GUY DIAZ

# Sur l'approximation de π par des nombres algébriques particuliers

*Compositio Mathematica*, tome 74, n° 3 (1990), p. 285-298

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1990__74_3_285_0>

*Compositio Mathematica* **74**: 285–298, 1990.


# Sur l'approximation de $\pi$ par des nombres algébriques particuliers

GUY DIAZ

*Université de Saint-Etienne, 23, rue du Docteur Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne Cédex 2, France*

Received 6 June 1989; accepted 30 October 1989

**Résumé.** Nous minorons le module de la différence entre $\pi$ et les éléments d'un corps de nombres engendré par une racine de l'unité; ceci améliore un résultat de N.I. Feldman (1973). La même méthode permet de retrouver un résultat de M. Waldschmidt (1978), et comme corollaire la mesure d'approximation de $\pi$ due à P.L. Cijsouw (1977). Cette méthode est de type Gel'fond, avec un lemme de zéros géométrique.

## I. Enoncés des résultats

Etant donné un nombre algébrique $\xi$ on notera $d(\xi)$ son degré, $L(\xi)$ sa longueur, $M(\xi)$ sa mesure de Mahler, $h(\xi)$ sa hauteur logarithmique absolue. Rappelons (voir [11, paragraphe 2] par exemple) que $h(\xi) = \log M(\xi)/d(\xi)$; sachant que $M(\xi) \leqslant L(\xi) \leqslant (\exp d(\xi)).M(\xi)$, on en déduit:

$$h(\xi) \leqslant \frac{\log L(\xi)}{d(\xi)} \leqslant 1 + h(\xi).$$

On se propose de démontrer les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. *Il existe $c_0 > 0$ tel que pour tout entier $N \geqslant 1$ et tout nombre algébrique $\xi$ du corps $\mathbb{Q}(i, \exp(2\pi i/N))$ on ait, en notant $D_N$ le degré de ce corps de nombres*

$$\log|\pi - \xi| \geqslant -c_0 \frac{D_N^2}{N} \cdot (h(\xi) + \log D_N) \cdot \log D_N.$$

En notant $\varphi$ la fonction indicatrice d'Euler, on sait que $\exp(2\pi i/N)$ est algébrique de degré $\varphi(N)$; et avec les notations du théorème 1 on a $\varphi(N) \leqslant D_N \leqslant 2\varphi(N) \leqslant 2N$. Compte-tenu de $D_N \geqslant 2$ on déduit de ce théorème les mesures:

$$\log|\pi - \xi| \geqslant -2c_0 \frac{(D_N \log D_N)^2}{N}\left(1 + \frac{\log L(\xi)}{d(\xi)}\right),$$

$$\log|\pi - \xi| \geqslant -4c_0 D_N (\log D_N)^2 \left(1 + \frac{\log L(\xi)}{d(\xi)}\right).$$

Sous cette forme la comparaison est aisée avec le résultat antérieur de N.I. Feldman [2, Théorème] qui s'écrit, sous les mêmes hypothèses:

$$\log|\pi - \xi| \geqslant -cD_N^2\left(1 + \frac{\log L(\xi)}{d(\xi)}\right).$$

On a donc gagné au moins un facteur $D_N(\log D_N)^{-2}$ par rapport à Feldman. Il serait intéressant de savoir si cette mesure de $\pi$ a un caractère optimal (en un sens à préciser).

Le Théorème 1 portait sur l'approximation de $\pi$ par des nombres algébriques très particuliers; le Théorème 2 a lui un caractère beaucoup plus général.

THÉORÈME 2. *Il existe $c_1 > 0$ tel que pour tout entier $N \geqslant 2$ et tout nombre algébrique $\xi$ on ait, en notant $D_N$ le degré du corps de nombres* $\mathbb{Q}(i, \xi, \exp(2\pi i/N))$

$$\log|\pi - \xi| \geqslant -c_1 D_N^2.(h(\xi) + \log D_N)\cdot\frac{\log D_N}{\log N}.$$

Ce Théorème 2 n'est pas nouveau; il est de même nature qu'un résultat de M. Waldschmidt [10, Théorème 2.5], et moins précis en ce sens que la constante $c_1$ n'est pas explicitée ici. Il faut noter qu'en spécialisant le théorème 2 pour $N = 2$ par exemple et en majorant $D_N$ par $2d(\xi)$ on obtient une mesure d'approximation pour $\pi$:

$$\log|\pi - \xi| \geqslant -c_2 d(\xi)^2.(1 + h(\xi) + \log d(\xi)).(1 + \log d(\xi)).$$

C'est actuellement la meilleure mesure de $\pi$ connue (à la valeur de la constante $c_2$ prêt) et elle est essentiellement due à P.L. Cijsouw [1].

La méthode utilisée est la méthode de Gel'fond, alors que M. Waldschmidt déduit son théorème de ses résultats sur les formes linéaires de logarithmes [11], obtenus par la méthode de Baker. Le lemme de zéros est obtenu à partir du théorème général de P. Philippon [7], et on peut donc penser qu'il fournit les "bonnes contraintes". Les deux démonstrations ne diffèrent que dans le choix final de certains éléments auxiliaires et des paramètres. Enfin contrairement à une habitude répandue en théorie des nombres transcendants, ces démonstrations ne sont pas faites par l'absurde.

## II. Préliminaires

### *(II.1) Polynômes de Feldman*

On note $\Delta_0(z) = 1$, $\Delta_m(z) = (1/m!)(z + 1)\dots(z + m)$ pour $m \in \mathbb{N}$. Le lemme suivant, dû à P. Philippon [6, Théorèmes 2, 3], permet d'estimer croissance et dénominateur des dérivées de ces polynômes $\Delta_m$ pour $z$ variant dans $\mathbb{Q}$. On aurait aussi pu utiliser la variante de ces polynômes introduite par P.L. Cijsouw (voir par exemple [1, Lemme 4]).

LEMME 1.
(a) *Pour* $z \in \mathbb{Q}$, $t \in \mathbb{N}$:

$$\log\left|\frac{1}{t!}\Delta_m^{(t)}(z)\right| \leqslant (m-t)\log\left(1+\frac{|z|}{m}\right)+3m.$$

(b) *On se donne* $z$ *dans* $\mathbb{Q}$, $t$ *et* $m$ *dans* $\mathbb{N}$; *il existe un entier positif* $\delta(z,m,t)$ *dénominateur commun à tous les nombres rationnels* $(1/\tau!)\Delta_\mu^{(\tau)}(z)$ (*où* $\tau, \mu \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mu \leqslant m, 0 \leqslant \tau \leqslant t$) *et tel que l'on ait, en notant den*$(z)$ *le dénominateur de* $z$:

$$\log\delta(z,m,t) \leqslant 21m(1+\log(1+t)+\log \mathrm{den}(z)).$$

*(II.2) Fonction indicatrice d'Euler,* $\varphi$

On sait que pour tout nombre entier $N \geqslant 1$, $\exp(2\pi i/N)$ est un entier algébrique de degré $\varphi(N)$ où $\varphi$ est la fonction indicatrice d'Euler. Cette fonction $\varphi$ vérifie les propriétés suivantes (voir [8] et [5]), où $\gamma$ est la constante d'Euler:

$$\frac{N}{\varphi(N)} \leqslant \exp(\gamma)\log\log N+\frac{2{,}51}{\log\log N} \quad \text{pour } N \geqslant 3$$

$$N < 2{,}685.\varphi(N)^{1{,}161} \qquad \text{pour tout } N.$$

On en déduit immédiatement que pour $N$ entier on a:

$$\begin{aligned} &N \leqslant 16.\varphi(N).\log\log N && \text{pour } N \geqslant 3,\\ &N \leqslant 6{,}5.\varphi(N).\log\log N && \text{pour } N \geqslant 4,\\ &0{,}4\log N \leqslant \log\varphi(N) && \text{pour } N \geqslant 3,\\ &0{,}5\log N \leqslant \log\varphi(N) && \text{pour } N \geqslant 7.\end{aligned}$$

*(II.3) Fonction auxiliaire et polynômes auxiliaires*

On suppose fixés l'entier $N \geqslant 1$ et le nombre algébrique $\xi$. On note alors $\theta_N = \exp(2\pi i/N)$. On se donne de plus un élément $\theta$ du corps de nombres $\mathbb{Q}(\xi, \theta_N, i)$, de degré $D$ sur $\mathbb{Q}$, et deux entiers $K, M$ plus grands que 1. Pour l'instant on ne fait pas d'hypothèse particulière sur $\theta$.

On va travailler avec des polynômes de $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3\ X_4]$ qui seront spécialisés en $(\pi, i, \theta_N, \theta)$ ou $(\xi, i, \theta_N, \theta)$ uniquement.

Supposons avoir choisi une famille $\{P_{km}; 0 \leqslant k < K, 0 \leqslant m < M\}$ de polynômes de $\mathbb{Z}[X_4]$. On lui associe la fonction entière

$$F(z) := \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} P_{km}(\theta) . \Delta_m(z) . \exp(2\pi i k z).$$

Pour tout $t \in \mathbb{N}$ on a ainsi:

$$F^{(t)}(z) = \sum_{k<K} \sum_{m<M} \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} P_{km}(\theta) . \binom{t}{\tau} . \Delta_m^{(\tau)}(z) . (2k\pi i)^{t-\tau} . \exp(2\pi i k z).$$

On va utiliser ces dérivées en les points $s/N$ avec $s \in \mathbb{N}$, tout comme N.I. Feldman [2].

Pour $t, s$ fixés dans $\mathbb{N}$, on note $\delta(s, t)$ le dénominateur $\delta(s/N, M-1, t)$ du Lemme 1; et on s'intéresse aux dérivées de $F$ en $s/N$:

$$\delta(s, t) . F^{(t)}\left(\frac{s}{N}\right) = \sum_{k<K} \sum_{m<M} \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} P_{km}(\theta) \cdot \frac{t!}{(t-\tau)!} \cdot \left(\frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right) . \\ . (2k\pi i)^{t-\tau} . \theta_N^{ks}. \qquad (1)$$

On voit apparaître une expression polynômiale en $\theta, i, \theta_N, \pi$ que l'on va expliciter. On note $n(ks)$ le reste de la division de $ks$ par $N$ et on définit les polynômes $R_{kmts} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$, $Q_{ts} \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]$:

$$R_{kmts}(X_1, X_2, X_3) := \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \cdot \left(\frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right) . (2kX_1X_2)^{t-\tau} . X_3^{n(ks)},$$

$$Q_{ts}(X_1, X_2, X_3, X_4) := \sum_{k<K} \sum_{m<M} P_{km}(X_4) . R_{kmts}(X_1, X_2, X_3).$$

La relation fondamentale (1) s'écrit alors pour tout $(t, s) \in \mathbb{N}^2$:

$$\delta(s, t) . F^{(t)}\left(\frac{s}{N}\right) = Q_{ts}(\pi, i, \theta_N, \theta) \quad \text{(1 bis)}.$$

Il est clair que si les $P_{km}(\theta)$ sont tous nuls la fonction $F$ est identiquement nulle et ne peut donc apporter aucune information. Pour que cela ne se produise pas il suffit d'imposer $\deg(P_{km}) < D$, ce que nous ferrons par la suite; cette condition suffisante est-elle effectivement nécessaire? Peut-être pas, mais comment faire autrement?

Le paragraphe III contient la partie commune aux démonstrations des Théorèmes 1 et 2, qui sont respectivement achevées aux paragraphes IV et V.

## III. Partie commune aux démonstrations des Théorèmes 1 et 2

On se donne dans toute la suite un nombre algébrique $\xi$ et un entier $N \geqslant 1$; on suppose $|\pi - \xi| \leqslant 1$ (sinon le résultat est acquis). On note $\theta_N = \exp(2\pi i/N)$, $D_N = [\mathbb{Q}(\xi, \theta_N, i) : \mathbb{Q}]$. Dans ce paragraphe III on suppose de plus fixé un élément $\theta$ du corps de nombres $\mathbb{Q}(\xi, \theta_N, i)$, de degré noté $D$; cet élément auxiliaire sera choisi différemment dans le Théorème 1 et dans le Théorème 2 (respectivement paragraphe IV et paragraphe V). Enfin, les paramètres de la construction transcendante seront les entiers $K, M, T, S$ et les réels $R, \Delta, U$, tous supposés plus grands que 1.

### *(III.1) Premier pas: la construction*

On va utiliser pour faire cette construction un résultat général de M. Waldschmidt [12, Théorème 3.1] qui permet d'obtenir d'un seul coup la construction et l'extrapolation. L'objectif est de construire une famille de polynômes de $\mathbb{Z}[X_4]$, non tous nuls, de degré strictement plus petit que $D$, $\{P_{km}; 0 \leqslant k < K, 0 \leqslant m < M\}$, telle que la fonction $F$ (cf II-3) soit "petite" sur un certain disque $|z| \leqslant r$; précisément on veut que ce disque contienne chaque point $s/N (s \in \mathbb{N}, 0 \leqslant s < S)$ ainsi que le disque de rayon 1 centré en $s/N$, et on prend donc $r := S/N + 1$.

En notant $P_{km}(X_4) = \sum_{d=0}^{D-1} p_{kmd} \cdot X_4^d$, la fonction $F$ s'écrit:

$$\begin{cases} F(z) = \sum_{k<K} \sum_{m<M} \sum_{d<D} p_{kmd} \cdot \varphi_{kmd}(z) \\ \varphi_{kmd}(z) := \theta^d . \Delta_m(z) . \exp(2\pi i k z). \end{cases}$$

Il faut d'abord estimer $\sum_{k,m,d} |\varphi_{kmd}|_R$ (où l'on note $|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|$ pour la fonction entière $f$). Soit donc $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| = R$. On a: $|\varphi_{kmd}(z)| \leqslant \max(1, |\theta|)^D$. $|\Delta_m(z)| . \exp(|2k\pi z|)$. Comme $|\Delta_m(z)| \leqslant \Delta_m(|z|) \leqslant \Delta_m([|z|] + 1)$ et que cette dernière quantité est le coefficient binômiale $\binom{m+[|z|]+1}{m}$ on peut majorer par $2^{m+1+[|z|]}$; comme $m + 1 \leqslant M, [|z|] \leqslant R$ on a finalement

$$|\varphi_{kmd}|_R \leqslant \max(1, |\theta|)^D . \exp(M + R) . \exp(2K\pi R),$$

et donc

$$\sum_{k,m,d} |\varphi_{kmd}|_R \leqslant \exp(\log D + D \log \max(1, |\theta|) + 9(M + KR)).$$

Pour pouvoir appliquer le résultat de M. Waldschmidt on impose aux paramètres une première famille de contraintes:

- ($\mathscr{C}1$) $3 \leqslant U; \Delta \leqslant U; e \leqslant R/r \leqslant e^U$
- ($\mathscr{C}2$) $\log D + D \log \max(1, |\theta|) + 9(M + KR) \leqslant U$
- ($\mathscr{C}3$) $64U^2 \leqslant K.M.D.\Delta. \log(R/r)$.

Le Théorème 3.1 de [12] permet d'affirmer qu'il existe une famille d'entiers rationnels non tous nuls $\{p_{kmd}; 0 \leqslant k < K, 0 \leqslant m < M, 0 \leqslant d < D\}$ qui, avec les notations antérieures, vérifie:

$$* \ \log \max_{k,m} H(P_{km}) \leqslant \Delta \tag{2}$$

$$* \ |F|_r \leqslant \exp(-U). \tag{3}$$

*Conséquence 1. Majoration de* $|Q_{ts}(\pi, i, \theta_N, \theta)|$.

Soient $t, s$ des entiers avec $0 \leqslant t < T, 0 \leqslant s < S$. Par les formules de Cauchy on a

$$\left|F^{(t)}\left(\frac{s}{N}\right)\right| \leqslant t!\,|F|_r \leqslant T^T.\exp(-U).$$

Le Lemme 1 permet de dire que $\log \delta(s, t)$ est majoré par $21M \log(eTN)$; et donc la relation fondamentale (1bis) donne

$$|Q_{ts}(\pi, i, \theta_N, \theta)| \leqslant \exp(-U + T \log T + 21M \log(eTN)). \tag{4}$$

*Majoration de la longueur des polynômes* $Q_{ts}(t < T, s < S)$

Rappelons que $Q_{ts}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{k<K} \sum_{m<M} P_{km}(X_4).R_{kmts}(X_1, X_2, X_3)$. En notant $L(P)$ la longueur du polynôme $P$ (somme des modules de ses coefficients) il est immédiat que

$$L(Q_{ts}) \leqslant \sum_{k<K} \sum_{m<M} L(P_{km}).L(R_{kmts}).$$

En tenant compte de (2), $L(P_{km})$ est majoré par $D \exp(\Delta)$. En revenant à la définition de $R_{kmts}$ on a

$$L(R_{kmts}) \leqslant \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left| \frac{\delta(s, t)}{\tau!} \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right| .(2k)^{t-\tau}.$$

On a $t!/(t-\tau)! \leqslant t^{\tau} < T^M$, et en utilisant le Lemme 1

$$\log\left|\frac{\delta(s,t)}{\tau!}\,\Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right| \leqslant 21M\log(eTN) + 3M + M\log\left(1+\frac{S}{NM}\right).$$

D'où finalement pour $t < T, s < S$:

$$\begin{cases} L(R_{kmts}) \leqslant \exp(T\log eK + 26M\log eTN(1+S/NM)) \\ L(Q_{ts}) \leqslant \exp(\log D + \Delta + 2T\log eK + 27M\log eTN(1+S/NM)). \end{cases} \tag{5}$$

*Conséquence 2. Majoration de $|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)|$ $(t < T, s < S)$*

En revenant à la définition de $Q_{ts}$

$$\begin{aligned} Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta) &= \sum_{k,m} P_{km}(\theta).R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) \\ &= \sum_{k,m} P_{km}(\theta).R_{kmts}(\pi, i, \theta_N) + \sum_{k,m} P_{km}(\theta).(R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) - \\ &\quad - R_{kmts}(\pi, i, \theta_N)) \\ &= Q_{ts}(\pi, i, \theta_N, \theta) + \sum_{k,m} P_{km}(\theta).(R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) - \\ &\quad - R_{kmts}(\pi, i, \theta_N)). \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} |Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)| \leqslant |Q_{ts}(\pi, i, \theta_N, \theta)| + \sum_{k,m} |P_{km}(\theta)|.|R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) - \\ - R_{kmts}(\pi, i, \theta_N)|. \end{aligned}$$

On a majoré le premier terme à droite, en (4). Pour majorer le second on utilise le lemme suivant

LEMME 2 [3, Lemme 3]. *Soient $R \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ et $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbb{C}^3$.*

*En posant $A_j = \max(1, |x_j|, |y_j|)$, et en notant $d_j$ le degré en $X_j$ de $R$ on a*

$$|R(x_1, x_2, x_3) - R(y_1, y_2, y_3)| \leqslant 3\max_j |x_j - y_j|.L(R).\prod_{j=1}^{3}(d_j.A_j^{d_j}).$$

En notant que pour $t < T$ les degrés partiels de $R_{kmts}$ sont majorés strictement par $T, T, N$ respectivement et en tenant compte de (5) et de l'hypothèse $|\pi - \xi| \leqslant 1$, ce lemme donne

$$\begin{aligned}
&|R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) - R_{kmts}(\pi, i, \theta_N)| \\
&\quad \leqslant 3|\pi - \xi| . L(R_{kmts}).(T^2N).\max(\pi, |\xi|)^T \\
&\quad \leqslant 3|\pi - \xi| .(1 + \pi)^T.(T^2N).\exp(T \log eK + 26M \log eTN(1 + S/NM)) \\
&\quad \leqslant |\pi - \xi| \exp(6T \log eK + 27M \log eTN(1 + S/NM)).
\end{aligned}$$

D'autre part grace à (2) on a $|P_{km}(\theta)| \leqslant D \exp(\Delta).\max(1, |\theta|)^D$. D'où

$$\begin{aligned}
&\sum_{k<K} \sum_{m<M} |P_{km}(\theta)|.|R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) - R_{kmts}(\pi, i, \theta_N)| \\
&\quad \leqslant |\pi - \xi|.\exp(\Delta + \log D + D \log \max(1, |\theta|) + 7T \log eK \\
&+ 28M \log eTN(1 + S/NM)).
\end{aligned}$$

Au total en tenant compte de (4) on a ainsi obtenu la majoration désirée:

$$\begin{aligned}
&|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)| \leqslant \exp(-U + T \log\ T + 21M \log eTN) \\
&\quad + |\pi - \xi|.\exp(\Delta + \log D + D \log \max(1, |\theta|) + 7T \log eK + \\
&\quad + 28M \log eTN(1 + S/NM)). \qquad (6)
\end{aligned}$$

Ceci termine le premier pas.

*(III.2) Second pas – Le lemme de zéros*

L'objectif est ici de trouver des conditions suffisantes, portant sur les paramètres, permettant d'affirmer que les nombres algébriques $Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)(0 \leqslant t < T, 0 \leqslant s < S)$ ne sont pas tous nuls. On va, en utilisant le lemme de zéros général de P. Philippon [7], démontrer le lemme suivant

*Lemme* 3. *Dès que les paramètres vérifient les contraintes*

- ($\mathscr{C}4$) $T \geqslant 3; S \geqslant 4; N \leqslant [S/2]$
- ($\mathscr{C}5$) $TS \geqslant 24MK$
- ($\mathscr{C}6$) $TN \geqslant 6K$

*un des nombres* $Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)\,(0 \leqslant t < T, 0 \leqslant s < S)$ *est non nul.*

Le reste de ce second pas est consacré à la démonstration de ce lemme. On suppose que ($\mathscr{C}4$) est vérifiée et que les $Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)$ sont nuls pour tous les couples $(t, s)$ avec $0 \leqslant t < T, 0 \leqslant s < S$. Et on va montrer que l'on a soit $TS < 24MK$, soit $TN < 6K$.

Soit $P(Y_1, Y_2) := \sum_{k<K} \sum_{m<M} P_{km}(\theta) . \Delta_m(Y_1) . Y_2^k$; puisque par construction les $P_{km}(\theta)$ ne sont pas tous nuls ce polynôme n'est pas nul. Introduisons maintenant les acteurs géométriques; on notera $\mathbf{G}_a$ le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$, $\mathbf{G}_m$ le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$ et:

* $(G, +)$ est le groupe algébrique $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m$, $\exp_G$ son exponentielle;
* $\varphi : \mathbb{C} \to G(\mathbb{C})$ est donnée par $\varphi(z) := \exp_G(z, 2i\xi z) = (z, \exp(2i\xi z))$;
* $\mathscr{L} : \mathbb{C} \to T_G(\mathbb{C})$ est l'application linéaire $\mathscr{L}(z) := z(1, 2i\xi)$;
* on voit que $\varphi = \exp_G \circ \mathscr{L}$; on pose $W := \operatorname{Im}(\mathscr{L})$, $A := \operatorname{Im}(\varphi) = \exp_G(W)$;
* pour $s \in \mathbb{N}$, $g_s$ est le point $\exp_G\left(\frac{s}{N}, \frac{2i\pi s}{N}\right)$ ie $\left(\frac{s}{N}, \theta_N^s\right)$.

Soit $s$ un entier, $0 \leqslant s < S$; on lui associe la fonction entière $\phi_s(z) := P(g_s + \varphi(z))$.

Montrons que pour tout entier $t$ on a:

$$\delta(s, t) . \phi_s^{(t)}(o) = Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta).$$

C'est un vérification sans problème:

$$\phi_s(z) = \sum_{k,m} P_{km}(\theta) . \Delta_m\left(\frac{s}{N} + z\right) . \theta_N^{ks} . \exp(2ki\xi z)$$

$$\phi_s^{(t)}(z) = \sum_{k,m} \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} P_{km}(\theta) . \binom{t}{\tau} . \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N} + z\right) . \theta_N^{ks} . (2ki\xi)^{t-\tau} . \exp(2ki\xi z)$$

$$\phi_s^{(t)}(0) = \sum_{k,m} \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} P_{km}(\theta) . \binom{t}{\tau} . \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right) . \theta_N^{ks} . (2ki\xi)^{t-\tau}$$

$$\delta(s, t) . \phi_s^{(t)}(0) = \sum_{k,m} P_{km}(\theta) \left( \sum_{\tau=0}^{\min(m,t)} \frac{t!}{(t-\tau)!} \left( \frac{\delta(s, t)}{\tau!} . \Delta_m^{(\tau)}\left(\frac{s}{N}\right)\right) . \theta_N^{n(ks)} . (2ki\xi)^{t-\tau} \right)$$

c'est-à-dire $\delta(s, t) . \phi_s^{(t)}(0) = \sum_{k,m} P_{km}(\theta) . R_{kmts}(\xi, i, \theta_N) = Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)$.

L'hypothèse que les $Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)$ sont nuls permet de dire que $\phi_s$ admet 0 comme zéro d'ordre supérieur ou égal à $T$, ce qui veut dire dans le langage de P. Philippon que le polynôme $P$ s'annule le long de $\varphi$ à un ordre supérieur ou égal à $T$ en tout point $g_s$, $0 \leqslant s < S$. Soit $T'$ l'entier vérifiant $2T' + 1 \leqslant T < 2T' + 3$ et $\Sigma := \{g_s; 0 \leqslant s < [S/2]\}$; on a alors $\Sigma(2) \subset \{g_s; 0 \leqslant s < S\}$, où $\Sigma(2)$ est constituée de toutes les sommes de deux éléments de $\Sigma$. Ainsi le polynôme $P$ s'annule le long de $\varphi$ à un ordre supérieur ou égal à $(2T' + 1)$ en tout point de $\Sigma(2)$; par le lemme de zéros de P. Philippon [7, Théorème 2.1] il existe un sous-groupe algébrique connexe $H$ de $G$, distinct de $G$ (donc de l'une des formes $\{0\} \times \mathbf{G}_m$, $\{0\} \times \{1\}, \mathbf{G}_a \times \{1\}$), tel que:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} T' + \operatorname{codim}_A(A \cap H) \\ \operatorname{codim}_A(A \cap H) \end{pmatrix} . \operatorname{card}(\Sigma + H/H) \leqslant 2 . M^{r_0} . K^{r_1} \\ \text{où } H = H_a \times H_m, \quad r_0 = \dim(\mathbf{G}_a/H_a), \quad r_1 = \dim(\mathbf{G}_m/H_m). \end{cases} \qquad (*)$$

Rappelons que $\operatorname{codim}_A (A \cap H) = \operatorname{codim}_W (W \cap T_H(\mathbb{C})) = 1 - \dim(W \cap T_H(\mathbb{C}))$. On distingue maintenant trois cas suivant la forme de $H$.

*Cas* 1. *H est réduit à l'élément neutre*

On a alors $r_0 = r_1 = 1$, $\operatorname{codim}_A(A \cap H) = 1$, $\operatorname{card}(\Sigma + H/H) = \operatorname{card} \Sigma = [S/2]$. Donc $(*)$ donne $(T' + 1)$. $[S/2] \leqslant 2MK$. Grâce à ($\mathscr{C}$4) on a $(1 + T') > T/3$, $[S/2] \geqslant S/4$, ce qui donne $TS < 24MK$.

*Cas 2.* $H = \{0\} \times G_m$

Alors $T_H(\mathbb{C}) = \{0\} \times \mathbb{C}$ et donc $W \cap T_H(\mathbb{C}) = \{0\}$, $\operatorname{codim}_A(A \cap H) = 1$; de plus $r_0 = 1, r_1 = 0$. Deux éléments de $\sum$ sont congrus modulo $H$ si et seulement si ils coïncident, et donc card $(\sum + H/H) = \operatorname{card} \sum = [S/2]$. Alors $(*)$ donne $(T' + 1)$. $[S/2] \leqslant 2M$ et a fortiori $TS < 24MK$.

*Cas 3.* $H = G_a \times \{1\}$

Comme on a supposé $|\pi - \xi| \leqslant 1$, $\xi$ est non nul et donc $W \cap T_H(\mathbb{C}) = \{0\}$ (puisque $T_H(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \times \{0\}$, $W = \mathbb{C}(1, 2i\xi)$). On a donc $\operatorname{codim}_A(A \cap H) = 1, r_0 = 0, r_1 = 1$. Soient $g_{s_1}, g_{s_2}$ deux éléments de $\Sigma$ congrus modulo $H$; $g_{s_1} - g_{s_2}$ est dans H, ce qui donne sur la deuxième composante: $\theta_N^{s_1 - s_2} = 1$; si on suppose $0 \leqslant s_1, s_2 < N$ ceci implique $s_1 = s_2$. Comme on a supposé $N \leqslant [S/2]$ les points $g_0, g_1, \dots g_{N-1}$ sont dans $\sum$ et distincts modulo $H$ par ce qui précède; on peut donc minorer $\operatorname{card}(\Sigma + H/H)$ par $N$. Alors $(*)$ donne $(T' + 1) . N \leqslant 2K$, et en minorant $(T' + 1)$ par $T/3$ il vient $T . N \leqslant 6K$.

On a bien montré que soit $TS < 24MK$, soit $TN < 6K$. Ceci termine le second pas.

*(III.3) Troisième pas – Minoration de* $|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)|$ *et bilan.*

On fixe un couple $(t, s)$, avec $0 \leqslant t < T$, $0 \leqslant s < S$, pour lequel $Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)$ soit non nul. On sait minorer le module de ce nombre algébrique à l'aide du théorème de Liouville suivant.

LEMME 4 [11 – Lemme 2.2]. *Soit $Q \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des nombres algébriques d'un corps de nombres de degré d. Si $Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est non nul, alors:*

$$\log|Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \geqslant -d.\log L(Q) - d \sum_{j=1}^{n} (\deg_{X_j} Q.h(\alpha_j)).$$

En prenant $\mathbb{Q}(\xi, i, \theta_N)$ comme corps de nombres, corps dont le degré est $D_N$, et en notant que $h(i) = h(\theta_N) = 0$ ce lemme donne ici:

$$\log|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)| \geqslant -D_N.\log L(Q_{ts}) - D_N.\deg_{X_1} Q_{ts}.h(\xi) - D_N.\deg_{X_4} Q_{ts}.h(\theta).$$

En tenant compte de $\deg_{X_1} Q_{ts} < T$, $\deg_{X_4} Q_{ts} < D$ et de la majoration (5) de $L(Q_{ts})$ ceci s'écrit:

$$\begin{cases} \quad \log|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)| \geqslant -A \\ \text{où} \quad A := D_N(\log D + \Delta + 2T\log eK + 27M\log eTN(1 + S/NM)) + \\ \qquad\qquad + D_N(T.h(\xi) + D.h(\theta)). \end{cases} \tag{7}$$

En rapprochant la majoration (6) et la minoration (7) de $|Q_{ts}(\xi, i, \theta_N, \theta)|$ on obtient l'inégalité qui va nous permettre de conclure:

$$\begin{aligned} \exp(-A) \leqslant \exp(&-U + T\log T + 21M\log eTN) + \\ &+ |\pi - \xi|.\exp(\Delta + \log D + D\log\max(1, |\theta|) + 7T\log eK + \\ &+ 28M\log eTN(1 + S/N\,M)). \end{aligned}$$

On impose alors les trois dernières contraintes

- $(\mathscr{C}7)$ $2(T\log T + 21M\log eTN) \leqslant U$
- $(\mathscr{C}8)$ $\log 4 + 2A \leqslant U$
- $(\mathscr{C}9)$ $\Delta + \log D + D\log\max(1, |\theta|) + 7T\log eK$
  $+ 28\,M\log eTN(1 + S/NM) \leqslant U.$

Ce qui permet d'obtenir la minoration cherchée:

$$|\pi - \xi| \geqslant \exp(-3U/2). \tag{8}$$

Ici se termine la partie commune aux théorèmes 1 et 2, et on va conclure les démonstrations séparément.

## IV. Fin de la démonstration du Théorème 1

On suppose donc maintenant que $\xi$ est dans $\mathbf{Q}(i, \theta_N)$, si bien que $D_N$ est simplement égal à $[\mathbf{Q}(i, \theta_N) : \mathbf{Q}]$. En conséquence on a $\max(2; \varphi(N)) \leqslant D_N \leqslant 2\varphi(N) \leqslant 2N$. On suppose simplement $N \geqslant 1$; les propriétés de $\varphi$ rappelées au paragraphe II-2 permettent de vérifier qu'alors:

$$0{,}4 \log N \leqslant \log D_N, \quad N \leqslant 7.D_N.\log D_N.$$

On applique la construction du paragraphe III au couple $(\theta, D) = (\theta_N, \varphi(N))$; les contraintes qui dépendent de $\theta$ s'écrivent:

- ($\mathscr{C}2$) $\log \varphi(N) + 9(M + KR) \leqslant U$
- ($\mathscr{C}3$) $64U^2 \leqslant K.M.\varphi(N).\Delta.\log(R/r)$
- ($\mathscr{C}9$) $\Delta + \log \varphi(N) + 7T \log eK + 28M \log eTN(1 + S/NM) \leqslant U.$

De plus en tenant compte de $h(\theta) = 0$, $A$ s'écrit:

$$A = D_N(\log \varphi(N) + \Delta + 2T \log eK + 27\, M\, log\, eTN(1 + S/N\, M)) + D_N.T.h(\xi).$$

Il reste alors à choisir (au mieux) les paramètres en fonction de $N, h(\xi), D_N$. On prend ici:

$$T := \left[ x^{3,5}.\frac{D_N}{N}.\log D_N \right]; \quad K := [x^{1,5}.D_N.\log D_N];$$

$$S := [x^2.D_N.(h(\xi) + \log D_N)]; \quad M := \left[ x^{3,5}.\frac{D_N}{N}.(h(\xi) + \log D_N) \right];$$

$$R := x^{2,5}.\frac{D_N}{N}.(h(\xi) + \log D_N); \quad \Delta := \tfrac{1}{2}x^{4.5}.\frac{D_N}{N}.(h(\xi) + \log D_N).\log D_N;$$

$$U := x^{4,5}.\frac{D_N^2}{N}.(h(\xi) + \log D_N).\log D_N.$$

En choisissant la constante $x$ assez grande on vérifie que les contraintes ($\mathscr{C}1$) à ($\mathscr{C}9$) sont satisfaites; (8) donne alors la mesure annoncée, ce qui termine la démonstration du Théorème 1.

Une estimation assez grossière donne pour la constante $c_0$ de ce théorème un ordre de grandeur de $10^{23}$, alors que M. Waldschmidt a $2^{40}$; il semble possible cependant d'abaisser nettement cette valeur.

## V. Fin de la démonstration du théorème 2

On va prendre ici pour $\theta$ un élément primitif du corps de nombres $\mathbf{Q}(i, \xi, \theta_N)$, et donc on aura $D = D_N$. Comme on a besoin d'estimer $h(\theta)$ il faut un choix effectif; on utilise pour cela [5, Lemme 3] qui permet d'affirmer qu'il existe un élément primitif de la forme $\theta = \xi + \alpha\theta_N + \beta i$, $\alpha, \beta$ entiers et $0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant D_N^2/2$. Les propriétés de la hauteur logarithmique absolue $h$ (cf[11] par exemple) permettent de vérifier qu'alors $h(\theta) \leqslant h(\xi) + 4 \log D_N$. On suppose $N \geqslant 2$ dans la suite; en utilisant l'hypothèse $|\pi - \xi| \leqslant 1$ et le fait que $D_N$ est plus grand que 2 on a alors: $|\theta| \leqslant 3D_N^2 \leqslant D_N^4$; et on vérifie que $4 \log N \leqslant 10 \log D_N$, $N \leqslant 7D_N \log D_N$.

Ceci permet de réécrire les contraintes qui dépendaient du couple $(\theta, D)$ dans la construction générale du paragraphe III:

- ($\mathscr{C}2$) $9(D_N \log D_N + M + KR) \leqslant U$
- ($\mathscr{C}3$) $64U^2 \leqslant K.M.D_N.\Delta.\log(R/r)$
- ($\mathscr{C}9$) $\Delta + 8D_N \log D_N + 7T \log eK + 28M \log eTN(1 + S/NM) \leqslant U.$

Et l'expression de $A$ est ici:

$$\begin{aligned} A = {} & D_N(\log D_N + \Delta + 2T \log eK + 27M \log eTN(1 + S/NM)) \\ & + D_N.T.h(\xi) + D_N^2.h(\xi) + 4D_N^2.\log D_N. \end{aligned}$$

On peut alors trouver une constante positive $x$ telle que les paramètres suivants satisfassent les 9 contraintes ($\mathscr{C}1$) à ($\mathscr{C}9$), quel que soit $N$ plus grand que 2 (vérification laissée au lecteur):

$$T := \left[ x^{3,5}.\frac{D_N \log D_N}{\log N} \right]; \quad K := \left[ x^{1.5}.D_N.\log D_N \right];$$

$$S := [x^2.D_N(h(\xi) + \log D_N)]; \quad M := \left[ x^{3,5}.\frac{D_N(h(\xi) + \log D_N)}{\log N} \right];$$

$$R := x^{2,5}.\frac{D_N(h(\xi) + \log D_N)}{\log N}; \quad \Delta := \tfrac{1}{5}x^{4,5}.D_N(h(\xi) + \log D_N)\frac{\log D_N}{\log N};$$

$$U := x^{4,5}.D_N^2(h(\xi) + \log D_N)\frac{\log D_N}{\log N}.$$

Compte-tenu de (8) cela fournit la mesure annoncée dans le Théorème 2. Notons que la qualité de la mesure finale est pratiquement donnée par l'expression $A$: celle-ci montre qu'il y aura nécessairement du $D_N^2(h(\xi) + \log D_N)$! Dans la mesure finale on a seulement ajouté le facteur $\log D_N/\log N$.

## References

[1] Cijsouw, P. L., A transcendence measure for $\pi$, *in "Transcendence Theory: Advances and Applications" (edited by A. Baker, D. W. Masser)*, Academic Press, 1977, 93–100.
[2] Feldman, N. I., Approximation of number $\pi$ by algebraic numbers from special fields. *J. Number Theory 9 (1977) 48–60.*
[3] Mignotte, M. et Waldschmidt, M., Approximation des valeurs de fonctions transcendantes. *Indag. Math. 37(1975) 213–223.*
[4] Mignotte, M. et Waldschmidt, M., Approximation simultanée de valeurs de la fonction exponentielle. *Compositio Math. 34 (1977) 127–139.*
[5] Mignotte, M. et Waldschmidt, M.: Linear forms in two logarithms and Schneider's method III. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (à paraître).
[6] Philippon, P., Polynôme d'interpolation sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[i]$. *Actes du colloque A. Durand (I.H.P. 1988)* (à paraître).
[7] Philippon, P., Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Bull. Soc. Math. France 114(1986) 355–383.*
[8] Rosser, J. B. et Schoenfeld, L., Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$, $\varphi(x)$. *Math. Comp. 29(1975) 243–269.*
[9] Waldschmidt, M., *Nombres transcendants.* Lecture Notes in Math. 402, Springer, 1974.
[10] Waldschmidt, M., Transcendence measures for exponentials and logarithms. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 25(1978)445–465.*
[11] Waldschmidt, M., A lower bound for linear forms in logarithms. *Acta Arith. 37(1980) 257–283.*
[12] Waldschmidt, M., Transcendance et exponentielles en plusieurs variables. *Invent. Math. 63 (1981) 97–127.*