COMPOSITIO MATHEMATICA

G. DIAZ

Complément à : « Sur l'approximation de π par des nombres algébriques particuliers »

Compositio Mathematica, tome 79, nº 3 (1991), p. 255-270
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1991__79_3_255_0>

Compositio Mathematica **79**: 255–270, 1991.

Complément à: Sur l'approximation de π par des nombres algébriques particuliers

G. DIAZ

Equipe de Théorie des Nombres, Université de Saint-Etienne, 42023 Saint-Etienne Cédex 2, France

Received 22 February 1990; accepted 22 October 1990

Résumé. En modifiant, dans l'esprit de [D2], la méthode utilisée dans [D1] on améliore un résultat de M. Waldschmidt sur l'approximation de π par les nombres algébriques.

1. Enoncé des résultats

Pour un nombre algébrique ξ on note $d(\xi)$ son degré, $M(\xi)$ sa mesure de Mahler, $h(\xi)$ sa hauteur logarithmique absolue c'est-à-dire $h(\xi) = (\log M(\xi))/d(\xi)$.

On a démontré dans [D1] les deux théorèmes suivants, par une méthode de Gel'fond-Schneider assez standard.

THÉORÈME 1. *Il existe $c_1 > 0$ tel que pour tout entier $N \geqslant 1$ et tout nombre algébrique ξ appartenant au corps $\mathbb{Q}(i, \exp(2\pi i/N))$ on ait, en notant D_N le degré de ce corps de nombres*

$$\log|\pi - \xi| \geqslant -c_1 \frac{D_N^2}{N} (h(\xi) + \log D_N)(\log D_N).$$

THÉORÈME 2. *Il existe $c_2 > 0$ tel que pour tout entier $N \geqslant 2$ et tout nombre algébrique ξ on ait, en notant D_N le degré du corps de nombres $\mathbb{Q}(i, \xi, \exp(2\pi i/N))$*

$$\log|\pi - \xi| \geqslant -c_2 D_N^2(h(\xi) + \log D_N)\left(\frac{\log D_N}{\log N}\right).$$

Une telle minoration est appelée une mesure (d'approximation) de π.

Le théorème 1 améliore un résultat de N. I. Feldman (1973), le théorème 2 retrouve simplement un résultat de M. Waldschmidt [W1, théorème 2.5] obtenu via les formes linéaires de logarithmes. Le premier n'est pas conséquence du second. Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 sont identiques, à un "détail" près: dans la deuxième on introduit un élément primitif de $\mathbb{Q}(i, \xi, \exp(2\pi i/N))$ qui fait apparaitre dans la mesure, via le théorème de Liouville, la quantité $D_N^2(h(\xi) + \log D_N)$. Comme me l'a fait remarqué M. Waldschmidt il est moins pénalisant d'utiliser une base du corps de nombres $\mathbb{Q}(i, \xi, \exp(2\pi i/N))$ constituée d'éléments de la forme $i^p \xi^q \exp(2\pi ir/N)$, $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$, $p < 2$, $q < d(\xi)$, $r < \varphi(N)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler; cette façon de faire introduit malgré tout la quantité $D_N d(\xi) h(\xi)$ dans la mesure et ne permet pas de remplacer $\log N$ par N dans le théorème 2 (sauf si on se limite à des nombres algébriques ξ vérifiant $Nd(\xi) \ll D_N(\log D_N)$).

Et pourtant en regardant la partie "essentielle" de la démonstration du théorème 2 il est naturel de conjecturer que dans ce théorème on peut remplacer $\log N$ par N. C'est ce que nous allons démontrer ici.

THÉORÈME 3. *Il existe $c_3 > 0$ tel que pour tout entier $N \geqslant 1$ et tout nombre algébrique ξ on ait, en notant D_N le degré du corps de nombres $\mathbb{Q}(i, \xi, \exp(2\pi i/N))$*

$$\log|\pi - \xi| \geqslant -c_3 \frac{D_N^2}{N} (h(\xi) + \log D_N)(\log D_N).$$

Ceci améliore donc le théorème 2 et redonne le théorème 1 comme cas particulier. La démonstration est du type Gel'fond-Schneider, dans la variante de [D2]; on détaillera la méthode au paragraphe 2 après avoir introduit les notations nécessaires. La démonstration elle même occupe le paragraphe 3.

2. Préliminaires

2.1. *Polynômes de Feldman*

On note $\Delta_0(z) = 1$ et pour $m \in \mathbb{N}$ non nul $\Delta_m(z) = (z + 1) \cdots (z + m)/(m!)$. Le lemme suivant résulte des estimations de P. Philippon [P2].

LEMME 1. (a) *Pour tout $z \in \mathbb{Q}$, tout $t \in \mathbb{N}$:*

$$\log \left| \frac{1}{t!} \Delta_m^{(t)}(z) \right| \leqslant (m - t) \log\left(1 + \frac{|z|}{m}\right) + 3m.$$

(b) *On se donne z dans $\mathbb{Q}$, t et m dans $\mathbb{N}$; il existe un entier positif $\delta(z, m, t)$ dénominateur commun à tous les nombres rationnels $(\tau!)^{-1} \Delta_\mu^{(\tau)}(z)$ (où $0 \leqslant \mu \leqslant m$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$) et tel que l'on ait, en notant* $\operatorname{den}(z)$ *le dénominateur de z*:

$$\log \delta(z, m, t) \leqslant 21m(1 + \log(1 + t) + \log \operatorname{den}(z)).$$

2.2. *Fonction auxiliaire, polynômes auxiliaires*

Dans toute la suite on se fixe un entier $N \geqslant 1$ et un nombre algébrique ξ. On note $\theta_N = \exp(2\pi i/N)$, et D_N le degré du corps de nombres $\mathbb{Q}(i, \xi, \theta_N)$; θ_N est un entier algébrique de degré $\varphi(N)$.

Soient K, M deux entiers $\geqslant 1$ et $\{P_{km}; 0 \leqslant k < K, 0 \leqslant m < M\}$ une famille de polynômes de $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$. On leur associe la fonction entière

$$F(z) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} P_{km}(\pi, \theta_N)\Delta_m(z)\exp(2\pi ikz).$$

On part du fait que les dérivées des fonctions $\Delta_m(z)\exp(2\pi ikz)$ calculées en les points s/N (où $s \in \mathbb{N}$) sont des expressions $\mathbb{Q}$-polynômiales en (π, θ_N); comme c'est aussi le cas pour les coefficients $P_{km}(\pi, \theta_N)$ de F, la propriété passe à F. On souhaite travailler avec des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$; par le lemme 1 on sait qu'il existe un dénominateur $\delta(s/N, M-1, t)$ commun à tous les nombres rationnels $(\tau!)^{-1}\Delta_m^{(\tau)}(s/N)$ avec $0 \leqslant m < M$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$. On note simplement $\delta(s, t)$ ce dénominateur:

$$\delta(s, t)F^{(t)}\left(\frac{s}{N}\right)$$
$$= \sum_{k<K} \sum_{m<M} \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} P_{km}(\pi, \theta_N) \frac{t!}{(t-\tau)!} \left(\frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right)(2k\pi i)^{t-\tau}\theta_N^{ks}.$$

En notant $n(ks)$ le reste de la division de ks par N on a $\theta_N^{ks} = \theta_N^{n(ks)}$. Pour tout $(k, m, t, s) \in \mathbb{N}^4$ avec $k < K, m < M$ et tout $(t, s) \in \mathbb{N}^2$ on définit alors les polynômes de $\mathbb{Z}[i][X_1, X_2]$ suivants:

$$\begin{cases} R_{kmts}(X_1, X_2) = \left(\sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left(\frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right)(2ki)^{t-\tau}X_1^{t-\tau}\right)X_2^{n(ks)}, \\ Q_{ts}(X_1, X_2) = \sum_{k<K} \sum_{m<M} P_{km}(X_1, X_2)R_{kmts}(X_1, X_2). \end{cases}$$

La **relation fondamentale** s'écrit pour tout $(t, s) \in \mathbb{N}^2$:

$$\delta(s, t)F^{(t)}\left(\frac{s}{N}\right) = Q_{ts}(\pi, \theta_N). \tag{1}$$

Notons que les degrés partiels de R_{kmts} sont respectivement majorés par t et $n(ks)$. Il est tentant d'abaisser le degré en X_2 en introduisant le polynôme minimal de θ_N pour calculer $\theta_N^{n(ks)}$; cela complique la situation et dégrade les estimations en hauteurs des polynômes R_{kmts}.

2.3. *Quelle va être la démarche dans la démonstration?*

On va modifier, par rapport à la démonstration du théorème 2 de [D1], essentiellement la phase de construction, le reste de la démonstration relevant de la méthode classique de Gel'fond-Schneider. On adapte pour cela la démarche utilisée dans [D2], en construisant une famille $\{P_{km}; k < K, m < M\}$ qui permet d'annuler tous les polynômes $Q_{ts}(X_1, \theta_N)$ pour $0 \leqslant t < T$, $0 \leqslant s < S$, puis en dérivant adéquatement les P_{km} pour obtenir des polynômes non tous nuls en (ξ, θ_N); cette condition est absolument indispensable pour le lemme de zéros. Il se trouve que cette façon de faire ne dégrade pas les estimations "naturelles", en ce sens que la contribution des coefficients P_{km} reste plus petite que celle des R_{kmts}. A noter une différence par rapport à [D2]: pour que la dernière remarque soit exacte (et on veut qu'il en soit ainsi), il faut dériver les polynômes P_{km} uniquement par rapport à la première variable alors que dans [D2] on dérivait par rapport à toutes les variables. C'est ce qui autorise à prendre pour équations $Q_{ts}(X_1, \theta_N) = 0$, au lieu de $Q_{ts}(X_1, X_2) = 0$ comme le suggère une transcription simpliste de [D2].

3. Démonstration du théorème 3

Dans la suite $N \geqslant 1$ et ξ sont fixés. Il est clair que l'on peut se restreindre au cas $|\pi - \xi| \leqslant 1/2$, ce que l'on fera; en particulier on a $|\xi| \leqslant 4$. Les paramètres seront les entiers K, M, T, S, T' et le réel R, tous plus grands que 1; on leur imposera au cours de la démonstration des contraintes $\mathscr{C}1, \mathscr{C}2, \ldots, \mathscr{C}8$.

3.1. *Premier pas: la construction.*

L'objectif de ce pas est de construire une famille de polynômes de $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$, non tous nuls, $\{\tilde{P}_{km}; 0 \leqslant k < K, 0 \leqslant m < M\}$, chaque $\tilde{P}_{km}$ ayant des degrés partiels en X_1, X_2 strictement majorés par T, $\varphi(N)$ et telle que l'on ait

$$(\mathscr{S}) \quad \tilde{Q}_{ts}(X_1, \theta_N) = 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant t < T, 0 \leqslant s < S,$$

où on a noté $\tilde{Q}_{ts}(X_1, X_2) := \sum_{k<K} \sum_{m<M} \tilde{P}_{km}(X_1, X_2) R_{kmts}(X_1, X_2)$.

Comment justifier l'hypothèse sur les degrés partiels des $\tilde{P}_{km}$? Pour $t < T$, $s < S$ les degrés partiels des R_{kmts} sont majorés par T, N et il serait "logique" d'imposer la même chose aux $\tilde{P}_{km}$. Mais au second pas il sera nécessaire de montrer que les $\tilde{P}_{km}(X_1, \theta_N)$ ne sont pas tous nuls, ce qui n'est pas évident sous la seule hypothèse que le degré en X_2 des $\tilde{P}_{km}$ est strictement inférieure à N; c'est par contre immédiat si on remplace N par $\varphi(N)$.

Rappelons enfin que dans le second pas les polynômes $\tilde{P}_{km}$, $\tilde{Q}_{ts}$ seront modifiés en des polynômes P_{km}, Q_{ts}.

Les inconnues sont les coefficients des KM polynômes $\tilde{P}_{km}$, et leur nombre est donc majoré par KMT $\varphi(N)$. Pour $t < T$, le degré en X_1 des Q_{ts} est majoré par $2T$; donc le nombre de coefficients de chaque polynôme $Q_{ts}(X_1, \theta_N)$, pour $t < T$ et $s < S$, est majoré par $2T$. Ainsi annuler un tel polynôme, c'est-à-dire annuler chacun de ses coefficients, fournit au plus $2T$ équations; et ces équations sont linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}(i, \theta_N)$ et même plus précisément dans $\mathbb{Z}[i, \theta_N]$. Donc au total $(\mathcal{S})$ s'écrit comme un système linéaire ayant au plus $2T^2S$ équations. Pour résoudre ce systême on va utiliser un lemme de Siegel, par exemple la version de [M-W]; il faut imposer une contrainte à savoir que le nombre d'inconnues KMT $\varphi(N)$ est strictement plus grand que le nombre d'équations multiplié par le degré du corps $\mathbb{Q}(i, \theta_N)$ i.e. $2T^2S\,[\mathbb{Q}(i, \theta_N)\colon \mathbb{Q}]$. On va imposer un peu plus, après avoir majoré $[\mathbb{Q}(i, \theta_N)\colon \mathbb{Q}]$ par $2\varphi(N)$, à savoir KMT $\varphi(N) \geqslant 2(4T^2S\varphi(N))$; cela donne la première contrainte:

- $(\mathscr{C}1)$ $\quad \mathrm{KM} \geqslant 8TS.$

On explicite l'équation générale du système linéaire à résoudre; pour cela on pose:

$$\begin{cases} \tilde{Q}_{ts}(X_1, X_2) = \displaystyle\sum_{n_1 < 2T} \sum_{n_2 < 2N} \tilde{q}_{tsn} X_1^{n_1} X_2^{n_2}, \quad n = (n_1, n_2), \\ \tilde{P}_{km}(X_1, X_2) = \displaystyle\sum_{\nu_1 < T} \sum_{\nu_2 < \varphi(N)} \tilde{p}_{km\nu} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2}, \quad \nu = (\nu_1, \nu_2). \end{cases}$$

Ainsi:

$$\tilde{Q}_{ts} = \sum_{k<K} \sum_{m<M} \sum_{\nu_1<T} \sum_{\nu_2<\varphi(N)}$$

$$\tilde{p}_{km\nu} \left(\sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \frac{\delta(s,t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right) (2ki)^{t-\tau} X_1^{\nu_1+t-\tau} \right) X_2^{\nu_2+n(ks)}.$$

D'où pour tout $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant n_1 < 2T$, $0 \leqslant n_2 < 2N$:

$$\tilde{q}_{tsn} = \sum_{(k,m,\nu_1)} \tilde{p}_{km\nu} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left(\frac{\delta(s,t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right) (2ki)^{t-\tau},$$

la somme portant sur tous les $(k, m, v_1) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant

$$k < K,\ m < M,\ v_1 < T,\ 0 \leqslant v_2 < \varphi(N),\ 0 \leqslant \tau \leqslant \min(m, t)$$

$$\text{où } v_2 := n_2 - n(ks),\ \tau := v_1 + t - n_1.$$

Puisque $\tilde{Q}_{ts}(X_1, \theta_N) = \Sigma_{n_1 < 2T} (\Sigma_{n_2 < 2N} \tilde{q}_{tsn} \theta_N^{n_2}) X_1^{n_1}$, le système $(\mathscr{S})$ est équivalent à:

$$(\mathscr{S}') \begin{cases} \sum\limits_{n_2 < 2N} \tilde{q}_{tsn} \theta_N^{n_2} = 0, \\ \text{pour } 0 \leqslant t < T,\ 0 \leqslant s < S,\ 0 \leqslant n_1 < 2T. \end{cases}$$

L'équation numéro (t, s, n_1) est donc avec les notations antérieures:

$$0 = \sum_{n_2 < 2N} \sum_{(k,m,v_1)} \tilde{p}_{kmv} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left(\frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left(\frac{s}{N} \right) \right) (2ki)^{t-\tau} \theta_N^{n_2}$$

c'est-à-dire encore

$$\begin{cases} 0 = \sum\limits_{(k,m,v_1)} \tilde{p}_{kmv} U_{(k,m,v)}^{(t,s,n_1)}(i, \theta_N), \\ \text{où } U_{(k,m,v)}^{(t,s,n_1)}(Y_1, Y_2) := \sum\limits_{n_2 < 2N} \dfrac{t!}{(t-\tau)!} \left(\dfrac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left(\dfrac{s}{N} \right) (2kY_1)^{t-\tau} \right) Y_2^{n_2}. \end{cases}$$

En tenant compte de $M(i) = M(\theta_N) = 1$, le lemme de Siegel permet d'affirmer que $(\mathscr{S}')$ admet une solution non nulle $\{\tilde{p}_{kmv};\ k < K, m < M, v = (v_1, v_2), v_1 < T, v_2 < \varphi(N)\}$, à composantes dans $\mathbb{Z}$, vérifiant

$$\log \max_{k,m,v} |\tilde{p}_{kmv}|$$
$$\leqslant \log 3 + \left(\frac{4T^2 S \varphi(N)}{\mathrm{KMT}\, \varphi(N) - 4T^2 S \varphi(N)} \right) \log \max_{(t,s,n_1)} \left(\sum_{(k,m,v_1)} 2L(U_{(k,m,v)}^{(t,s,n_1)}) \right)$$

(pour un polynôme P, $L(P)$ désigne sa longueur c'est-à-dire la somme des modules de ses coefficients). Il reste à estimer les longueurs qui apparaissent ci-dessus; en revenant aux définitions:

$$L(U_{(k,m,v)}^{(t,s,n_1)}) \leqslant \sum_{n_2 < 2N} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left| \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)} \left(\frac{s}{N} \right) \right| (2k)^{t-\tau}.$$

Grâce au lemme 1:

$$\log\left|\frac{\delta(s,t)}{\tau!}\Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{S}{N}\right)\right| \leqslant 25M\log eT(N+S/M).$$

On majore ensuite $t!/(t-\tau)!$ par t^τ puis T^M (puisque $\tau \leqslant m$, $t < T$). Donc:

$$\begin{aligned}2L(U_{(k,m,s)}^{(t,s,n_1)}) &\leqslant 4NT^M(2K)^T\exp(25M\log eT(N+S/M))\\ &\leqslant \exp(T\log 2K + 29M\log eT(N+S/M)).\end{aligned}$$

En utilisant ($\mathscr{C}1$) la majoration des $|\tilde{p}_{km\nu}|$ devient:

$$\log\max_{k,m,\nu}|\tilde{p}_{km\nu}| \leqslant \log 3 + \log\max_{(t,s,n_1)}\left(\sum_{(k,m,\nu_1)} 2L(U_{(k,m,\nu)}^{(t,s,n_1)})\right)$$

et donc:

$$\log\max_{k,m,\nu}|\tilde{p}_{km\nu} \leqslant 5T\log eK + 30M\log eT(N+S/M). \tag{2}$$

Ceci termine la construction.

3.2. *Deuxième pas: modification des polynômes $\tilde{P}_{km}$, $\tilde{Q}_{ts}$*

Pour l'instant on sait que les $\tilde{P}_{km}$ ne sont pas tous nuls, mais on ne peut rien dire de tel pour les $\tilde{P}_{km}(\xi,\theta_N)$. Or si tous ces nombres algébriques étaient nuls, tous les $\tilde{Q}_{ts}(\xi,\theta_N)$ seraient évidemment nuls et il n'y aurait rien à en tirer. Dans ce pas on va modifier les $\tilde{P}_{km}$ en des polynômes $P_{km}\in\mathbb{Z}[X_1,X_2]$ qui ne seront pas tous nuls en (ξ,θ_N).

Si on procède, comme dans [D2], par dérivation sur X_1 et X_2 on fait apparaître dans les estimations de la longueur des P_{km} un terme en $\exp\varphi(N)$ (via la majoration des coefficients du binôme); comme ce terme est indésirable on va dériver les $\tilde{P}_{km}$ uniquement par rapport à X_1.

3.2.1. *Définition des nouveaux polynômes auxiliaires*

Pour $P\in\mathbb{C}[X_1, X_2]$, $j\in\mathbb{N}$ on note D^jP la dérivée j^{em} de P par rapport à X_1. Puisque

$$\tilde{P}_{km}(X_1,\theta_N) = \sum_{\nu_1<T}\left(\sum_{\nu_2<\varphi(N)}\tilde{p}_{km\nu}\theta_N^{\nu_2}\right)X_1^{\nu_1}$$

et puisque les $\tilde{p}_{kmv}$ sont dans $\mathbb{Z}$ et non tous nuls, les polynômes $\tilde{P}_{km}(X_1, \theta_N)$ ne sont pas tous nuls; à noter que c'est précisément pour avoir cela que l'on a borné par $\varphi(N)$ le degré en X_2 des $\tilde{P}_{km}$! Donc l'ensemble $J := \bigcup_{k,m}\{j \in \mathbb{N}; (D^j\tilde{P}_{km})(\xi, \theta_N) \neq 0\}$ est fini non vide (fini car il n'y a qu'un nombre fini de $\tilde{P}_{km}$; non vide car pour un polynôme $\tilde{P}_{km}(X_1, \theta_N)$ non nul – il y en a – une de ses dérivées en ξ est nécessairement non nulle). On note j le plus petit élément de J et ainsi:

$$\begin{cases} \text{*pour au moins un couple } (k, m), (D^j\tilde{P}_{km})(\xi, \theta_N) \text{ est non nul,} \\ \text{*pour tout } h \in \mathbb{N}, h < j, \text{ tout couple } (k, m)\text{: } (D^h\tilde{P}_{km})(\xi, \theta_N) = 0. \end{cases}$$

On définit alors pour tout $(k, m) \in \mathbb{N}^2$, $k < K$ et $m < M$, et tout $(t, s) \in \mathbb{N}^2$ les polynômes $P_{km} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$, $Q_{ts} \in \mathbb{Z}[i][X_1, X_2]$:

$$P_{km}(X_1, X_2) := \frac{1}{j!}(D^j\tilde{P}_{km})(X_1, X_2),$$

$$Q_{ts}(X_1, X_2) := \sum_{k<K}\sum_{m<M} P_{km}(X_1, X_2)R_{kmts}(X_1, X_2).$$

Avec ces notations, un des nombres $P_{km}(\xi, \theta_N)$ est non nul. Ceci sera utilisé au pas 4.

3.2.2. *Propriétés des polynômes P_{km}, Q_{ts}*

Soit $(t, s) \in \mathbb{N}^2$ avec $t < T$, $s < S$; par construction $\tilde{Q}_{ts}(X_1, \theta_N)$ est nul, donc $(D^j\tilde{Q}_{ts})(X_1, \theta_N)$ est aussi nul. En utilisant la formule de Leibniz et la définition de j on en déduit

$$\sum_{k,m}(D^j\tilde{P}_{km})(\xi, \theta_N)R_{kmts}(\xi, \theta_N) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$Q_{ts}(\xi, \theta_N) = 0 \text{ pour } t < T, s < S. \tag{3}$$

C'est cette propriété qui maintenant remplace $(\mathscr{S})$. On a immédiatement:

$$\begin{cases} \deg_{X_1}(P_{km}) \leqslant \deg_{X_1}(\tilde{P}_{km}) < T, \\ \deg_{X_2}(P_{km}) \leqslant \deg_{X_2}(\tilde{P}_{km}) < \varphi(N), \\ \deg_{X_1}(Q_{ts}) < T + t, \ \deg_{X_2}(Q_{ts}) < 2N. \end{cases} \tag{4}$$

Nous aurons besoin aussi d'estimations pour la longueur des P_{km} et des Q_{ts}. Puisque

$$\tilde{P}_{km} = \sum_{\nu_1 < T} \sum_{\nu_2 < \varphi(N)} \tilde{p}_{km\nu} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2}$$

on a:

$$P_{km}(X_1, X_2) = \sum_{j \leqslant \nu_1 < T} \sum_{\nu_2 < \varphi(N)} \tilde{p}_{km\nu} \binom{\nu_1}{j} X_1^{\nu_1 - j} X_2^{\nu_2}.$$

D'où:

$$L(P_{km}) = \sum_{j \leqslant \nu_1 < T} \sum_{\nu_2 < \varphi(N)} |\tilde{p}_{km\nu}| \binom{\nu_1}{j};$$

on vérifie que

$$\sum_{j \leqslant \nu_1 < T} \binom{\nu_1}{j} \quad \text{est égal à} \quad \binom{T}{j+1}$$

que l'on majore par 2^T. Et en utilisant (2) on obtient:

$$L(P_{km}) \leqslant \varphi(N) 2^T \max_{k,m,\nu} |\tilde{p}_{km\nu}| \leqslant N 2^T \max_{k,m,\nu} |\tilde{p}_{km\nu}|$$

i.e.

$$L(P_{km}) \leqslant \exp(6T \log eK + 31M \log eT(N + S/M)). \tag{5}$$

A noter que dans (2) on peut remplacer le 5 par 4,1 et dans (5) le 6 par 5,1. De $Q_{ts} = \Sigma_{k,m} P_{km} R_{kmts}$ il résulte facilement: $L(Q_{ts}) \leqslant \Sigma_{k,m} L(P_{km}) L(R_{kmts})$.

En revenant à la définition:

$$L(R_{kmts}) = \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left| \frac{\delta(s,t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right) \right| (2k)^{t-\tau};$$

par le lemme 1:

$$\log \left| \frac{\delta(s,t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right) \right| \leqslant 25M \log e(1+t)(N + s/M).$$

Donc

$$L(R_{kmts}) \leqslant \exp(t \log eK + 27M \log e(1+t)(N+s/M)).$$

D'où pour Q_{ts}, quel que soit le couple (t, s):

$$L(Q_{ts}) \leqslant \exp(31M \log e(1+t)(N+s/M) + 31M \log eT(N+S/M) \\ + 6(T+t) \log eK). \tag{6}$$

3.3. *Troisième pas: extrapolation*

Ce pas est de nature analytique, et va faire intervenir la "relation fondamentale", c'est-à-dire le lien qui existe entre les $Q_{ts}(\pi, \theta_N)$ et une certaine fonction entière, dite fonction auxiliaire.

Nous utiliserons les trois lemmes suivants, la démonstration du premier étant laissée au lecteur.

LEMME 2. *Soient $R \in \mathbb{C}[X]$ de degré d, x et y deux nombres complexes. Alors*

$$|R(x) - R(y)| \leqslant |x-y| L(R) d \max(1, |x|, |y|)^d.$$

LEMME 3. *Pour tout $(t, s) \in \mathbb{N}^2$:*

$$|Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)| \leqslant |\pi - \xi|(t+T) L(Q_{ts}) 4^{t+T}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $Q_{ts}^*(X) := Q_{ts}(X, \theta_N)$; par le lemme 2:

$$|Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)| \leqslant |\pi - \xi| \deg(Q_{ts}^*) L(Q_{ts}^*) \max(1, \pi, |\xi|)^{\deg(Q_{ts}^*)}.$$

Rappelons que $|\xi|$ est plus petit que 4. Le degré de Q_{ts}^* est, par (4), plus petit que $(t+T)$. Et enfin il est immédiat que $L(Q_{ts}^*)$ est majorée par $L(Q_{ts})$; d'où:

$$|Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)| \leqslant |\pi - \xi|(t+T) L(Q_{ts}) 4^{t+T}.$$

LEMME 4. Formule d'extrapolation [C2, Lemme 7]. *Soient f une fonction entière, S et T des entiers positifs, r et R des nombres réels avec $r \geqslant 2S$, $R > 2r$. Alors*

$$|f|_r \leqslant 2|f|_R \left(\frac{2r}{R}\right)^{TS} + \left(\frac{9r}{S}\right)^{TS} \left(\max_{\substack{0 \leqslant t < T \\ 0 \leqslant s < S}} \frac{1}{t!} |f^{(t)}(s)|\right).$$

Rappelons que $|f|_r := \sup\{|f(z)|; z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant r\}$. On va introduire pour utiliser ce lemme d'extrapolation la fonction f suivante:

$$f(z) := \sum_{k<K} \sum_{m<M} P_{km}(\pi, \theta_N)\Delta_m\left(\frac{z}{N}\right)\exp\left(2\pi ik\frac{z}{N}\right).$$

La relation fondamentale (1) s'écrit alors, pour tout $(t, s) \in \mathbb{N}^2$:

$$\delta(s, t)f^{(t)}(s) = \frac{1}{N^t} Q_{ts}(\pi, \theta_N). \tag{7}$$

Majoration de $|f^{(t)}(s)|$ pour $0 \leqslant t < T, 0 \leqslant s < S$

En utilisant (7) et la propriété (3) (c'est là que cette propriété, issue directement de la construction, sert):

$$\delta(s, t)N^t f^{(t)}(s) = Q_{ts}(\pi, \theta_N) = Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N);$$

et par le lemme 3 et (6):

$$|f^{(t)}(s)| \leqslant |Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)| \leqslant |\pi - \xi|(2T)L(Q_{ts})4^{2T}$$

et donc:

$$|f^{(t)}(s)| \leqslant |\pi - \xi| \exp(18T \log eK + 62M \log eT(N + S/M)). \tag{8}$$

Estimation de $|f|_R$

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant R$; par définition:

$$f(z) = \sum_{k<K} \sum_{m<M} P_{km}(\pi, \theta_N)\Delta_m\left(\frac{z}{N}\right)\exp\left(2\pi ik\frac{z}{N}\right).$$

On a

$$|\Delta_m(z/N)| \leqslant \Delta_m(|z|/N) \leqslant \Delta_m([|z|/N] + 1) = \binom{m + [|z|/N] + 1}{m},$$

que l'on peut majorer par $2^{m+1+[|z|/N]}$ et donc par $2^{M+(R/N)}$. De plus $|P_{km}(\pi, \theta_N)| \leqslant L(P_{km})\pi^T$, et on sait estimer le majorant à l'aide de (5):

$$|P_{km}(\pi, \theta_N)| \leqslant \exp(7T \log eK + 30M \log eT(N + S/M)).$$

D'où au total:

$$|f|_R \leqslant (KM) \max_{k,m} |P_{km}(\pi, \theta_N)| 2^{M+(R/N)} \exp(2\pi KR/N),$$

i.e.

$$|f|_R \leqslant \exp(8T \log eK + 32M \log eT(N + S/M) + 8KR/N). \tag{9}$$

Application du lemme d'extrapolation

On applique le lemme 4 à la fonction f en prenant $r = 2S'$ où S' est un nouveau paramètre entier plus grand que S (on extrapole de (T, S) à (T, S')). On impose pour cela la nouvelle contrainte:

- $(\mathscr{C}2)$ $\quad S' > S, \quad R > 4S'$.

La formule d'extrapolation implique:

$$|f|_r \leqslant 2|f|_R \exp\left(-TS\log\left(\frac{R}{4S'}\right)\right) + \exp\left(TS\log\left(\frac{18S'}{S}\right)\right)\left(\max_{t<T, s<S} |f^{(t)}(s)|\right).$$

Et en utilisant (8), (9):

$$|f|_r \leqslant \exp\left(-TS\log\left(\frac{R}{4S'}\right) + B_1\right) + |\pi - \xi|\exp(B_2), \tag{10}$$

avec

$$B_1 := 9T \log eK + 32M \log eT(N + S/M) + 8KR/N,$$

$$B_2 := TS\log(18S'/S) + 18T \log eK + 62M \log eT(N + S/M).$$

Conséquence: majoration de $|Q_{ts}(\xi, \theta_N)|$ pour $t < T$, $s < S'$

Par (7) on a $|Q_{ts}(\pi, \theta_N)| \leqslant \delta(s, t)N^t|f^{(t)}(s)|$. Le disque de centre s et de rayon 1 est tout entier dans le disque $|z| \leqslant 2S'$ et donc les formules de Cauchy donnent $|f^{(t)}(s)| \leqslant (t!)|f|_r$. D'où: $|Q_{ts}(\pi, \theta_N)| \leqslant \delta(s, t)N^t(t!)|f|_r$. Par le lemme 1, $\delta(s, t)$ est plus petit que $\exp(21\, M \log eTN)$. Et (10) permet de conclure que:

$$|Q_{ts}(\pi, \theta_N)| \leqslant \exp\left(-TS\log\left(\frac{R}{4S'}\right) + B_3\right) + |\pi - \xi|\exp(B_4),$$

avec

$$B_3 := B_1 + 21M \log eTN + T \log TN,$$
$$B_4 := B_2 + 21M \log eTN + T \log TN. \tag{11}$$

Il faut maintenant passer à $|Q_{ts}(\xi, \theta_N)|$ ce qui se fait en utilisant l'inégalité triangulaire:

$$|Q_{ts}(\xi, \theta_N)| \leqslant |Q_{ts}(\pi, \theta_N)| + |Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)|,$$

puis le lemme 3 et (6) pour majorer le second terme de droite:

$$\begin{aligned}|Q_{ts}(\pi, \theta_N) - Q_{ts}(\xi, \theta_N)| &\leqslant |\pi - \xi|(2T)L(Q_{ts})16^T \\ &\leqslant |\pi - \xi| \exp(18T \log eK + 62M \log eT(N + S'/M)).\end{aligned}$$

D'où au total:

$$\begin{aligned}|Q_{ts}(\pi, \theta_N)| \leqslant \exp(-TS \log(R/4S') + B_3) &+ |\pi - \xi| \exp(B_4) \\ &+ |\pi - \xi| \exp(18T \log eK + 62M \log eT(N + S'/M))\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$|Q_{ts}(\pi, \theta_N)| \leqslant \exp(-TS \log(R/4S') + B_5) + |\pi - \xi| \exp(B_6) \tag{12}$$

avec

$$B_5 := 9T \log eK + T \log TN + 53M \log eT(N + S/M) + 8KR/N,$$
$$B_6 := TS \log(18S'/S) + T \log TN + 19T \log eK + 83M \log eT(N + S'/M).$$

Ceci termine la phase d'extrapolation.

3.4. *Quatrième pas: le lemme de zéros*

L'objectif est ici de trouver des conditions suffisantes, sur les paramétres, pour que les nombres algébriques $Q_{ts}(\xi, \theta_N)$, $t < T$ et $s < S'$, ne soient pas tous nuls. Il suffit d'utiliser le lemme de zéros détaillé dans [D1], qui est une conséquence simple du résultat général de P. Philippon [P1]. Cela fournit les conditions suffisantes suivantes:

- ($\mathscr{C}3$) $T \geqslant 3$, $S' \geqslant 4$, $N \leqslant [S'/2]$,
- ($\mathscr{C}4$) $TS' \geqslant 24MK$,
- ($\mathscr{C}5$) $TN \geqslant 6K$.

Rappelons que c'est ici qu'intervient le fait que les $P_{km}(\xi, \theta_N)$ ne sont pas tous nuls.

3.5. *Cinquième pas: le théorème de Liouville*

Nous allons utiliser le théorème de Liouville dans la forme suivante:

LEMME 5. [W2, Lemme 2.2]. *Soient $Q \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres algébriques éléments d'un corps de nombres de degré d sur $\mathbb{Q}$. Si $Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est non nul on a:*

$$\log|Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \geqslant -d \log L(Q) - d\left(\sum_{j=1}^{n} h(\alpha_j) \deg_{X_j} Q\right).$$

On prend ici comme corps de nombres $\mathbb{Q}(i, \xi, \theta_N)$, dont le degré a été noté D_N. On choisit un couple $(t, s) \in \mathbb{N}^2$ avec $t < T$, $s < S'$ pour lequel $Q_{ts}(\xi, \theta_N)$ est non nul; on note Q_{1ts}, Q_{2ts} les parties réelle et imaginaire du polynôme Q_{ts}. Une des quantités $Q_{1ts}(\xi, \theta_N)$, $Q_{2ts}(\xi, \theta_N)$ est non nulle et on peut lui appliquer le lemme 5; puisque $h(\theta_N) = 0$ il reste, avec $\varepsilon = 1$ ou 2:

$$\log|Q_{\varepsilon ts}(\xi, \theta_N)| \geqslant -D_N \log L(Q_{\varepsilon ts}) - D_N h(\xi) \deg_{X_1}(Q_{\varepsilon ts}).$$

Comme il est immédiat que $L(Q_{\varepsilon ts}) \leqslant L(Q_{ts})$, $\deg_{X_1}(Q_{\varepsilon ts}) \leqslant \deg_{X_1}(Q_{ts})$ en utilisant (4) et (6) on a:

$$\log|Q_{\varepsilon ts}(\xi, \theta_N)| \geqslant -A \tag{13}$$

avec

$$A = D_N(12T \log eK + 62M \log eT(N + S'/M)) + 2D_N T h(\xi).$$

On peut noter que c'est dans l'expression A qu'apparait la différence essentielle avec la situation du théorème 2 de [D1]; la méthode développée ici a permis de supprimer la quantité $D_N^2(h(\xi) + \log D_N)$ qu'introduisait le théorème de l'élément primitif utilisé. Plus précisément d'ailleurs elle n'a introduit aucun élément parasite!

Comme $Q_{ts}(\xi, \theta_N) = Q_{1ts}(\xi, \theta_N) + iQ_{2ts}(\xi, \theta_N)$, on peut majorer $|Q_{\varepsilon ts}(\xi, \theta_N)|$ à l'aide de (12); en mettant bout à bout la majoration (12) et la minoration (13) il reste:

$$\exp(-A) \leqslant \exp(-TS\log(R/4S') + B_5) + |\pi - \xi| \exp(B_6). \tag{14}$$

On va noter $U := TS\log(R/4S')$ et imposer une dernière série de contraintes, où λ est un nouveau paramètre:

- $(\mathscr{C}6)$ $2B_5 \leqslant U$,
- $(\mathscr{C}7)$ $B_6 \leqslant \lambda U$,
- $(\mathscr{C}8)$ $\log 4 + 2A \leqslant U$.

La relation (14) donne alors la minoration désirée:

$$|\pi - \xi| \geqslant \exp(-(\lambda + 1/2)U). \tag{15}$$

(par $(\mathscr{C}8)$ $2\exp(-U/2) \leqslant \exp(-A)$; par $(\mathscr{C}6)$ $\exp(-TS(\log R/4S') + B_5)$ est majoré par $\exp(-U/2)$; par $(\mathscr{C}7)$ $\exp(B_6)$ est majoré par $\exp(\lambda U)$; alors (14) s'écrit:

$$2\exp(-U/2) \leqslant \exp(-U/2) + |\pi - \xi| \exp(\lambda U)$$

c'est-à-dire $\exp(-(\lambda + 1/2)U) \leqslant |\pi - \xi|$).

3.6. *Conclusion*

Il reste à choisir les paramètres $\lambda, K, M, T, S, S', R$ en fonction de D_N et $h(\xi)$, de façon à satisfaire les contraintes $(\mathscr{C}1)$ à $(\mathscr{C}8)$ et à avoir la meilleure mesure possible. Rappelons les contraintes:

- $(\mathscr{C}1)$ $KM \geqslant 8TS$;
- $(\mathscr{C}2)$ $S' > S$; $R > 4S'$;
- $(\mathscr{C}3)$ $T \geqslant 3$; $S' \geqslant 4$; $N \leqslant [S'/2]$;
- $(\mathscr{C}4)$ $TS' \geqslant 24MK$;
- $(\mathscr{C}5)$ $TN \geqslant 6K$;
- $(\mathscr{C}6)$ $18T\log eK + 2T\log TN + 106M\log eT(N + S/M) + 16KR/N \leqslant U$;
- $(\mathscr{C}7)$ $TS\log(18S'/S) + T\log TN + 19T\log eK$
  $+ 83M\log eT(N + S'/M) \leqslant \lambda U$;
- $(\mathscr{C}8)$ $\log 4 + 2D_N(12T\log eK + 62M\log eT(N + S'/M)) + 4D_N Th(\xi) \leqslant U$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il existe des réels positifs x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 tels que les paramètres suivants vérifient les contraintes ci-dessus

$$T = [x_1 D_N (\log D_N) N^{-1}], \quad K = [x_2 D_N (\log D_N)],$$
$$M = [x_3 D_N (h(\xi) + \log D_N) N^{-1}],$$
$$S = [x_4 D_N (h(\xi) + \log D_N)], \quad S' = [x_5 D_N (h(\xi) + \log D_N)],$$
$$R = 4eS', \quad \lambda = x_6.$$

Rappelons (voir [D1]) que des propriétés de φ on déduit les inégalités suivantes, utiles ici:

$$N \leqslant 7 D_N (\log D_N), \quad \log N \leqslant 5(\log D_N)/2.$$

Il existe alors une constante absolue $x_7 > 0$ telle que (15) s'écrive:

$$\log|\pi - \xi| \geqslant -x_7 \frac{D_N^2}{N} (h(\xi) + \log D_N)(\log D_N).$$

Ceci termine la démonstration du théorème 3. On peut noter que l'on a englobé le cas $N = 1$ dans le théorème 3 mais que cela n'apporte rien; cela redonne la mesure d'approximation de π qui est déjà contenue dans le théorème 2, et qui remonte essentiellement à P. L. Cijsouw [C1].

References

[C1] P. L. Cijsouw, *A transcendence measure for π*, dans "Transcendence Theory and Applications" (A. Baker, D. W. Masser ed.), Academic Press, 1977.

[C2] P. L. Cijsouw, Transcendence measure of exponentials and logarithms of algebraic numbers, *Compositio Math.* 28(2), 1974, 163–178.

[D1] G. Diaz, Sur l'approximation de π par des nombres algébriques particuliers, *Compositio Math.* 74, 1990, 285–298.

[D2] G. Diaz, Grands degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles, *J. Number Theory* 31(1), 1989, 1–23.

[M-W] M. Mignotte, M. Waldschmidt, Linear forms in two logarithms and Schneider's method, *Math. Ann.* 231, 1978, 241–267.

[P1] P. Philippon, Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, *Bull. Soc. Math. France* 114, 1986, 355–383.

[P2] P. Philippon, Polynômes d'interpolation zur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[i]$, dans "Cinquante Ans de Polynômes" (M. Langevin, M. Waldschmidt ed.), Springer 1990.

[W1] M. Waldschmidt, Transcendence measures for exponentials and logarithms, *J. Austral. Math. Soc.* (*series A*) 25, 1978, 445–465.

[W2] M. Waldschmidt, A lower bound for linear forms in logarithms, *Acta Arith.* 37, 1980, 257–283.