c = \sum_0^{j-1} c_k T^k,\ d = \sum_0^{j-1} d_k T^k. \tag{4.3.2}$$

Etant un $\mathscr{R}$-module, F contient les éléments

$$T^l(T^i e_1 + ae_1 + ce_2) \quad (0 \leqslant l < N - i) \text{ et} \tag{4.3.3}$$
$$T^l(T^j e_2 + be_1 + de_2) \quad (0 \leqslant l < N - j).$$

Ces éléments se projettent sur une base de A, triangulaire par rapport à la base donnée. Ils engendrent donc F. Le sous-module F étant isotrope, on a

$$(T^i e_1 + ae_1 + ce_2) \wedge (T^j e_2 + be_1 + ce_2) = 0. \tag{4.3.4}$$

Réciproquement, si a, b, c, d sont comme en (4.3.2) et vérifient (4.3.4) le sous-$\mathcal{O}$-module de $\mathscr{R}^2$ engendré par les éléments (4.3.3) est graphe de $f: A \to B$ et est isotrope. Etant de dimension moitié, il est son propre orthogonal, et donc un sous-$\mathscr{R}$-module. La carte considérée est donc définie par N équations dans l'espace affine de dimension $2N$, de coordonnées les a_k, b_k, c_k et d_k. Les équations sont les composantes de (4.3.4) dans une base de $\mathscr{R}$.

Par 4.2, la carte ainsi construite a en s une fibre de dimension N. Elle est donc plate d'intersection complète relative au-dessus de S. Pour $0 \leqslant i \leqslant N$, les cartes considérées recouvrent toutes les strates de la fibre spéciale, ainsi qu'on le vérifie sur (4.2.4). Le morphisme $\mathscr{N}(S, \mathscr{R}) \to S$ étant propre, on conclut par 4.2 et 4.3:

4.4. PROPOSITION. *Sous les hypothèses de* 4.3, *le morphisme structural* $\mathscr{N}(S, \mathscr{R}) \to S$ *est plat d'intersection complète relative au-dessus d'un voisinage des* s. *La fibre en* s *est lisse en dehors d'un fermé de codimension* 2.

4.5. *Preuve de* 2.2. D'après 3.3, $\mathscr{M}_n^L$ est localement (pour la topologie étale) isomorphe à $\mathscr{N}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), R)$ de sorte qu'il suffit de prouver les assertions de

2.2 pour $\mathcal{N}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), R)$. Le schéma $\mathrm{Spec}(R)$ est fini étale au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/\Delta]) \subset 8 \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et la lissité de $\mathcal{N}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), \mathcal{R})$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/\Delta])$ résulte de (4.1.3). Les autres assertions se vérifient après changement de base de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}_p$. Le complété en p $R_p = R \otimes \mathbb{Z}_p$ de R est un produit d'anneaux de valuation discrète R^i. Appliquant (4.1.1), on est ramené à vérifier les assertions de 2.2 pour chacun des $\mathcal{N}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p), R^i)$. Soit k le corps résiduel de R^i. L'anneau es vecteurs de Witt $W(k)$ est fini étale sur $\mathbb{Z}_p$ et R^i est totalement ramifié sur $W(k)$, définissable par une équation d'Eisenstein:

$$R^i \simeq W(k)[T]/(P)$$

$$P = T^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i T^i,\ a_i \equiv 0(p),\ a_0 \not\equiv 0(p^2)$$

Il reste à appliquer (4.1.3), puis à appliquer 4.4 à $\mathcal{N}(\mathrm{Spec}(W(k)), R^i)$.

5. Autres problèmes de modules

Dans ce paragraphe, nous passons en revue divers problèmes de modules pour lesquels la méthode utilisée au numéro 3 fournit encore un modèle local.

5.1 Soient K, g, R et n comme dans l'introduction, et $d \geqslant 1$, $\delta \geqslant 1$. Soit $\mathcal{M}$ l'espace de modules des variétés abéliennes A de dimension dg, munies d'une structure de R-module, d'une polarisation $\varphi: A \to A^*$, R-linéaire de degré δ et d'une structure de niveau $n: (R/nR)^{2d} \xrightarrow{\sim} A_n$. On se place au-dessus de $\mathbb{Z}[1/n\delta]$, i.e., on exclut les caractéristiques divisant le niveau ou le degré de la polarisation.

Pour A sur un corps parfait k, l'homologie cristalline $H_1^{\mathrm{cr}}(A)$ est un $R \otimes W(k)$-module libre. Comme en [14] 1.3 (cf. 2.7, 2.8), cela résulte de ce que la trace dans $W(k)$ de la multiplication par $r \in R$ est dans $\mathbb{Z}$. Par réduction modulo p, il en résulte que $H_1^{DR}(A)$ est un $R \otimes k$-module libre. Comme en 2.8, on en déduit que pour A sur une base S, $H_1^{DR}(A)$ est un $R \otimes \mathcal{O}_S$-module localement libre.

La polarisation fournit sur $H_1^{DR}(A)$ une forme R-bilinéaire alternée non dégénérée, à valeurs dans $D^{-1} \otimes \mathcal{O}_S$, pour D^{-1} la différente inverse. "Non dégénérée" car δ est inversible sur S. Le sous-espace $F = \mathrm{Lie}(A^*)^\vee$ de $H_1^{DR}(A)$ est localement facteur direct comme $\mathcal{O}_S$-module, un R-sous-module et est lagrangien.

Munissons R^{2d} de la forme symplectique standard. Soit G le foncteur qui à S attache l'ensemble des sous-fibrés de $R^{2d} \otimes \mathcal{O}_S$ localement facteur direct (comme $\mathcal{O}_S$-modules), stables par R et lagrangiens. Ce foncteur est représentable

par un sous-espace fermé $\mathcal{N}$ de la grassmannienne. Les arguments du §3 donnent:

THÉORÈME 5.2. *Localement sur $\mathcal{M}$, en les caractéristiques premières à n et δ, il existe un morphisme étale de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.*

La théorème 3.3 est essentiellement le cas $d = 1$ de 5.2. Le point crucial qui fait marcher la preuve est que toute forme bilinéaire alternée non dégénérée sur un module libre sur un anneau commutatif est localement isomorphe à la forme standard.

5.3 Soient p un nombre premier, $n \geqslant 3$ un entier premier à p, g un entier et soit $\mathcal{M}$ l'espace de modules classifiant les objets (A', A'', u, α) du type suivant: A' et A'' sont des schémas abéliens principalement polarisés de dimension g; $u: A' \to A''$ est une isogénie vérifiant $u^t u = p$; α est un isomorphisme $(\mathbb{Z}/n)^{2g} \xrightarrow{\sim} A'_n$.

La structure de niveau α ne joue qu'un rôle de figurant. Le lecteur auquel les champs algébriques ne répugnent pas peut l'omettre et définir $\mathcal{M}$ comme le champ algébrique paramétrisant les triples (A', A'', u).

Soit $\mathcal{M}_0$ l'espace des paires de matrices carrées symétriques X, Y de taille $g \times g$ avec $XY = p1$. C'est le sous-schéma fermé de l'espace affine sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ de dimension $2g^2$, de coordonnées $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant g)$ défini par les équations $x_{ij} = x_{ji}$, $y_{ij} = y_{ji}$, $\Sigma_k x_{ik} y_{kj} = p\delta_{i,j} (1 \leqslant i, j \leqslant g)$.

5.4. THÉORÈME. *Pour tout point géométrique $\bar{x}$ de $\mathcal{M}$, il existe un voisinage étale U de $\bar{x}$ dans $\mathcal{M}$ et un morphisme étale de U dans $\mathcal{M}_0$.*

En dehors de la caractéristique p, $\mathcal{M}$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Le théorème n'est donc intéressant que pour x de caractéristique p. Parce que $\mathcal{M}$ est de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, on se ramène aisément à supposer $\bar{x}$ localisé en un point fermé x de $\mathcal{M}$, de corps résiduel fini.

Soit L_0 un $\mathbb{Z}$-module libre de rang g. Soient H'_0 et H''_0 deux copies de $L_0 \oplus L_0^\vee$, muni de la forme alternée Ψ_0 pour laquelle L_0 et $L_0^\vee$ sont lagrangiens, avec $\Psi_0((l, 0)(0, \lambda)) = \langle \lambda, l \rangle$. Soit

$$u_0 = \mathrm{diag}(1, p): H'_0 \to H''_0.$$

LEMME 5.5. *Soient S un schéma et (A', A'', u) sur S comme en 5.3. Soient $H' = H_1^{DR}(A')$, $H'' = H_1^{DR}(A'')$, Ψ les formes alternées sur H' on H'' définies par les polarisation de A' ou A'' et $u: H' \to H''$ induit par $u: A' \to A''$. Localement sur S (pour la topologie de Zariski), (H', H'', Ψ, u) est isomorphe au système analogue déduit de $(H'_0, H''_0, \Psi_0, u_o)$ par extension des scalaires.*

Preuve. Supposons tout d'abord que S est le spectre d'un corps parfait de caractéristique p et prouvons:

la suite $H' \xrightarrow{u} H'' \xrightarrow{{}^t u} H' \xrightarrow{u} H'$ est exacte; (5.5.1)

$u(H')$ est un sous-espace lagrangien de H'',

et ${}^t u(H'')$ un sous-espace lagrangien de H'. (5.5.2)

L'homologie de de Rham H', H'' de A', A'' est la réduction mod p de l'homologie cristalline H'_{cr}, H''_{cr}. Celle-ci est un $W := W(k)$-module encore muni d'une forme alternée Ψ. Les morphismes induit par u et ${}^t u$ vérifient

$$\Psi(ux, y) = \Psi(x, {}^t uy). \tag{5.5.3}$$

L'hypothese ${}^t uu = p$ fournit

$$\Psi(ux, uy) = p\Psi(x, y). \tag{5.5.4}$$

On a aussi $u^t u = p$, et $\Psi({}^t ux, {}^t uy) = p\Psi(x, y)$.

Puisque $u^t u = p$, le conoyau de u: $H'_{\mathrm{cr}} \to H''_{\mathrm{cr}}$ est annulé par p: c'est un k-espace vectoriel. Il a même rang que le conoyau de ${}^t u$. La somme de ces rangs est celui, $2g$, de $H'_{\mathrm{cr}}/pH'_{\mathrm{cr}}$ et coker (u) et coker $({}^t u)$ sont donc de rang g.

Réduisant modulo p, on voit que u: $H' \to H''$ et ${}^t u$: $H'' \to H'$ ont un conoyau de rang g. Puisque H' et H'' sont de rang $2g$, $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Ker}({}^t u)$, $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}({}^t u)$ sont tous de rang g. Puisque ${}^t uu = 0$ et que $\dim \mathrm{Im}\, u = \dim \mathrm{Ker}\, {}^t u$, et de même permutant les rôles de u et ${}^t u$, la suite (5.5.1) est exacte. La formule (5.5.4) montre que $\mathrm{Im}(u)$ est totalement isotrope, donc lagrangien. De même pour $\mathrm{Im}({}^t u)$. Ceci prouve (5.5.2).

Pour S spectre d'un corps k de caractéristique p, les assertions (5.5.1) (5.5.2) deviennent vraies après extensions des scalaires à une extension parfaite e k. Par descente, elle sont déjà vraies sur k.

Supposons maintenant que $s \in S$ a un corps résiduel de caractéristique p et prouvons 5.5 au voisinage de s. En s, on dispose du sous-espace lagrangien $\mathrm{Im}({}^t u)$ dans H'. Soit L'_s un supplémentaire lagrangien et relevons L'_s en un sous-espace lagragien L' de H'. C'est possible dans un voisinage de s. Permutant les rôles de H' et H'', on construit de même L'' lagrangien dans H''. Le morphisme

$$L' \oplus L'' \xrightarrow[1, {}^t u]{} H'.$$

est un isomorphisme en s, donc dans un voisinage de s. De même pour

$$L'' \oplus L' \xrightarrow[1, u]{} H''.$$

En terme de ces décompositions $L' \oplus L''$ de H' et H'' comme somme de sous-espaces lagrangiens, la matrice de u est $\mathrm{diag}(1, p)$. Les formes alternées mettent L' et L'' en dualité, la même pour H' et H'':

$$\Psi(l', {}^t u(l'')) = \Psi(u(l'), l'').$$

Pour obtenir la forme canonique voulue, il reste à choisir un isomorphisme entre L' et $L_0 \otimes \mathcal{O}_S$.

Pour p inversible sur S, l'assertion 5.5 est triviale: un isomorphisme symplectique de H' avec $H'_0 \otimes \mathcal{O}_S$ se prolonge uniquement en un isomorphisme de type voulu. Ceci conclut la démonstration de 5.5.

5.6 Complément

Soit s un point de S à corps résiduel parfait k de caractéristique p. Soit X le premier voisinage infinitésimal de s dans S, en caractéristique p. C'est le spectre de $\mathcal{O}_{S,s}/(p) + m^2$. Parce que k est parfait, c'est un schéma sur k et la connexion de Gauss-Manin trivialise H', H'', Ψ, u sur X, i.e. les identifie à l'image inverse de leur restriction à s. Dans 5.5, au voisinage de s, on peut choisir l'isomorphisme de (H', H'', Ψ, u) avec l'image inverse de $(H'_0, H''_0, \Psi_{,0}, u_0)$ compatible à cette trivialisation sur X: dans la construction, il suffit de choisir L' et L'', et l'isomorphisme $L' \simeq L'_0 \otimes \mathcal{O}_S$, compatibles à la trivialisation.

5.7 Soit $\mathcal{N}$ le schéma sur $\mathbb{Z}$ classifiant les paires F', F'' de sous-espaces lagrangiens (localement facteur direct) de H'_0 et H''_0, pour lesquels $u(F') \subset F''$.

Si (A', A'', u) sur S est comme en 5.3, et qu'on choisit un isomorphisme 5.5, les sous-espaces F de la filtration de Hodge de $H_1^{DR}(A')$ et $H_1^{DR}(A'')$ fournissent un morphisme de S dans $\mathcal{N}$. Supposons S de type fini sur $\mathbb{Z}$, et soit s un point fermé de caractéristique p. Si la famille (A, B, u) est modulaire en s, i.e., si le complété de S en s est un espace formel de modules (par exemple si $S = \mathcal{M}$), et si l'isomorphisme 5.5 est choisi comme en 5.6, les arguments du paragraphe 3 montrent que l'application obtenue de S dans $\mathcal{N}$ est étale en s.

Ceci prouve 5.4, avec $\mathcal{M}_0$ remplacé $\mathcal{N}$. On conclut par

LEMME 5.8. *Localement sur* $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ *pour la topologie étale,* $\mathcal{N}$ *est recouvert par des ouverts isomorphes à des ouverts de* $\mathcal{M}_0$.

Preuve. Considérons les paires de sous-espaces lagrangiens F', F'', tel que F' soit le graphe d'une application linéaire f' de L_0 dans $L_0^\vee$ et F'' celui d'une application linéaire f'' de $L_0^\vee$ dans L_0. Celles telles que $u(F') \subset F''$ sont paramétrés par un ouvert V de $\mathcal{N}$. La condition $u(F') \subset F''$ signifie:

$$u(f'(x), x) = (f'x, px) \text{ est toujours dans } F'',$$

i.e. $f''f'(x) = px$ pour tout x.

La condition "F' lagrangien" équivant à $\Psi(f'(x), x)$ symétrique. De même pour F''. Choisissons une base de L_0 et considérant les matrices de f' et f'', on obtient les équations de $\mathscr{M}_0$, qui est donc isomorphe à V.

Localement sur Spec($\mathbb{Z}$), pour obtenir un autre ouvert de $\mathscr{N}$ isomorphe à $\mathscr{M}_0$, il suffit de choisir une autre décomposition $H'_0 = L' \oplus L''$, $H''_0 = L' \oplus L''$, L', L'' lagrangiens, $u = \mathrm{diag}(1, p)$. Ceci nous ramène à vérifier, sur un corps de base k, que pour chaque (F', F'') dans $\mathscr{N}_0(k)$, il existe une décomposition comme ci-dessus de $H'_0 \otimes k$, $H''_0 \otimes k$ telle que F' et F'' soient graphes de f' et f''. Pour p inversible, il suffit de choisir L' et L'' tels que L', L'' et F' soient deux à deux supplémentaires. Pour k de caractéristique p, il suffit de choisir L' supplémentaire à $L''_0 \otimes k$ et à F', et L'' supplémentaire à $L'_0 \otimes k$ et à F''.

REMARQUE 5.9. Soit k un anneau, et R_g la k-algèbre engendrée par des indéterminées x_{ij}, y_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant g)$ soumises aux relations $x_{ij} = x_{ji}$, $y_{ij} = y_{ji}$, $\Sigma_j x_{ij} y_{jk} = 0$ $(1 \leqslant i, k \leqslant g)$. Le schéma Spec($R_g$) est l'espace de modules des paires de matrices carrées symétriques X, Y de taille $g \times g$ vérifiant $XY = 0$. Dans la première partie de [3], Chai et Norman prouvent que, pour k un corps, Spec(R_g) est de Cohen-Macaulay, purement de dimension $g(g+1)/2$, et réduit. L'assertion "réduit" est due indépendamment à B. Kotsev (J. Alg. 139 (1991), p. 484–504). Pour k quelconque, G. C. M. Ruitenberg (Comm. Alg. 16 (1988), p. 1993–2011), a donné une base explicite de R_g sur k. L'espace Spec(R_g) est donc plat sur Spec(k) et, ses fibres géométriques étant de Cohen-Macaulay et réduites, est de Cohen-Macaulay (resp. est réduit) si k l'est.

Sur Spec($\mathbb{Z}_p$), considérons maintenant l'espace de modules $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_0 \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p$ des paires de matrices carrées symétriques X, Y de taille $g \times g$ vérifiant $XY = p1$. Le groupe $GL(g)$ agit sur cet espace, par $(X, Y) \mapsto (uXu^t, u^{t-1}Yu)$. La fibre spéciale est Spec(R_g), pour $k = \mathbb{F}$. Géométriquement, i.e. sur la clôture algébrique de k, $GL(g)$ a sur Spec(R_g) un nombre fini d'orbites. On vérifie que les orbites ouvertes ont pour points des paires (X, Y) qui, après un changement de coordonnées convenable u, se mettent sous la forme

$$X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec A et B non dégénérées. De tels points se relèvent en caractéristique 0: si $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ relèvent A et B, (X, Y) se relève en $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ avec

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & p\tilde{B}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} p\tilde{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que la fibre de caractéristique 0 de $\mathscr{M}_1$ est dense dans $\mathscr{M}_1$. La fibre spéciale étant réduite, $\mathscr{M}_1$est plat sur $\mathbb{Z}_p$ (EGA IV 2e partie 3.4.6.1). Il en résulte

que $\mathscr{M}_0$ est plat sur Spec($\mathbb{Z}$) à fibres géométriques réduites et de Cohen-Macaulay. La fibre générique étant lisse, le critère de Serre EGA IV 5.8.6 montre que $\mathscr{M}_0$ est normal.

Par 5.4, on en déduit les mêmes propriétés pour $\mathscr{M}$: l'espace de modules $\mathscr{M}$ est normal plat sur Spec($\mathbb{Z}$) à fibres géométriques réduites et de Cohen-Macaulay. Ces résultats sont également obtenus par Chai et Norman, dans la deuxième partie de leur article [3] (du moins pour $p \neq 2$), par une méthode plus compliquée.

5.10 Soit B la sous-algèbre de $M_2(\mathbb{Z})$ formée des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ pour lesquelles b est divisible par p. Soit * l'involution de B définie par

$$e_{11} \mapsto e_{11},\ e_{22} \mapsto e_{22},\ pe_{12} \to e_{21},\ e_{21} \to pe_{12}.$$

Pour tout système (A', A'', u) comme en 5.3, B agit sur $A := A' \oplus A''$: e_{11} est la projection sur A', e_{22} la projection sur A'', e_{21} est u et pe_{12} est ${}^t u$. Si on munit A de la polarisation principale somme de celles de A' et A'', l'involution * de B correspond à la transposition des endomorphismes de A.

Réciproquement, si A est une variété abélienne principalement polarisée munie d'une structure de B-module, et que * correspond à la transposition, A est obtenue par le procédé précédent: les idempotents e_{11}, et e_{22} définissent la décompositon de A en somme directe $A = A' \oplus A''$, et u est donné par e_{21}.

5.11 Soit maintenant R un ordre d'une algèbre de quaternion sur $\mathbb{Q}$, muni d'une involution *. Supposons que, pour $\mathbb{F}_q$ une extension finie convenable de $\mathbb{F}_p$, $(R \otimes W(\mathbb{F}_q), *)$ soit isomorphe à $(B \otimes W(\mathbb{F}_q), *)$.

Soit $\mathscr{M}$ l'espace de module des variétés abéliennes A, munie d'une structure de R-modules, d'une polarisation $\varphi: A \to A^*$ de degré δ premier à p, R-linéaire pour la structure de R-module $z \mapsto {}^t\rho(z^*)$ de A^*, et d'une structure de niveau n.

THÉORÈME 5.12. *L'énoncé* 5.4 *est valable pour* $\mathscr{M}$ *comme en* 5.11, *en tout point de caractéristique* p.

Preuve. Soit V étale sur Spec($\mathbb{Z}$), ayant un point de caractéristique p, tel que δ soit inversible sur V, et tel que $(B, *)$ et $(R, *)$ deviennent isomorphes sur V. Il suffit de travailler au-dessus de V, puisque $\mathscr{M}_V = \mathscr{M} \times \mathrm{Spec}(V)$ est étale sur $\mathscr{M}$ et couvre ses points de caractéristique p.

Soit donc S sur Spec(V). Un schéma abélien A comme en 5.11 définit $H_1^{DR}(A)$ sur S, muni d'une structure de R-module. Identifions $R \otimes V$ à $B \otimes V$, d'où e_{11} et e_{22} dans $R \otimes V$. Les idempotents définissent des facteurs directs $e_{11}H_1^{DR}(A)$ et $e_{22}H_1^{DR}(A)$. On peut utiliser ces facteurs direct comme étaient utilisés l'homologie de A' et A'' dans la preuve de 5.4, et conclure par la même démonstration.

Bibliographie

[1] M. Artin, "*Algebraization of formal moduli I*", Global analysis, Princeton Math. Series 29, Princeton Univ. Press (1969), p. 21–71.

[2] P. Berthelot, L. Breen et W. Messing, "*Théorie de Dieudonné cristalline II*", Lecture Notes in Math. 930, Springer-Verlag, Heidelberg, (1982).

[3] C. L. Chai and P. Norman, "Singularities of the $\Gamma_0(p)$-level structure", *J. of Algebraic Geometry* 1, 2 (1992) 251–277.

[4] P. Deligneand K. Ribet, "Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields", *Inv. Math.* 59 (1980) 227–286.

[5] A. Grothendieck, "Techniques de descente et théorèmes d'existence V–Les schémas de Picard: théorèmes d'existence,", *Séminaire Bourbaki* 232 (1961/62).

[6] G. Harder, R. P. Langlands and M. Rapoport, "Algebraische Zyklen auf Hilbert-Blumenthal-Flächen", *Crelle* 366 (1986) 53–120.

[7] W. Messing, "*The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups: with Applications to Abelian Schemes*", Lecture Notes in Mathematics 264, Springer-Verlag, Heidelberg, (1972).

[8] L. Moret-Bailly, "Familles de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbb{P}^1$", *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux. Astérisque* 86, SMF, (1981).

[9] D. Mumford, "*Abelian Varieties*", TIFR–Oxford University Press, (1970).

[10] D. Mumford and J. Fogarty, "*Geometric Invariant Theory*–2^ded", Ergebnisse 34, Springer-Verlag, Heidelberg, (1982).

[11] D. Mumford, A. Ash, M. Rapoport and Y. Tai, "*Non Singular Compactifications of Locally Symmetric Varieties*", Math. Sci. Press, Brookline Mass., (1975).

[12] F. Oort, "Finite group schemes, local moduli for abelian varieties and lifting problems", *Comp. Math.* 23 (1972) 265–296.

[13] F. Oort and J. Tate, "Group schemes of prime order", *Ann. Sci.* ENS 3 (1970) 1–21.

[14] M. Rapoport, "Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal", *Comp. Math.* 36, 3 (1978) 255–335.