COMPOSITIO MATHEMATICA

LUIS NARVÁEZ-MACARRO

Cycles évanescents et faisceaux pervers : cas des courbes planes irréductibles

Compositio Mathematica, tome 65, n° 3 (1988), p. 321-347

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1988__65_3_321_0>

Compositio Mathematica 65: 321–347 (1988)

Cycles évanescents et faisceaux pervers: cas des courbes planes irreductibles

LUIS NARVÁEZ-MACARRO
Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, Tarfia s/n, 41012 Sevilla, Spain

Received 18 February 1987; accepted in revised form 2 September 1987

Introduction

Soit $(C, 0)$ le germe d'une courbe plane complexe irréductible et $f = 0$ une équation locale. Considérons un système local d'espaces vectoriels complexes de dimension finie $\mathscr{L}$ dans le complémentaire de C. Le complexe des cycles proches ([S.G.A. 7, exp. XIII, XIV]) $\mathbb{R}\psi_f(\mathscr{L})$ est un faisceau pervers sur C (cf. [GO-MA 2], [LÊ-ME], [BRY 2]; voir aussi remarque (2.2.4)) (Voir (2.2), pour la définition des faisceaux pervers et la relation avec les $\mathscr{D}$-modules holonomes réguliers). Comme $(C, 0)$ est topologiquement un disque, $\mathbb{R}\psi_f(\mathscr{L})$ admet une représentation algébrique $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$, où E, F sont $\mathbb{C}$-vectoriels de dimension finie et $Id_D + v \circ u$ est un automorphisme ([DEL], [G-G-M]). Notons ε la représentation du groupe fondamental local du complémentaire de C associée à $\mathscr{L}$. Le résultat principal de ce travail (th. (3.2.1)) calcule le diagramme $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$ en fonction de ε, ainsi que l'automorphisme du diagramme correspondant à la monodromie $\mathbf{T}(\mathscr{L})$. Comme corollaire de ce résultat et de la théorie générale de recollement des faisceaux pervers ([DEL], [MA-VI 1, 2], [VER]), on obtient une description explicite des germes de faisceaux pervers dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ stratifiés par rapport à C (th. (3.2.2)). On obtient aussi le cycle caractéristique du complexe d'intersection $IC(\mathscr{L})$ ([GO-MA 1]) à partir de ε (Cor. (3.2.6)).

Dans le §1 on décompose le groupe fondamental local du complémentaire de C, comme produit semi-direct de celui de la fibre de Milnor et de celui de la base. On rappelle le procédé décrit dans [S.G.A. 7, exp. XIV], qui reconstruit un représentant de Milnor de f à partir de la fibre de Milnor et de la monodromie géométrique.

Dans le §2 on explique comment la construction précédente ramène, pour l'essentiel, le calcul de $\mathbb{R}\psi_f$ et de $\mathbf{T}$ à un calcul d'images directes. Ceci est implicite dans [S.G.A. 7], mais nous l'explicitons ici (voir remarque (2.1.6.8)). Le §2 se termine avec la définition des faisceaux pervers et la théorie de recollement.

Dans le §3 on énonce et on démontre les résultats principaux de ce travail. Ces résultats ont été annoncés dans [NAR 2]. Une version préliminaire a été publiée dans [NAR 1].

Les travaux [G-G-M], [G-M], [MAI 1], [MA-VI 3], [GE-KH] contiennent des résultats similaires à l'équivalence de catégories du th. (3.2.2). Les travaux [MA-VI 1, 2] contiennent la théorie générale de recollement des faisceaux pervers, qui est à la base de ce travail. Nous utilisons ces résultats sous la forme développée dans [VER].

§1. Préliminaires topologiques

(1.1) *Invariants homotopiques associés à un germe de courbe plane irréductible*

(1.1.1) Soit $\not{f}:(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une fonction analytique irréductible. D'après le théorème de fibration de Milnor [MI], il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que la sphère $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^2; |x| = \varepsilon\}$ coupe transversalement toutes les fibres $f^{-1}(t)$ pour $t \in D_{\eta_\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < \eta_\varepsilon\}$, où f est un représentant de $\not{f}$ défini dans un voisinage de $B_{\varepsilon_0} = \{x \in \mathbb{C}^2; |x| \leqslant \varepsilon_0\}$.

Etant donné $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et $\eta \in (0, \eta_\varepsilon]$, posons $X_{\varepsilon,\eta} = \mathring{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$. Si ε, ε' sont deux réels tels que $0 < \varepsilon' < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et $0 < \eta < \inf(\eta_{\varepsilon'}, \eta_\varepsilon)$, on a:

a) La restriction de f à $X^*_{\varepsilon,\eta} = X_{\varepsilon,\eta} \backslash f^{-1}(0)$ est une fibration (C^∞) localement triviale sur $D^*_\eta = D_\eta \backslash \{0\}$.

b) La restriction de f à $X_{\varepsilon,\eta} \backslash X_{\varepsilon',\eta}$ est une fibration (C^∞) triviale sur D_η.

Choisissons une fois pour toutes trois réels ε, ε', η comme ci-dessus et posons: $D = D_\eta$, $X = X_{\varepsilon,\eta}$, $X' = X_{\varepsilon',\eta}$, $X^\partial = X \backslash X'$, $X^* = X^*_{\varepsilon,\eta}$, $X^{*\partial} = X^* \cap X^\partial$. Notons aussi f la restriction de f à X et $X_t = f^{-1}(t)$, $X^\partial_t = X_t \cap X^\partial$.

Le type topologique de $f:(X', X) \to D$ est indépendant du choix de ε', ε, η et c'est donc un invariant du germe $\not{f}$.

Rappelons que les fibres de la fibration $f: X^* \to D^*$ sont des tores de genre μ = nombre de Milnor de $\not{f}$, privés d'un disque fermé. De même, les fibres de $f: X^\partial \to D$ sont des couronnes fermées-ouvertes.

Choisissons des points de base $x_0 \in X^\partial_0$, $x_1 \in X^{*\partial}$ et $t_0 = f(x_1)$. On considère les suites exactes d'homotopie des fibrations $f: X^* \to D^*$ et $f: X^{*\partial} \to D^*$:

$$1 \to L = \pi_1(X_{t_0}, x_1) \to G = \pi_1(X^*, x_1) \to \pi_1(D^*, t_0) \to 1 \qquad (1.1.1.1)$$

$$1 \to L^\partial = \pi_1(X^\partial_{t_0}, x_1) \to G^\partial = \pi_1(X^{*\partial}, x_1) \to \pi_1(D^*, t_0) \to 1 \qquad (1.1.1.2)$$

où L est un groupe libre de rang μ et L^∂ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Comme X et D sont munis de l'orientation complexe, nous pouvons parler des générateurs 'positifs' de $\pi_1(D^*, t_0)$ et de L^∂, que l'on notera δ et γ respectivement. Notons que la suite exacte (1.1.1.2) s'injecte de façon naturelle dans la suite exacte (1.1.1.1).

Nous nous proposons de montrer que la suite (1.1.1.1) admet une scission canonique qui nous fournit une décomposition de G comme produit sémidirect de L et $\pi_1(D^*, t_0)$.

(1.1.2) Comme $f: X^\partial \to D$ est une fibration triviale, l'injection $L^\partial \to \pi_1(X^\partial, x_1)$ est un isomorphisme. Ceci nous donne une rétraction de l'inclusion $L^\partial \to G^\partial$. Soit σ: $\pi_1(D^*, t_0) \to G^\partial$ la section associée dans (1.1.1.2).

A partir d'une trivialisation $\mathscr{T}$: $X_{t_0}^\partial \times D \to X^\partial$ de f: $X^\partial \to D$ qui soit l'identité sur $X_{t_0}^\partial$ on peut construire un difféomorphisme caractéristique $T_{\mathscr{T}}$: $X_{t_0} \to X_{t_0}$ de f: $X^* \to D^*$ qui soit l'identité sur $X_{t_0}^\partial$ (cf. [S.G.A. 7, exp. XIV]). Ce difféomorphisme est unique modulo isotopies laissant invariant le bord $X_{t_0}^\partial$. De façon précise, on a une application:

$$v_{\mathscr{T}}: \pi_1(D^*, t_0) \to \pi_0(\mathrm{Aut}\,(X_{t_0}; X_{t_0}^\partial))$$

qui induit un homomorphisme de groupes:

$$\varrho: \pi_1(D^*, t_0) \to \mathrm{Aut}\,(L; L^\partial).$$

Cet homomophisme ne dépend pas de la trivialisation $\mathscr{T}$, car la composition de $v_{\mathscr{T}}$ avec le morphisme naturel $\pi_0(\mathrm{Aut}\,(X_{t_0}; X_{t_0}^\partial)) \to \pi_0(\mathrm{Aut}\,(X_{t_0}))$ est indépendant de $\mathscr{T}$.

PROPOSITION (1.1.3) *Pour chaque* $\alpha \in \pi_1(D^*, t_0)$ *et* $\beta \in L$ *on a:*

$$\varrho(\alpha)(\beta) = \sigma(\alpha) \cdot \beta \cdot \sigma(\alpha)^{-1}.$$

Preuve. Il suffit de montrer le résultat pour $\alpha = \delta$. Soit $\tilde{f}$: $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^\partial) \to I = [0, 1]$ l'image inverse par δ: $I \to D^*$ des fibrations f: $(X^*, X^{*\partial}) \to D^*$ et p: $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^\partial) \to (X^*, X^{*\partial})$ la projection canonique. Posons $\mathfrak{X}_0 = \tilde{f}^{-1}(0)\ (\equiv X_{t_0})$, $\mathfrak{X}_0^\partial = \mathfrak{X}_0 \cap \mathfrak{X}^\partial\ (\equiv X_{t_0}^\partial)$ et soit $\mathscr{T}'$: $(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_0^\partial) \times I \to (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^\partial)$ une trivialisation de $\tilde{f}$ prolongéant $\mathscr{T}$ qui soit l'identité sur $\mathfrak{X}_0$, c'est à dire:

$$\mathscr{T}'(x, 0) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{X}_0$$

$$p(\mathscr{T}'(x, \tau)) = \mathscr{T}(x, \delta(\tau)) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{X}_0^\partial,\ \tau \in I.$$

Considérons le chemin:

$$\xi: \tau \in I \mapsto \mathscr{T}'(x_1, \tau) \in \mathfrak{X}^\partial \subset \mathfrak{X}.$$

Il est clair que $p_*(\xi) = \sigma(\delta)$ et d'après la construction de $T = T_{\mathscr{T}}$ on a:

$$\xi \cdot \beta \cdot \xi^{-1} \text{ homotope à } T_*(\beta) \text{ (dans } \mathfrak{X}) \text{ pour tout } \beta \in L \equiv \pi_1(\mathfrak{X}_0)$$

d'où:

$$\sigma(\delta) \cdot \beta \cdot \sigma(\delta)^{-1} = \varrho(\delta)(\beta) \text{ pour tout } \beta \in L.$$

COROLLAIRE (1.1.4). *Le groupe G admet une décomposition canonique comme produit sémi-direct*:

$$G \simeq L \rtimes_\varrho \pi_1(D^*, t_0). \tag{1.1.4.1}$$

(1.1.5) *Résumé*. On est parti d'un germe $\not{f}: (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ et on a choisi des représentants de Milnor f: $(X', X) \to D$ de $\not{f}$ et des points de base x_0, x_1, t_0. Ceci nous a fourni les invariants:

$$L = \pi_1(X_{t_0}, x_1),\ L^\partial = \pi_1(X^\partial_{t_0}, x_1) = \langle\gamma\rangle \hookrightarrow L,$$

$$\varrho: \pi_1(D^*, t_0) \to \operatorname{Aut}(L; L^\partial) \tag{1.1.5.1}$$

oú L est un groupe libre de rang μ = nombre de Milnor de $\not{f}$.

A partir de (1.1.5.1) on peut reconstruire le groupe G et les suites exactes (1.1.1.1) et (1.1.1.2). En particulier, on peut considérer $\pi_1(D^*, t_0)$ comme un sous-groupe de G. Notons aussi que les groupes L^∂ et $\pi_1(X^\partial_0, x_0)$ peuvent être identifiés de façon naturelle, car $\pi_1(X^\partial_{t_0}, x_1) \simeq \pi_1(X^\partial, x_1)$, $\pi_1(X^\partial_0, x_0) \simeq \pi_1(X^\partial, x_0)$ et les deux sont abéliens.

Remarquons que la technique développée ici se trouve aussi formulée dans [LÊ 1], [LÊ 2], [LÊ-CHE].

(1.2.) *Reconstruction de Deligne*

Dans cette section nous allons rappeler le procédé décri dans [S.G.A. 7, exp. XIV, 3.1].

(1.2.1) Soit $\not{f}$: $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une fonction analytique à singularité isolée. Comme dans le cas des courbes planes ((1.1)) on peut trouver une paire de fibrations f: $(X', X) \to D$, dont le type topologique est un invariant de $\not{f}$, qui vérifient les propriétés a) et b) de (1.1). Gardons les notations de (1.1) et choisissons un point de base $t_0 \in D^*$.

A l'aide d'une trivialisation $\mathscr{T}$ de f: $X^{\partial} \to D$ on peut construire un difféomorphisme $T_{\mathscr{T}}$: $X_{t_0} \to X_{t_0}$ qui soit l'identité sur $X_{t_0}^{\partial}$. Ce difféomorphisme est unique modulo isotopies laissant invariant $X_{t_0}^{\partial}$.

Soit $\check{X}$ l'espace obtenu à partir de X en contractant $\overline{X_0 \cap X'}$ en un point, et soit $\check{f}$: $\check{X} \to D$ l'application induite par f. Vu la structure conique de X_0, le morphisme de contraction $X \to \check{X}$ induit une équivalence d'homotopie fibrée entre f et $\check{f}$. En fait, f et $\check{f}$ sont topologiquement isomorphes.

(1.2.2) Nous allons décrire le procédé de reconstruction: On part de $(X_{t_0}, X_{t_0}^{\partial}, T_{\mathscr{T}})$. Soit $\tilde{X}_0$ l'espace obtenu à partir de X_{t_0} en contractant $\overline{X_{t_0} \backslash X_{t_0}^{\partial}}$ en un point et soit sp: $X_{t_0} \to \tilde{X}_0$ le morphisme de contraction. Notons que $\mathrm{sp} \circ T_{\mathscr{T}} = \mathrm{sp}$ et que sp est propre. A partir de $(X_{t_0}, T_{\mathscr{T}})$ on peut construire une fibration localement triviale sur la circonférence $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = |t_0|\}$ de la façon suivante: Soit δ: $\tau \in \mathbb{R}i \mapsto t_0 \exp(2\pi\tau) \in D$ la paramétrisation "unité" de S et considérons l'espace quotient $\tilde{X}_S = (X_{t_0} \times [0, 1])/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par:

$$(x, \tau) \sim (T_{\mathscr{T}}(x), \tau - 1).$$

L'application naturelle $\tilde{f}_S$: $\tilde{X}_S \to S$ est une fibration localement triviale. Vu que $T_{\mathscr{T}}$ est l'identité sur $X_{t_0}^{\partial}$, la fibration triviale $X_{t_0}^{\partial} \times S \to S$ s'injecte canoniquement dans $\tilde{f}_S$. Soit r: $\tilde{X}_S \to \tilde{X}_0$ l'application donnée par $r([(x, \tau)]) = \mathrm{sp}(x)$. Comme le disque fermé $\bar{D}_{|t_0|}$ est le cône de $S \to \{0\}$, on peut construire le cône du morphisme:

$$(r, \text{cte.}): (\tilde{f}_S: \tilde{X}_S \to S) \to (\text{cte.}: \tilde{X}_0 \to \{0\})$$

que l'on notera $\tilde{f}$: $\tilde{X} \to \bar{D}_{|t_0|}$. L'application r: $\tilde{X}_S \to \tilde{X}_0$ s'étend à $\tilde{X}$ toute entière, de façon que $\tilde{X}_0$ est rétract par déformation de $\tilde{X}$. Il est clair que $\tilde{f}$ est une fibration localement triviale en dehors de l'origine, et donc elle peut s'étendre naturellement à $D \supset \bar{D}_{|t_0|}$. Notons aussi $\tilde{f}$: $\tilde{X} \to D$ cette extension. La fibre $\tilde{f}^{-1}(t_0)$ s'identifie à X_{t_0} et la fibration triviale $X_{t_0}^{\partial} \times D \to D$ s'injecte naturellement dans $\tilde{f}$.

Le résultat clé est la proposition suivante, dont la démonstration se trouve dans [S.G.A. 7, exp. XIV, prop. (3.1.5)].

PROPOSITION (1.2.3). *Il existe un homéomorphisme $\Theta_{\mathscr{T}}: \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \check{X}$ compatible avec $\tilde{f}$ et $\check{f}$, qui induit l'identité sur les fibres au-dessus de t_0 et tel que la restriction de $\Theta_{\mathscr{T}}$ à $X^{\partial}_{t_0} \times D$ coïncide avec $\mathscr{T}$.*

La proposition (1.2.3) nous permettra, une fois choisie la trivialisation $\mathscr{T}$, de remplacer $\check{f}$: $\check{X} \to D$ (ou f: $X \to D$) par la donnée de $(X_{t_0}, X^{\partial}_{t_0}, T_{\mathscr{T}})$. Ceci sera très utile dans le calcul des cycles proches (voir (2.1.6)).

§2. Cycles évanescents et faisceaux pervers

(2.1) *Le formalisme des cycles évanescents*

(2.1.1) Dans cette section nous allons rappeler la construction de [S.G.A. 7, exp. XIII, XIV], qui nous amenera à la définition du diagramme fondamental de foncteurs suivant:

$$\mathbb{R}\psi_f \underset{\text{var}}{\overset{\text{can}}{\rightleftarrows}} \Phi_f.$$

Soient $D \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert centré à l'origine et f: $X \to D$ une application continue de l'espace topologique X dans D. Prenons un point de base $t_0 \in D^* = D\backslash\{0\}$ et soit e: $(\tilde{D}^*, \tilde{t}_0) \to (D^*, t_0)$ le revêtement universel de (D^*, t_0). Posons comme d'habitude $X^* = f^{-1}(D^*)$ et j: $X^* \to X$, i: $X_0 = f^{-1}(0) \to X$ les inclusions. On note $\tilde{X}^*$ le produit fibré $X^* \times_{D^*} \tilde{D}^*$ et p: $\tilde{X}^* \to X^*$, $\tilde{f}$: $\tilde{X}^* \to \tilde{D}^*$ les projections canoniques.

Etant donné un faisceau K (de groupes abéliens, d'espaces vectoriels, etc.) sur X^*, on définit le faisceau sur X_0:

$$\psi_f(K) := (i^{-1}j_*p_*p^{-1})(K).$$

En dérivant le foncteur ψ_f on obtient le foncteur "cycles proches":

$$\mathbb{R}\psi_f\colon D^+(X^*) \to D^+(X_0).$$

Le groupe $\pi_1(D^*, t_0)$ agit sur le foncteur p_*p^{-1}. Notons $\mathbf{T}$: $\mathbb{R}\psi_f \to \mathbb{R}\psi_f$ l'automorphisme induit par l'action de δ sur p_*p^{-1} et appelons-le "automorphisme de monodromie".

(2.1.2) A partir d'une catégorie additive (resp. abélienne) $\mathscr{A}$, on construit les catégories suivantes:

a) La catégorie $\mathscr{A}^{\cdot}$, dont

a-1) Les objets sont les 4-uples (A, B, α, σ), où A, B sont des objets de $\mathscr{A}$, α: $A \to B$ est un morphisme de $\mathscr{A}$ et σ: $B \to B$ est un automorphisme de $\mathscr{A}$ tels que $\sigma \circ a = \alpha$.

a-2) Les morphismes entre deux objets de $\mathscr{A}^{\cdot}$ sont définis de la façon évidente.

b) La catégorie $\mathscr{C}(\mathscr{A})$, dont

b-1) Les objets sont les 4-uples (E, F, u, v), où E, F sont des objets de $\mathscr{A}$, u: $E \to F$, v: $F \to E$ sont des morphismes de $\mathscr{A}$ tels que $Id_E + u \circ v$, $Id_F + v \circ u$ sont des automorphismes de $\mathscr{A}$.

b-2) Les morphismes entre deux objets de $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ sont définis de la façon évidente.

Notons que $\mathscr{A}^{\cdot}$ et $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ sont aussi des catégories additives (resp. abéliennes).

(2.1.3) Notons par:

$$\psi_f^{\cdot}: \text{Fais}(X) \to \text{Fais}(X_0)^{\cdot}$$

le foncteur défini par:

$$\psi_f^{\cdot}(K) := (i^{-1}K, (\psi_f j^{-1})(K), i^{-1}(\alpha(K)), \mathbf{T}(j^{-1}K)), \text{ où}$$

$\alpha(K)$: $K \to (j_* p_* p^{-1} j^{-1})(K)$ est le morphisme d'adjonction.

En dérivant on obtient le foncteur:

$$\mathbb{R}\psi_f^{\cdot}: D^+(X) \to D^+(\text{Fais }(X_0)^{\cdot}).$$

Etant donné un complexe K de $D^+(X)$, soit $(M, N, \beta, \gamma) = (\mathscr{O} \circ \mathbb{R}\psi_f^{\cdot})(K)$, où $\mathscr{O}$: $D^+(\text{Fais }(X_0)^{\cdot}) \to D^+(X_0)^{\cdot}$ est le foncteur "oubli" évident. Il est clair que l'on a des isomorphismes naturels en K:

$$M \simeq i^{-1}K, \quad (N, \gamma) \simeq (\mathbb{R}\psi_f(j^{-1}K), \mathbf{T}(j^{-1}K)).$$

(2.1.4) Nous allons définir un foncteur:

$$\Omega: C^+(\text{Fais }(X_0)^{\cdot}) \to \mathscr{C}(C^+(X_0))$$

qui constitue la clé de la définition du foncteur "cycles évanescents" et du morphisme "variation" (voir [S.G.A. 7, exp. XIII, (1.4)]).

Soit $C^* = (A^*, B^*, \alpha^*, \sigma^*)$ un objet de $C^+(\text{Fais }(X_0)^{\cdot}) = C^+(\text{Fais }(X_0))^{\cdot}$. Considérons la suite exacte courte de complexes suivante:

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\tau^*} B^* \oplus \text{cône }(A^*) \xrightarrow{u^*} Q^* \longrightarrow 0$$

où $\tau^* = (\alpha^*, \text{canonique})$ et (Q^*, u^*) est le conoyau de τ^*.

Posons $\tilde{\sigma}^* = \sigma^* \oplus Id_{\text{cône}(A^*)}$. Il est clair que $\tilde{\sigma}^* \circ \tau^* = \tau^*$, d'où il existe un seul v^*: $Q^* \to B^* \oplus \text{cône}(A^*)$ tel que $v^* \circ u^* = \tilde{\sigma}^* - Id$. Remarquons que $\tilde{\sigma}^*$ et $Id_{Q^*} + u^* \circ v^*$ sont des automorphismes.

On définit $\Omega(C^*) := (B^* \oplus \text{cône}(A^*), Q^*, u^*, v^*)$. L'action de Ω sur les morphismes est évidente.

Il est facile de voir que le foncteur Ω passe aux catégories dérivées. Notons aussi Ω: $D^+(\text{Fais}(X_0)^\cdot) \to \mathscr{C}(D^+(X_0))$ le foncteur induit.

DÉFINITION (2.1.5)

a) Posons

$$\Psi_f := \Omega \circ \mathbb{R}\psi_f^\cdot : D^+(X) \to \mathscr{C}(D^+(X_0)).$$

b) Si K est un complexe de $D^+(X)$ et $\Psi_f(K) = (E, F, u, v)$, on définit $\Phi_f(K) := F$.

c) Avec les notations de b), il existe un isomorphisme naturel en K, $\mathbb{R}\psi_f(j^{-1}K) \simeq E$. Sa composition avec u et v est par définition can: $\mathbb{R}\psi_f \circ j^{-1} \to \Phi_f$ ("canonique") et var: $\Phi_f \to \mathbb{R}\psi_f \circ j^{-1}$ ("variation") respectivement. De plus, $\mathbf{T}(j^{-1}K) = Id + \text{var}\,(K) \circ \text{can}\,(K)$.

Le foncteur Φ_f défini en b) s'appelle foncteur "cycles évanescents".

(2.1.6) Nous allons maintenant calculer $\mathbb{R}\psi_f$ et $\mathbf{T}$ dans le cas où f: $X \to D$ est construit par le procédé décrit dans (1.2) à partir d'un triplet (F, F^∂, T), où (F, F^∂) est une "bonne paire" d'espaces topologiques et T: $F \to F$ est un homéomorphisme dont la restriction à F^∂ est l'identité.

Posons pour simplifier $D = \mathbb{C}$, $t_0 = 1$ et e: $\tau \in \mathbb{C} \mapsto \exp(2\pi i\tau) \in \mathbb{C}^*$ le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*, 1)$. Le produit fibré $X \times_{D^*} \tilde{D}^*$ s'identifie canoniquement à $F \times \mathbb{C}$ de façon que X^* apparaît comme le quotient $F \times \mathbb{C}/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par: $(x, \tau) \sim (T(x), \tau - 1)$. L'automorphisme $\tilde{T}$: $F \times \mathbb{C} \to F \times \mathbb{C}$ correspondant au générateur $\delta \in \pi_1(D^*, t_0)$ est donné alors par: $\tilde{T}(x, \tau) = (T(x), \tau - 1)$.

La fibre X_0 est par construction l'espace déduit de F en contractant au point 0 la partie $\overline{F \setminus F^\partial}$. Notons sp: $F \to X_0$ le morphisme de contraction. La rétraction r: $X \to X_0$ est donée par:

$$r(x) = x \quad \text{si} \quad x \in X_0,\ r(p(x, \tau)) = \text{sp}(x) \quad \text{pour} \quad (x, \tau) \in F \times \mathbb{C}.$$

Le diagramme suivant résume la situation qu'on vient de décrire:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \arrow[l, bend right, "r"'] & X^* \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "f"] & F \times \mathbb{C} \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "pr_2"] \arrow[loop right, "\tilde{T}"] \\ \{0\} \arrow[r] & \mathbb{C} & \mathbb{C}^* \arrow[l] & \mathbb{C} \arrow[l, "e"'] \end{tikzcd} \qquad (2.1.6.1)$$

On a $r \circ j \circ p = \mathrm{sp} \circ pr_1$.

(2.1.6.2) Soit $\mathscr{A}$ la sous-catégorie pleine de Fais(X^*) dont les objets sont les faisceaux K tels que le morphisme naturel $(pr_1^{-1}pr_{1*})(p^{-1}K) \to p^{-1}K$ est un isomorphisme.

Soit β: $pr_{1*}p^{-1} \to T_* pr_{1*}p^{-1}$ le morphisme composé de l'adjonction $pr_{1*}p^{-1} \to pr_{1*}\tilde{T}_*\tilde{T}^{-1}p^{-1}$ et du celui provenant des relations $pr_{1*}\tilde{T}_* = T_* pr_{1*}$, $\tilde{T}^{-1}p^{-1} = p^{-1}$. Il est clair que β est un isomorphisme. Notons aussi β: $\mathbb{R}pr_{1*}p^{-1} \to T_*\mathbb{R}pr_{1*}p^{-1}$ l'isomorphisme induit.

Considérons le foncteur $\mathscr{S} = \mathrm{sp}_* pr_{1*}p^{-1} = r_* j_* p_* p^{-1}$ et soit $\mathbf{S}$: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$ l'automorphisme induit par β et par l'identification naturelle χ: $\mathrm{sp}_* T_* \simeq \mathrm{sp}_*$ ($\mathrm{sp} \circ T = \mathrm{sp}$).

Comme $r \circ i = Id$, on déduit un morphisme naturel de foncteurs $r_* \to i^{-1}$, qui à son tour nous donne un morphisme:

$$\bar{v}: \mathscr{S} \to \psi_f.$$

LEMME (2.1.6.3). *Il existe un isomorphisme naturel* $\mathbf{T} \circ \bar{v} \simeq \bar{v} \circ \mathbf{S}$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate des relations suivantes:

$$\mathrm{sp} \circ pr_1 \circ T = r \circ j \circ p \circ T, \quad \mathrm{sp} \circ pr_1 \circ T = \mathrm{sp} \circ T \circ pr_1 = \mathrm{sp} \circ pr_1,$$

$$r \circ j \circ p \circ T = r \circ j \circ p.$$

Notons aussi $\bar{v}$: $\mathbb{R}\mathscr{S} \to \mathbb{R}\psi_f$, $\mathbf{S}$: $\mathbb{R}\mathscr{S} \to \mathbb{R}\mathscr{S}$, χ: $\mathbb{R}\mathrm{sp}_* T_* \to \mathbb{R}\mathrm{sp}_*$ les morphismes induits sur les foncteurs dérivés.

PROPOSITION (2.1.6.4). *Si K est un complexe de $D^+_{\mathscr{A}}(X^*)$, le morphisme $\bar{v}(K)$: $\mathbb{R}\mathscr{S}(K) \to \mathbb{R}\psi_f(K)$ est un isomorphisme.*

Preuve. D'après le lemme des "way-out functors" ([HAR, ch.I, (7.1)]), on doit prouver le résultat dans le cas où K est un objet de $\mathscr{A}$. Pour cela il suffit de montrer que les morphismes:

$$h^i(\bar{v}(K)_x): \mathbb{R}^i\mathscr{S}(K)_x \to \mathbb{R}^i\psi_f(K)_x, \quad x \in X_0, \quad i \geqslant 0 \tag{$*$}$$

sont des isomorphismes.

Posons $L = pr_{1*}(p^{-1}K)$; on a $pr_1^{-1}L \simeq p^{-1}K$. Le morphisme ($*$) est isomorphe à:

$$\varinjlim H^i(\mathrm{sp}^{-1}U \times \mathbb{C}, pr_1^{-1}L) \xrightarrow{\text{nat.}}$$

$$\varinjlim H^i(\mathrm{sp}^{-1}U \times \{\mathrm{Re}(s) < \log(\eta)\}, pr_1^{-1}L)$$

où les limites inductives sont prises par rapport aux voisinages ouverts $U \subset X_0$ de x et les $\eta > 0$. Comme $\mathbb{C}$ et $\{\mathrm{Re}(s) < \log(\eta)\}$ sont des disques et $pr_1^{-1}L$ est constant par rapport au deuxième facteur, ce dernier morphisme est bijectif ([S.G.A. 7, p. 130]).

Corollaire (2.1.6.5). *Si K est un complexe de $D^+_{\mathscr{A}}(X^*)$, le morphisme $\bar{v}(K)$: $\mathbb{R}\mathscr{S}(K)$, $\mathbf{S}(K)) \to (\mathbb{R}\psi_f(K), \mathbf{T}(K))$ est un isomorphisme.*

Preuve. C'est une conséquence du lemme (2.1.6.3) et de la proposition (2.1.6.4).

(2.1.6.6) Etant donné un faisceau K sur X^*, il existe un morphisme naturel $pr_{1*}p^{-1}K \to t^{-1}K$ où t: $X_1 \to X^*$ est l'inclusion, qui est un isomorphisme dans le cas où K est un objet de $\mathscr{A}$. Pour K complexe de $D^+_{\mathscr{A}}(X^*)$, notons $\tau(K)$: $t^{-1}K \to T_*(t^{-1}K)$ (resp. $v(K)$: $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(t^{-1}K) \to \mathbb{R}\psi_f(K)$) le morphisme correspondant au morphisme $\beta(K)$ (resp. $\bar{v}(K)$). Nous pouvons donc énoncer la variante suivante du corollaire (2.1.6.5):

Proposition (2.1.6.7). *Etant donné un complexe K de $D^+_{\mathscr{A}}(X^*)$, on a les assertions suivantes*:
a) *Le morphisme $v(K)$: $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(t^{-1}K) \to \mathbb{R}\psi_f(K)$ est un isomorphisme.*
b) *Le diagramme de foncteurs suivant est commutatif*:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(K_1) \arrow[r, "\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(\tau(K))"] \arrow[d, "v(K)"] & \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(T_*(K_1)) \arrow[r, "\chi(K_1)"] \arrow[d, phantom, "\mathbf{T}(K)"] & \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(K_1) \arrow[d, "v(K)"'] \\
\mathbb{R}\psi_f(K) \arrow[rr] & & \mathbb{R}\psi_f(K)
\end{tikzcd}$$

où on a mis $K_1 = t^{-1}K$.

Remarque (2.1.6.8). La proposition (2.1.6.7) permet de dévisser le complexe K de $D^+_{\mathscr{A}}(X^*)$ en un complexe $K_1 = t^{-1}K$ de $D^+(X_1)$ et un morphisme $\tau(K)$: $K_1 \to T_*(K_1)$. Le complexe K_1 détermine le complexe des cycles proches (partie a) de la proposition). Le morphisme $\tau(K)$ détermine l'automorphisme de monodromie (partie b) de la proposition). Par conséquent non seulement le calcul de $\mathbb{R}\psi_f(K)$ a été réduit à un calcul d'images directes, mais aussi celui de $\mathbf{T}(K)$. Ceci sera utilisé de façon essentielle dans le §3.

Notons que les hypothèses de la proposition (2.1.6.7) sont satisfaites dans le cas où f: $X \to D$ est un représentant de Milnor d'un germe de fonction analytique à singularité isolée et K est un complexe à cohomologie analytiquement constructible. Il suffit d'appliquer la proposition (1.2.3) et le théorème d'isotopie de Thom. En tout cas nous allons utiliser la proposition (2.1.6.7) dans un cas où les hypothèses sont trivialement vérifiées (voir (3.1.1)).

Signalons pour terminer que les résultats exposés en (2.1.6) se trouvent pour l'essentiel dans [S.G.A. 7, exp. XIII et XIV]. En particulier la partie a) de la proposition (2.1.6.7) est une reformulation des résultats (1.4.4), (1.4.5) exp. XIV, et sa démonstration consiste à "faisceautiser" celle de (3.1.8) exp. XIV. Néanmoins la partie b) et le dévissage expliqué plus haut ne semblent pas explicités dans [S.G.A. 7].

(2.2) *Faisceaux pervers*

(2.2.1) Soit X une variété analytique complexe de dimension n et considérons le foncteur "solutions holomorphes":

$$\$ \;=\; \mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(?,\, \mathcal{O}_X)\colon D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathbb{C}_X)$$

de la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$-modules dans la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. Le théorème de constructibilité ([KAS 1]) affirme que si M est une complexe de $D^b(\mathcal{D}_X)$ à cohomologie holonome, $\$(M)$ est un complexe à cohomologie analytiquement constructible. Le théorème d'équivalence de catégories ([MEB 2,3,4]; voir aussi [KAS 3] pour la construction d'un quasi-inverse) affirme que le foncteur $\$$ établit une (anti)équivalence de catégories entre la catégorie $D^b(\mathcal{D}_X)_{hr}$ (complexes à cohomologie holonome régulière) et la catégorie $D^b(\mathbb{C}_X)_c$ (complexes à cohomologie analytiquement constructible). Notons $\mathrm{Perv}(X)$ l'image essentielle par le foncteur $\$$ de la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)_{hr}$ des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers, et appelons "faisceaux pervers" les objets de $\mathrm{Perv}(X)$. Etant donné que $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)_{hr}$ est une catégorie de faisceaux, $\mathrm{Perv}(X)$ est une catégorie abélienne dont les objets one une nature locale, c'est-à-dire, on peut les récupérer à partir de ses restrictions aux ouverts d'un recouvrement ouvert de X.

Soit M un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier et $K = \$(M)$. Le théorème de constructibilité nous dit que:

(a) $h^i(K) = 0$ pour $i < 0$.

(b) $\operatorname{codim}(\operatorname{supp}(h^i(K))) \geqslant i$ pour $i \geqslant 0$.

Le théorème de dualité locale ([MEB 1]) affirme que $\$(M^*) \simeq K^\vee$, où M^* est le dual de M et $K^\vee := \mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(K, \mathbb{C}_X)$ est le dual de Grothendieck-Verdier de K. Par conséquent, $K^\vee$ vérifie aussi les conditions (a) et (b) et donc, pour tout faisceaux pervers K sur X on a les propriétés suivantes:

(p − 1)$h^i(K) = 0$ pour $i < 0$ et codim(supp($h^i(K)$)) $\geqslant i$ pour $i \geqslant 0$.

(p − 2)$h^i(K^\vee) = 0$ pour $i < 0$ et codim(supp($h^i(K)$)) $\geqslant i$ pour $i \geqslant 0$.

En fait les propriétés (p − 1) et (p − 2) caractérisent les faisceaux pervers dans la catégorie $D^b(\mathbb{C}_X)_c$ (cf. [BRY 1]).

Supposons maintenant que X est un espace analytique complexe de dimension n et soit $i: X \to Z$ une immersion fermée dans une variété lisse Z de dimension d. Perv(X) est par définition la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathbb{C}_X)_c$ dont les objets sont les complexes K tels que $(i_*K)[n - d]$ est un faisceau pervers sur Z. Il est facile de voir que cette définition ne dépend pas de l'immersion i.

(2.2.2) Posons $X = \mathbb{C}$ et soit Σ la stratification formée par $\mathbb{C}^*$ et $\{0\}$. Soit Perv (X; Σ) la sous-catégorie pleine de Perv (X) dont les objets sont les faisceaux pervers constructibles par rapport à Σ. Dire qu'un complexe K de $D^b(\mathbb{C}_X)_c$ appartient à Perv (X; Σ) est équivalent aux propriétés suivantes ([G-G-M]):

(p′ − 1)$h^i(K) = 0$ pour $i \neq 0, 1$.

(p′ − 2)$h^0(K)$ et $h^1(K)$ sont constructibles par rapport à Σ.

(p′ − 3)$\Gamma_0(h^0(K)) = 0$ et supp $(h^1(K)) \subset \{0\}$.

Le problème de la classification des objets de Perv (X; Σ), a été d'abord considéré du coté de la catégorie Mod $(\mathscr{D}_X; \Sigma)_{hr}$ des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers, dont la variété caractéristique est contenue dans la réunion de la section nulle et du conormal à 0 ([PH], [MAL], [BDM], [B-M]). Cette catégorie est équivalente par le foncteur $ à Perv (X; Σ). Les résultats obtenus ont mis en évidence le rôle joué par les solutions multiformes et les solutions microfonctions. La traduction de ces idées à Perv (X; Σ) via le dictionnaire établit par $ nous donne la proposition suivante:

Proposition (2.2.2.1) ([DEL], [G-G-M]). *La catégorie* Perv (X; Σ) *est équivalente à la catégorie* $\mathscr{C}$(Vect($\mathbb{C}$)) (*voir* (*2.1.2*)) *où* Vect($\mathbb{C}$) *est la catégorie des* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels de dimension finie.*

L'équivalence proposée par Deligne est le foncteur:

$\imath$: $K \in$ Perv(X; Σ) $\to \Psi_f(K) \in \mathscr{C}$(Vect($\mathbb{C}$)) (voir déf. (2.1.5)) où $f: X \to \mathbb{C}$ est l'identité et $j: X^* \to X$ est l'inclusion. Il n'est pas difficile de montrer à partir des propriétes (p′ − 1), (p′ − 2), (p′ − 3) que $\mathbb{R}\psi_f(j^{-1}K)$ et $\Phi_f(K)$ sont concentrés en degré zéro. La démonstration de Deligne du fait que $\imath$ est une équivalence de catégories se fait par dévissage en les objets simples des deux catégories. Remarquons que la proposition (2.2.2.1) est purement topologique et les structures analytiques n'interviennent pas. Il est possible d'exhiber un quasi-inverse de $\imath$ (voir aussi [G-G-M] [MAI 2]):

Soit p: $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^*, 1)$ le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*, 1)$. Etant donné un diagramme $(E, F, u, v) \in \mathscr{C}(\mathrm{Vect}\,(\mathbb{C}))$, soit $\mathscr{L}$ le système local sur X^* dont la fibre au point de base est E et l'action du générateur positif δ de $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ est $M = Id_E + v \circ u$. Notons σ: $p_*p^{-1} \to p_*p^{-1}$ l'automorphisme induit par δ (voir (2.1.1)). Le complexe:

$$\mathscr{G} \;=\; 0 \to p_*p^{-1}\mathscr{L} \xrightarrow{\sigma(\mathscr{L}) - Id} p_*p^{-1}\mathscr{L} \to 0$$

est une résolution de $\mathscr{L}$ acyclique pour j_*. Le complexe $(j_*\mathscr{G})_0$ est canoniquement isomorphe à:

$$0 \to E \xrightarrow{M - Id} E \to 0$$

Considérons le complexe:

$$G := 0 \to E \xrightarrow{u} F \to 0$$

On peut fabriquer un complexe de faisceaux K sur X dont la restriction à X^* soit $\mathscr{G}$ et la fibre au dessus de 0 soit G à l'aide du morphisme α: $G \to (j_*\mathscr{G})_0$ suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\alpha^0 = Id_E"] \arrow[d, "u"] & E \arrow[r] \arrow[d, "M - Id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\alpha^1 = v"'] & E \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On voit sans difficulté que K appartient à Perv $(X; \Sigma)$ (K vérifie les propriétés (p′ − 1), (p′ − 2), (p′ − 3)) et que K est acyclique pour j_*j^{-1} et $\psi^{\cdot}_{Id}$, d'où:

$$\Psi_f(K) \;=\; \Omega(\mathbb{R}\psi^{\cdot}_{Id}(K)) \;=\; \Omega(\psi^{\cdot}_{Id}(K)).$$

Un calcul facile montre que $\psi^{\cdot}_{Id}(K)$ est canoniquement isomorphe à l'objet:

$$\mathcal{O} \;=\; \begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "u"'] & E^{\mathbb{Z}} \arrow[d, "D"] \arrow[loop right, "\eta"] \\
F \arrow[r, "\nu \circ v"'] & E^{\mathbb{Z}} \arrow[loop right, "\eta"]
\end{tikzcd}$$

où $\nu(e) = \{M^i(e)\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $D(\{e_i\}) = \{e_{i+1} - e_i\}$, $\eta(\{e_i\}) = \{M(e_{i-1})\}$.

LEMME (2.2.2.2). *Il existe un isomorphisme naturel*:

$$\Omega(\mathcal{O}) \simeq (E, F, u, v).$$

La preuve de ce lemme est un exercice facile d'algèbre linéaire, à partir de la définition du foncteur Ω (cf. (2.1.4)).

D'après le lemme (2.2.2.2) on déduit un isomorphisme naturel $\imath(K) \simeq (E, F, u, v)$ qui nous dit que le foncteur:

$$(E, F, u, v) \in \mathscr{C}(\mathrm{Vect}\ (\mathbb{C})) \mapsto K \in \mathrm{Perv}\ (X; \Sigma)$$

est un quasi-invers de $\imath$.

(2.2.2.3) Les calculs précédents montrent que si K est un objet de Perv $(X; \Sigma)$ et (E, F, u, v) est le diagramme qui lui correspond, il existe un isomorphisme (dans $D^b(\mathbb{C})$) naturel entre:

$$\mathbb{R}\Gamma(X, K) \to \mathbb{R}\Gamma(X^*, K) \to \mathbb{R}\Gamma(X^*, \mathbb{R}p_* p^{-1}K) \qquad \mathbb{R}\Gamma(X^*, \sigma(K))$$

et

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "u"] & E \arrow[r, "v"] \arrow[d, "M - Id"] & E^{\mathbb{Z}} \arrow[loop right, "\eta"] \arrow[d, "D"] \\ F \arrow[r, "v"'] & E \arrow[r, "v"'] & E^{\mathbb{Z}} \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd}$$

où v, D et η on été définis ci-dessus.

(2.2.3) Soient X un espace analytique complexe de dimension n, f: $X \to D$ une application analytique non constante, $Y = f^{-1}(0)$, $U = X \backslash Y$, et j: $U \to X$, i: $Y \to X$ les inclusions. Les foncteurs $\mathbb{R}\psi_f$ et Φ_f (voir (2.1.1)) preservent la perversité ([GO-MA 2], [LÊ-ME], [BRY 2]) et jouent un rôle fondamental dans le probléme de l'extension des faisceaux pervers. Le problème de recollement considéré en (2.2.2) dans le cas où $X = \mathbb{C}$, $Y = \{0\}$, a été resolu en dimension quelconque par MacPherson–Vilonen ([MA-VI 1,2]). Citons aussi le travail [G-G-M] dans le cas d'un croisement normal et les résultats de Deligne concernant le faisceaux monodromiques (non publiés). Nous allons énoncer la forme développée par Verdier, qui est celle qu'on utilisera dans le §3.

Soit $Rc(X; f)$ la catégorie dont les objets sont les 4-uples (F, Φ, c, v) où $F \in \operatorname{Perv}(U)$, $\Phi \in \operatorname{Perv}(Y)$, c: $\mathbb{R}\psi_f(F) \to \Phi$, v: $\Phi \to \mathbb{R}\psi_f(F)$ tels que $\mathbf{T}(F) = Id_F + v \circ c$, et les morphismes sont définis de façon évidente. Considérons le foncteur suivant:

$$\mathscr{R}\colon K \in \operatorname{Perv}(X) \mapsto \mathscr{R}(K) = (j^{-1}K, \Phi_f(K), \operatorname{can}(K), \operatorname{var}(K)) \in Rc(X; f).$$

Théorème (2.2.3.1) ([VER]). *Le foncteur $\mathscr{R}$ est une équivalence de catégories.*

(2.2.3.2) Etant donné un faisceau pervers F sur U, on dispose de trois prolongements privilégiés à X tout entier (cf. [B-B-D]):

$$j_! F, \quad \mathbb{R}j_* F, \quad j_{!*}F.$$

Ces prolongements correspondent respectivement aux trois objets de $Rc(X; f)$ suivants [VER]:

$$(F, \mathbb{R}\psi_f(F), Id, \mathbf{T}(F) - Id), \quad (F, \mathbb{R}\psi_f(F), \mathbf{T}(F) - Id, Id)$$

$$(F, \operatorname{Im}(\mathbf{T}(F) - Id), \mathbf{T}(F) - Id, \text{inclusion}).$$

Remarque (2.2.4). Le procédé (1.2), la proposition (2.1.6.7) et le théorème d'isotopie de Thom, nous permettent de montrer la commutation du foncteur $\mathbb{R}\psi_f$ avec la dualité, dans le cas où f est à singularité isolée. Il s'agit simplement d'appliquer le théorème de dualité relative au morphisme propre sp. De là on déduit directement la perversité de $\mathbb{R}\psi_f(K)$ pour K pervers.

§3. Le calcul de $\mathbb{R}\psi_f$

(3.1) *Considérations préliminaires*

(3.1.1) Soit f: $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une fonction analytique irréductible. Gardons les notations de (1.1.1). En particulier $X' \subset X \subset \mathbb{C}^2$ sont deux représentants de Milnor de f et $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X^*$, $t_0 = f(x_1) \in D^*$ sont des points de base. Choisissons une trivialisation $\mathscr{T}$ de f: $X^\partial \to D$ comme dans (1.1.2) et soit T: $X_{t_0} \to X_{t_0}$ l'automorphisme caractéristique qui lui est associé. D'après ce qu'on a dit en (1.2.1) et prop. (1.2.3), on peut supposer que f: $X \to D$ est construit à partir de $(X_{t_0}, X_{t_0}^\partial, T)$ par le procédé (1.2.2).

Si $\mathscr{L}$ est un système local sur X^* de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, posons (K, m): $= (\mathbb{R}\psi_f(\mathscr{L}), \mathbf{T}(\mathscr{L}))$. D'après (2.1.6.6), prop. (2.1.6.7) et remarque (2.1.6.8), $\mathscr{L}$ se dévisse en:

$$\mathscr{L}_1 \ = \ \mathscr{L}|_{X_{t_0}}, \tau\colon \mathscr{L}_1 \to T_*\mathscr{L}_1$$

de façon que $(K, m) \simeq (\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(\mathscr{L}_1), \chi \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(\tau))$.

Comme $(X_0, 0)$ est homéomorphe à $(\mathbb{C}, 0)$ et K est un faisceau pervers stratifié par rapport à $\Sigma = \{X_0 \backslash \{0\}, \{0\}\}$, le couple (K, m) admet une représentation algébrique (voir prop. (2.2.2.1)):

$$(\imath(K), \imath(m)) \ = \ (C = (E, F, u, v), (t_1, t_2))$$

où $C \in \mathscr{C}(\mathrm{Vect}(\mathbb{C}))$ et (t_1, t_2) est un automorphisme de C.

Le problème consiste donc à *calculer* $(C, (t_1, t_2))$ en fonction du $\mathbb{C}[G]$-module E associé à $\mathscr{L}$.

(3.1.2) Notons par $p\colon (\tilde{X}_0^\partial, \tilde{x}_0) \to (X_0^\partial, x_0)$, $\bar{p}\colon (\tilde{X}_{t_0}^\partial, \tilde{x}_1) \to (X_{t_0}^\partial, x_1)$, q: $(\tilde{X}_{t_0}, \tilde{x}_1) \to (X_{t_0}, x_1)$ les revêtements universels. Comme $\tilde{X}_0^\partial$, $\tilde{X}_{t_0}^\partial$, $\tilde{X}_{t_0}$ sont contractiles, il existent des isomorphismes canoniques:

$$\mathbb{R}\Gamma(X_0, K) \simeq \mathbb{R}\Gamma(X_{t_0}, \mathscr{L}_1) \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(\mathbb{C}, E),$$

$$\mathbb{R}\Gamma(X_0^\partial, K) \simeq \ldots \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L^\partial]}(\mathbb{C}, E)$$

$$\mathbb{R}\Gamma(X_0^\partial, \mathbb{R}p_*p^{-1}K) \simeq \ldots \simeq \mathbb{R}\Gamma(X_{t_0}^\partial, \mathbb{R}\bar{p}_*\bar{p}^{-1}\mathscr{L}_1) \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L^\partial]}(\mathbb{C}, E^{\mathbb{Z}})$$

où la structure de $\mathbb{C}[L^\partial]$-module sur $E^{\mathbb{Z}}$ est determinée par l'action du générateur positif γ de L^∂ ci-dessous:

$$\gamma \cdot (\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}}) \ = \ \{e_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Cela exprime que $E^{\mathbb{Z}}$ est le $\mathbb{C}[L^\partial]$-module associé au système local $\mathbb{R}\bar{p}_*\bar{p}^{-1}\mathscr{L}_1$.

A l'automorphisme $\sigma(K)$ de $\mathbb{R}p_*p^{-1}K$, induit par le générateur positif de $\pi_1(X_0^\partial, x_0)$, correspond l'automorphisme de $E^{\mathbb{Z}}$ suivant (voir (2.2.2)):

$$\eta\colon \{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}} \mapsto \{\gamma \cdot e_{i-1}\}_{i\in\mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}}.$$

Le diagramme de $D^b(\mathbb{C})$:

$$\mathbb{R}\Gamma(X_0, K) \to \mathbb{R}\Gamma(X_0^\partial, K) \to \mathbb{R}\Gamma(X_0^\partial, \mathbb{R}p_*p^{-1}K) \circlearrowright \sigma(K) \qquad (3.1.2.1)$$

où $\sigma(K)$ est l'automorphisme induit par $\sigma(K)$, est donc isomorphe à:

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(\mathbb{C}, E) \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L^{\partial}]}(\mathbb{C}, E) \xrightarrow{\bar{v}} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L^{\partial}]}(\mathbb{C}, E^{\mathbb{Z}}) \circlearrowright \bar{\eta} \tag{3.1.2.2}$$

où $\bar{v} = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, v)$ (voir (2.2.2)) et $\bar{\eta} = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \eta)$.

Or, les complexes de (3.1.2.2) peuvent être calculés au moyen des resolutions libres canoniques:[1]

$$0 \to I(L) \to \mathbb{C}[L] \to \mathbb{C} \to 0, \quad 0 \to \mathbb{C}[L^{\partial}] \xrightarrow{(\gamma - 1)} \mathbb{C}[L^{\partial}] \to \mathbb{C} \to 0$$

où $I(L)$ est l'idéal d'augmentation de $\mathbb{C}[L]$. De là on déduit que (3.1.2.2) est isomorphe au diagramme:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "Id_E"] \arrow[d, "U"'] & E \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\gamma - 1"] & E^{\mathbb{Z}} \circlearrowright \eta \arrow[d, "\gamma - 1"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(I(L), E) \arrow[r, "V"'] & E \arrow[r, "v"'] & E^{\mathbb{Z}} \circlearrowright \eta \end{tikzcd} \tag{3.1.2.3}$$

où $U(e)(g) = ge$, $V(h) = h(\gamma - 1)$, pour $e \in E, g \in I(L)$, $h \in \mathrm{Hom}(I(L), E)$, et v, η ont été définis dans (2.2.2).

On a trouvé donc un isomorphisme naturel en $\mathscr{L}$ entre (3.1.2.1) et (3.1.2.3). Ceci joint avec les prop. (2.2.2.1) et (2.2.2.3), suggère l'existence d'un isomorphisme (naturel en $\mathscr{L}$):

$$\imath(\mathbb{R}\psi_f(\mathscr{L})) \simeq (E, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(I(L), E), U, V).$$

Néanmoins nous ne pouvons pas déduire l'existence de cet isomorphisme simplement à partir de l'existence d'un isomorphisme entre (3.1.2.1) et (3.1.2.3), comme le montre l'exemple suivant:

Exemple (3.1.2.4). Soit K un faisceau pervers de $\mathrm{Perv}(X_0; \Sigma)$ tel que $\imath(K) = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, i, p)$, où $i(x) = (x, 0)$, $p(x, y) = y$. Considérons l'automorphisme F_b de K tel que:

$$\imath(F_b) = \left(1, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

[1] N'oublions pas que L et L^{∂} sont des groupes libres de rang μ et 1 respectivement; en particulier $I(L)$ est $\mathbb{C}[L]$-libre de rang μ.

On peut voir que l'automorphisme (dans $D^b(\mathbb{C})$) du diagramme (3.1.2.1) induit par F_b est indépendant de b. Par conséquent, on ne peut pas récupérer F_b à partir des automorphismes de (3.1.2.1).

(3.2) *Ennoncé des résultats*

Gardons les notations de (3.1) et considérons le foncteur:

$$\mathbb{F}\colon E \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}[G]) \mapsto (E, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(I(L), E), U, V) \in \mathscr{C}(\mathrm{Vect}\,(\mathbb{C}))$$

où U, V ont été définis dans (3.1.2.3).

Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant:

THÉORÈME (3.2.1). *Avec les notations précédentes, on a:*

a) *Il existe un isomorphisme naturel en $\mathscr{L}$:*

$$\Lambda(\mathscr{L})\colon \imath(\mathbb{R}\psi_f(\mathscr{L})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}(E).$$

b) *L'automorphisme $\imath(\mathbf{T}(\mathscr{L}))$ de $\imath(\mathbb{R}\psi_f(\ell))$ correspond à l'automorphisme $(t_1(E), t_2(E))$ de $\mathbb{F}(E)$ donné par:*

$$t_1(E)(e) = \delta^{-1}e,\ t_2(E)(h)(g) = \delta^{-1}h(\delta g\delta^{-1}),$$

$$\text{pour } e \in E,\ h \in \mathrm{Hom}(I(L), E)$$

où δ est le générateur positif de $\pi_1(D^*, t_0) \hookrightarrow G$ (voir cor. (1.1.4)).

Le théorème (3.2.1) sera démontré dans la section (3.3). Voyons maintenant quelques conséquences.

Notons $\mathscr{C}_f$ la catégorie suivante:

a) Les objets sont les 4-uples (E, C, u, v), où E est un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie sur $\mathbb{C}$, C est un objet de $\mathscr{C}(\mathrm{Vect}(\mathbb{C}))$ et $u\colon \mathbb{F}(E) \to C$, $v\colon C \to \mathbb{F}(E)$ sont des morphismes vérifiant $Id_{\mathbb{F}(E)} + v \circ u = (t_1(E), t_2(E))$.

b) Les morphismes entre deux objets (E, C, u, v), (E', C', u', v'), sont définis de façon évidente.

Soit Σ' la stratification de X dont les strates sont $X^* = X\backslash X_0$, $X_0\backslash\{0\}$, $\{0\}$ et soit $\mathscr{R}_f\colon \mathrm{Perv}(X; \Sigma') \to \mathscr{C}_f$ le foncteur qui à un faisceau pervers K associe la 4-uple (E, C, u, v), où E est le $\mathbb{C}[G]$-module correspondent au système local $\mathscr{L} = K|_{X^*}$, $C = \mathscr{R}(\Phi_f(K))$, $u = \mathscr{R}(\mathrm{can}(K)) \circ \Lambda(\mathscr{L})^{-1}$, $v = \Lambda(\mathscr{L}) \circ \mathscr{R}(\mathrm{var}(K))$. Le théorème (3.2.1), la proposition (2.2.2.1) et le théorème (2.2.3.1) nous donnent le résultat suivant:

THÉORÈME (3.2.2). *le foncteur* $\mathscr{R}_f$: $\mathrm{Perv}(X; \Sigma') \to \mathscr{C}_f$ *est une équivalence de catégories* (*abéliennes*).

On se propose maintenant de calculer le cycle caractéristique (voir [KAS 2]) du faisceau pervers $K \in \mathrm{Perv}(X; \Sigma')$ en fonction de la donnée algébrique $\mathscr{R}_f(K) = (E, C = (C_1, C_2, \alpha, \beta), u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2))$. La variété caractéristique de K est contenue dans la réunion de la section nulle, $T_X^*(X)$, le conormal à X_0, $\overline{T_{X_0\backslash\{0\}}^*(X)}$, et le conormal à l'origine, $T_0^*(X)$. La multiplicité μ_0 de K le long $T_X^*(X)$ coïncide avec le rang du système local $K|_{X^*}$, c'est-à-dire, $\mu_0 = \dim_{\mathbb{C}}(E)$. Pour calculer la multiplicité μ_1 de K le long $\overline{T_{X_0\backslash\{0\}}^*(X)}$ prenons un point p de $X_0\backslash\{0\}$ et appliquons la formule de l'indice au point p ([KAS 2]); $\chi(K_p) = \mu_0 - \mu_1$. Le triangle:

$$K|_{X_0} \to \mathbb{R}\psi_f(K) \to \Phi_f(K)$$

Nous donne l'égalité $\chi(K_p) = \chi(\mathbb{R}\psi_f(K)_p) - \chi(\Phi_f(K)_p)$, mais d'après la définition de $\mathscr{R}_f$, on a:

$$\chi(\mathbb{R}\psi_f(K)_p) = \dim_{\mathbb{C}}(E), \chi(\Phi_f(K)_p) = \dim_{\mathbb{C}}(C_1),$$

$$\text{d'où} \quad \mu_1 = \dim_{\mathbb{C}}(C_1).$$

Il nous reste à calculer la multiplicité μ_2 de K le long $T_0^*(X)$. Pour cela appliquons la formule de l'indice à l'origine:

$$\chi(K_0) = \mu_0 - e\mu_1 + \mu_2$$

où e est la multiplicité de la courbe X_0 en 0. On a aussi $\chi(K_0) = \chi(\mathbb{R}\psi_f(K)_0) - \chi(\Phi_f(K)_0) = \cdots = (1 - \mu)\dim_{\mathbb{C}}(E) - \dim_{\mathbb{C}}(C_1) + \dim_{\mathbb{C}}(C_2)$, d'où:

$$\mu_2 = \cdots = \mu \dim_{\mathbb{C}}(E) + (1 - e)\dim_{\mathbb{C}}(C_1) + \dim_{\mathbb{C}}(C_2).$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant:

PROPOSITION (3.2.3). *Si K est un faisceau pervers sur X stratifié par rapport à Σ' et* $\mathscr{R}_f(K) = (E, (C_1, C_2, \alpha, \beta), u, v)$, *le cycle caractéristique de K est égal à*:

$$d\, T_X^*(X) + \overline{T_{X_0\backslash\{0\}}^*(X)} + (\mu d + (1 - e)\, d_1 + d_2)\, T_0^*(X),$$

où $d = \dim(E)$, $d_1 = \dim(C_1)$ *et* $d_2 = \dim(C_2)$.

Remarque (3.2.4). La proposition (3.2.3) nous redonne le résultat bien connu suivant: si X_0 est une courbe singulière ($e > 1$), il n'y a pas des faisceaux pervers dont la variété caractéristique soit le conormal à la courbe.

Etant donné un système local $\mathscr{L}$ sur X^*, on dispose des trois prolongements à X suivants:

$$j_!\mathscr{L}, \quad \mathbb{R}j_*\mathscr{L}, \quad j_{!*}\mathscr{L}$$

où $j: X^* \to X$ est l'inclusion. D'après (2.2.3.2), on obtient:

Proposition (3.2.5). *Si E est le $\mathbb{C}[G]$-module associé à $\mathscr{L}$, on a des isomorphismes naturels en $\mathscr{L}$:*

$$\mathscr{R}_f(j_!\mathscr{L}) \simeq (E, \mathbb{F}(E), Id_{\mathbb{F}(E)}, (t_1(E), t_2(E)) - Id_{\mathbb{F}(E)})$$

$$\mathscr{R}_f(\mathbb{R}j_*\mathscr{L}) \simeq (E, \mathbb{F}(E), (t_1(E), t_2(E)) - Id_{\mathbb{F}(E)}, Id_{\mathbb{F}(E)})$$

$$\mathscr{R}_f(j_{!*}\mathscr{L}) \simeq (E, \mathrm{Im}((t_1(E), t_2(E)) - Id_{\mathbb{F}(E)}), (t_1(E), t_2(E)) - Id_{\mathbb{F}(E)}, \text{incl.}).$$

Corollaire (3.2.6). *Le cycle caractéristique du complexe d'intersection $IC(\mathscr{L}) = j_{!*}\mathscr{L}$ est:*

$$d\, T^*_X(X) + d_1'\, \overline{T^*_{X_0\setminus\{0\}}(X)} + (d_2' - \mu d + (e-1)\, d_1')T^*_0(X)$$

où $d = \dim_{\mathbb{C}}(E) =$ rang de $\mathscr{L}$, $d_1' = \mathrm{rg}(t_1(E) - 1)$, $d_2' = \mathrm{rg}(t_2(E) - 1)$.

Remarque (3.2.7). Le corollaire (3.2.6) se prête aux calculs explicites chaque fois qu'on connait explicitement l'homomorphisme $\varrho: \pi_1(D^*, t_0) \to \mathrm{Aut}(L; L^\partial)$ de (1.1.5.1). Voir à ce propos l'exemple à la fin de ce §.

(3.3) *Démonstration du théorème (3.2.1)*

Au cours de la preuve du théorème (3.2.1), nous allons utiliser les notations suivantes:

- $j: X_0^\partial \to X_0, \bar{j}: X_{t_0}^\partial \to X_{t_0}$ les inclusions,
- $p: (\tilde{X}_0^\partial, \tilde{x}_0) \to (X_0^\partial, x_0)$, $\bar{p}: (\tilde{X}_{t_0}^\partial, x_1) \to (X_{t_0}^\partial, x_1)$, $\quad q: (\tilde{X}_{t_0}, \tilde{x}_1) \to (X_{t_0}, x_1)$ les revêtements universels,
- $\sigma: p_*p^{-1} \to p_*p^{-1}$ (resp $\bar{\sigma}: \bar{p}_*\bar{p}^{-1} \to \bar{p}_*\bar{p}^{-1}$) l'automorphisme induit par le générateur positif γ (voir (1.1.1) et (1.1.5)),
- $\psi^\cdot$: Fais $(X_0) \to \mathrm{Vect}(\mathbb{C})^\cdot$ le foncteur définit en (2.1.3), où f est Id_{X_0}.

Si $\mathscr{L}_1$ est un système local sur X_{t_0}, soit $I(\mathscr{L}_1)$ la resolution injective canonique de Godement de $\mathscr{L}_1$.

Etant donné un système local $\mathscr{L}$ sur X^*, posons $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}|_{X_{t_0}}$. Notons $P^{\cdot}$ (resp. $Q^{\cdot}$) la resolution $\mathbb{C}[L^{\partial}]$-libre (resp. $\mathbb{C}[L]$-libre) de $\mathbb{C}$:

$$0 \to \mathbb{C}[L^{\partial}] \xrightarrow{(\gamma - 1)} \mathbb{C}[L^{\partial}] \to \mathbb{C} \to 0 \text{ (resp. } 0 \to I(L) \to \mathbb{C}[L] \to \mathbb{C} \to 0)$$

et soit φ: $P^{\cdot} \to Q^{\cdot}$ le morphisme induit par l'inclusion $L^{\partial} \hookrightarrow L$.

Le foncteur $\imath$ de la proposition (2.2.2.1) est par définition $\Omega \circ \mathbb{R}\psi^{\cdot}$.

(3.3.1) Démontrons la partie a) du théorème (3.2.1). Soit $\mathscr{L}$ un système local sur X^*, E le $\mathbb{C}[G]$-module associé, et posons pour simplifier $I = I(\mathscr{L}_1)$, $J = \mathrm{sp}_*(I)$. On a des isomorphismes naturels:

$$\mathscr{R}(\mathbb{R}\psi_f(\mathscr{L})) \simeq \mathscr{R}(\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(\mathscr{L}_1)) \simeq (\Omega \circ \mathbb{R}\psi^{\cdot})(J) \simeq \Omega(\psi^{\cdot}(J)) \qquad (3.3.1.1)$$

mais $\psi^{\cdot}(J)$ est, par des raisons de constructibilité, naturellement isomorphe à:

$$(\Gamma(X_0, J), \Gamma(X_0^{\partial}, (p_* p^{-1})(j^{-1}J)), \text{adjonc. } \Gamma(X_0^{\partial}, \sigma(j^{-1}J))) \qquad (3.3.1.2)$$

qui à son tour est isomorphe par changement de base par le morphisme sp à:

$$(\Gamma(X_{t_0}, I), \Gamma(X_{t_0}^{\partial}, (\bar{p}_* \bar{p}^{-1})(\bar{j}^{-1}I), \text{adjonc. } ,\Gamma(X_{t_0}^{\partial}, \bar{\sigma}(\bar{j}^{-1}I))). \qquad (3.3.1.3)$$

Posons $I_1 = q_* q^{-1} I$, $I_2 = \bar{p}_* \bar{p}^{-1} \bar{p}_* \bar{p}^{-1} \bar{j}^{-1} I$. Le groupe L (resp. L^{∂}) agit sur I_1 (resp. I_2), et donc I_1 (resp. I_2) est un faisceau de $\mathbb{C}[L]$-modules (resp. $\mathbb{C}[L^{\partial}]$-modules).

LEMME (3.3.1.4). *Soit Z un espace topologique connexe par arcs et localement simplement connexe, π: $\tilde{Z} \to Z$ un revêtement, $H = \mathrm{Aut}\,(\tilde{Z}/Z)$ et $\mathscr{I}$ un faisceau injectif de $\mathbb{C}$-vectoriels. Alors $\pi_* \pi^{-1} \mathscr{I}$ est un faisceau injectif de $\mathbb{C}[H]$-modules.*

Preuve du lemme (3.3.1.4). La proprieté pour un faisceau d'être injectif est de nature locale (lemme de Zorn). Par conséquent il suffit de voir que la restriction de $\pi_* \pi^{-1} \mathscr{I}$ à tout ouvert simplement connexe est $\mathbb{C}[H]$-injectif. Soit donc $Y \subset X$ un ouvert simplement connexe. En choisissant des points de base, on peut identifier $\pi_* \pi^{-1} \mathscr{I}|_Y$ au faisceau $(\mathscr{I}|_Y)^H$ où l'action de H est donnée par:

$$h \cdot \{b_g\}_{g \in H} = \{b_{gh}\}_{g \in H}.$$

La $\mathbb{C}[H]$-injectivité de ce dernier faisceau est une conséquence immédiate de la $\mathbb{C}$-injectivité de $\mathscr{I}$.

D'après le lemme (3.3.1.4), I_1 (resp. I_2) est un complexe de faisceaux injectifs de $\mathbb{C}[L]$-modules (resp. $\mathbb{C}[L^\partial]$-modules).

Le module $\Gamma(X_{t_0}, I)$ (resp. $\Gamma(X_{t_0}^\partial, \bar{p}_*\bar{p}^{-1}\bar{j}^{-1}I)$) coïncide avec les L-invariants (resp. L^∂-invariants) de $\Gamma(X_{t_0}^\partial, I_2)$), c'est-à-dire:

$$\Gamma(X_{t_0}, I) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(\mathbb{C}, \Gamma(X_{t_0}, I_1))$$

$$\Gamma(X_{t_0}^\partial, \bar{p}_*\bar{p}^{-1}\bar{j}^{-1}I) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L^\partial]}(\mathbb{C}, \Gamma(X_{t_0}^\partial, I_2)).$$

Or, étant donné que $\Gamma(X_{t_0}, I_1)$ et $\Gamma(X_{t_0}^\partial, I_2)$ sont injectifs, on a des isomorphismes naturels:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(\mathbb{C}, \Gamma(X_{t_0}, I_1)) \simeq \mathrm{Hom}^{\cdot}_{\mathbb{C}[L]}(Q^{\cdot}, \Gamma(X_{t_0}, I_1)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(Q^{\cdot}, E)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L^\partial]}(\mathbb{C}, \Gamma(X_{t_0}^\partial, I_2)) \simeq \mathrm{Hom}^{\cdot}_{\mathbb{C}[L^\partial]}(P^{\cdot}, \Gamma(X_{t_0}^\partial, I_2)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L^\partial]}(P^{\cdot}, E^{\mathbb{Z}}).$$

Ceci dit, on conclut que (3.3.1.3) est naturellement isomorphe à:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(Q^{\cdot}, E), \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L^\partial]}(P^{\cdot}, E^{\mathbb{Z}}),\\ &\quad \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, v) \circ \mathrm{Hom}(\varphi, E), \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, \eta))\end{aligned} \qquad (3.3.1.5)$$

ou de manière plus explicite à:

$$\mathcal{O} = \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{v} & E^{\mathbb{Z}} \circlearrowleft \eta \\ \downarrow U & & \downarrow D \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(I(L), E) & \rightarrow & E^{\mathbb{Z}} \circlearrowleft \eta \end{array} \qquad (3.3.1.6)$$

où U, V ont été definis dans $v \circ V$, et D, v, η ont été definis dans (2.2.2).

Nous avons prouvé que $\mathbb{R}\psi^{\cdot}(\mathbb{R}\psi_f(\mathscr{L}))$ est naturellement isomorphe à l'objet $\mathcal{O}$ de $C^+(\mathrm{Vect}\,(\mathbb{C}))^{\cdot}$. La partie a) du théorème (3.2.1) est donc une conséquence du lemme (2.2.2.2).

(3.3.2) Il nous reste à prouver la partie b) du théorème (3.2.1). D'après la proposition (2.1.6.7), on sait que:

$$(\mathbb{R}\psi_f(\mathscr{L}), \mathrm{T}(\mathscr{L})) \simeq (\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(\mathscr{L}_1), \chi \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(\tau))$$

où τ: $\mathscr{L}_1 \to T_*\mathscr{L}_1$ et $\chi = \chi(\mathscr{L}_1)$: $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(T_*\mathscr{L}_1) \to \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(\mathscr{L}_1)$ ont été définis dans (2.1.6.6), (2.1.6.2).

Le $\mathbb{C}[L]$-module associé à $\mathscr{L}_1$ est obtenu à partir du $\mathbb{C}[G]$-module E par restriction des scalaires. L'automorphisme T: $X_{t_0} \to X_{t_0}$ induit l'automorphisme:

$$\varrho(\delta)\colon g \in L \mapsto \delta g \delta^{-1} \in L \text{ (voir (1.1.2) et prop. (1.1.3)).}$$

Par conséquent, le $\mathbb{C}[L]$-module associé à $T_*\mathscr{L}_1$ est E' dont l'espace vectoriel sous-jacent coïncide avec E et l'action de L est donnée par:

$$g \cdot e = (\delta^{-1} g \delta) e \text{ (dans } E), \quad \text{pour } g \in L,\ e \in E'.$$

Le morphisme τ: $\mathscr{L}_1 \to T_*\mathscr{L}_1$ induit le morphisme:

$$\lambda\colon e \in E \mapsto \delta^{-1} e \in E'.$$

Nous avons donc traduit le dévissage $(\mathscr{L}_1, \tau)$ de $\mathscr{L}$ en dévissage $(E|_L, \lambda)$ du $\mathbb{C}[G]$-module E. Celui-ci provient de la décomposition en produit sémi-direct:

$$G \simeq L \rtimes_{\varrho} \pi_1(D^*, t_0) \text{ (cor. (1.1.4))}$$

L'automorphisme $(t_1(E), t_2(E))$ de $\mathbb{F}(E)$ qui correspond à $\imath(\mathbf{T}(\mathscr{L}))$ par $\Lambda(\mathscr{L})$, est la composition de $\mathbb{F}(\lambda)$ avec celui qui correspond à $\imath(\chi)$. Appelons cet isomorphisme κ: $\mathbb{F}(E') \to \mathbb{F}(E)$. Si I est la resolution injective canonique de Godement de $\mathscr{L}_1$, $T_*(I)$ est une resolution injective de $T_*(\mathscr{L}_1)$. On a:

$$\imath(\mathbb{R}\mathrm{sp}_* T_*\mathscr{L}_1) \simeq \Omega(\psi^{\cdot}(T_*(I)))$$

et

$$\psi^{\cdot}(\mathrm{sp}_*(T_*(I))) = \psi^{\cdot}(\mathrm{sp}_*(I)), \quad \text{car } \mathrm{sp} \circ T = \mathrm{sp}.$$

Cette dernière égalité induit l'isomorphisme (ω, Id) dans $C^+(\mathrm{Vect}(\mathbb{C}))^{\cdot}$ entre:

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(Q^{\cdot}, E'), \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L^{\partial}]}(P^{\cdot}, E'^{\mathbb{Z}}), \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, \nu),$$

$$\mathrm{Hom}(\varphi, E'), \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, \eta))$$

et

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L]}(Q^{\cdot}, E), \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[L^{\partial}]}(P^{\cdot}, E^{\mathbb{Z}}), \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, v),$$

$$\mathrm{Hom}(\varphi, E'), \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, \eta))$$

donné par:

$$\omega^0 = Id_E, \omega^1(h)(g) = h(\delta g \delta^{-1}), g \in I(L), h \in \mathrm{Hom}(I(L), E')$$

Si on applique le lemme (2.2.2.2), on obtient la description de κ: $\mathbb{F}(E') \to \mathbb{F}(E)$ suivante:

$$\kappa_1 = Id_E: E' \to E, \kappa_2(h)(g) = h(\delta g \delta^{-1}), g \in I(L), h \in \mathrm{Hom}\ (I(L), E').$$

d'où $(t_1(E), t_2(E)) = \kappa \circ \mathbb{F}(\lambda)$ est bien celui de l'énoncé du théorème (3.2.1).

Remarque (3.3.3). Le théorème (3.2.1) et le théorème (3.2.2) restent valables pour un corps de base quelconque. Il est possible de traiter le cas des courbes réductibles avec les techniques précédentes. Ceci sera l'objet d'un prochain travail (voir [MAI 1]).

(3.4) *Un exemple*

(3.4.1) Soit f: $X = \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ le polynôme $f(x, y) = x^2 - y^3$. Le groupe fondamental L de la fibre de Milnor $f^{-1}(1)$ est libre de range $\mu = 2$. A partir d'une projection générale (par ex. $(x, y) \mapsto x$) et en considérant le diagramme de Cerf ([LÊ 3]) on trouve deux générateurs a, b de façon que l'homomorphisme ϱ de (1.1.2) est determiné par:

$$\varrho(\delta)(a) = b^{-1}, \quad \varrho(\delta)(b) = ba$$

et le générateur positif γ de L^{∂} coïncide avec le commutateur $bab^{-1}a^{-1}$.

Par conséquent, on a une présentation:

$$G = \langle a, b, \delta; \delta a \delta^{-1} = b^{-1}, \delta b \delta^{-1} = ba\rangle. \tag{3.4.1.1}$$

Soit ε: $G \to GL(E)$ un représentation complexe de dimension finie de G. Posons: $A = \varepsilon(a)$, $B = \varepsilon(b)$, $\Delta = \varepsilon(\delta)$. La présentation (3.4.1.1) nous permet d'expliciter le foncteur $\mathbb{F}$ du th. (3.2.1):

$$\mathbb{F}(E) \simeq \left(E, E^2, \begin{pmatrix} A - I \\ B - I \end{pmatrix}, (B - BAB^{-1}A^{-1}, I - BAB^{-1})\right) \quad (3.4.1.2)$$

ainsi que:

$$t_1(E) = \Delta^{-1}, t_2(E) = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta^{-1}B^{-1} \\ \Delta^{-1}B & \Delta^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.4.1.3)$$

Ceci nous fournit une catégorie $\mathscr{C}'_f$ de diagrammes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie (carquois), équivalente à $\mathscr{C}_f$ et donc à Perv($\mathbb{C}^2$; Σ') (voir th. (3.2.2)). On laisse le lecteur le soin d'écrire la combinatoire de ces diagrammes.

(3.4.2) Avec les notations précedentes, prenons $E = \mathbb{C}^2$ et $\varepsilon_{s,t}$ la représentation complexe de dimension 2 donnée par:

$$\varepsilon_{s,t}(a) = \varepsilon_{s,t}(b) = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{pmatrix} \varepsilon_{s,t}(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & s \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \theta^3 = 1, \theta \neq 1.$$

où s, $t \in \mathbb{C}^*$.

Il est facile de voir que $E_{s,t} = (E, \varepsilon_{s,t})$ est une représentation irréductible. Soit $\mathscr{L}_{s,t}$ le système local sur X associé à $E_{s,t}$. A l'aide du corollaire (3.2.6), nous allons calculer le cycle caractéristique du complexe d'intersection $IC(\mathscr{L}_{s,t})$:

$$\mathrm{Ch}(IC(\mathscr{L}_{s,t})) = \mu_0 T^*_X(X) + \mu_1 \overline{T^*_{X_0\setminus\{0\}}(X)} + \mu_2 T^*_0(X)$$

$$\mu_0 = \dim_{\mathbb{C}}(E_{s,t}) = 2$$

$$\mu_1 = rg(t_1(E_{s,t}) - 1) = rg(\Delta^{-1} - 1) = \begin{cases} 2 \text{ si } st \neq 1 \\ 1 \text{ si } st = 1 \end{cases}$$

$$\mu_2 = rg(t_2(E_{s,t}) - 1) - \mu \cdot \mu_0 + (e - 1)rg(t_1(E_{s,t}) - 1)$$

$$= \cdots = \begin{cases} 2 \text{ si } st \neq 1 \\ 0 \text{ si } st = 1. \end{cases}$$

d'où

$$\mathrm{Ch}(IC(\mathscr{L}_{s,t})) = \begin{cases} 2T_X^*(X) + 2\overline{T^*_{X_0\setminus\{0\}}(X)} + 2T_0^*(X) & \text{si } st \neq 1 \\ 2T_X^*(X) + \overline{T^*_{X_0\setminus\{0\}}(X)} & \text{si } st = 1 \end{cases}$$

REMARQUE (3.4.3). Il est possible de donner des présentations effectives du type (3.3.1.1) dans le cas $f(x, y) = x^p - y^q$ (singularités de Brieskörn-Pham), et donc on peut expliciter $(\mathbb{F}, (t_1, t_2))$ comme dans (3.4.1.2) et (3.4.1.3). En fait on peut espérer avoir de telles explicitations en tout généralité à l'aide des calculs de [A'C] et [LÊ 3], mais l'auteur n'a pas eu le courage de le faire.

Remerciements

A Zoghman Mebkhout, qui m'appris avec une patience infinie le 'contenu' et la 'philosophie' de cette théorie si passionante. A Lê Dũng Tráng, qui m'a lancé dans cetter ligne de recherche. A Jean Louis Verdier, qui m'a proposé d'étudier l'exemple (3.4.2).

References

[A'C] N. A'Campo, Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, *Invent. Math.* 20 (1973) 147–169.

[B-B-D] A.A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne, Faisceaux pervers, *Astérisque* vol. 100, *Soc. Math. de France.*

[BDM] L. Boutet de Monvel, $\mathscr{D}$-Modules holonomes réguliers en une variable, Appendice II à l'exposé IV.3, dans le livre *Mathématique et Physique, Progress in Math.*, vol. 37, Birkhäuser (1983).

[B-M] J. Briançon et P. Maisonobe, Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable, *Enseign. Math.* 30 (1984).

[BRY 1] J.L. Brylinski, *Contributions à la théorie des groupes*, Thèse de doctorat d'Etat, Université d'Orsay (1981).

[BRY 2] J.L. Brylinski, Transformations canoniques, Dualité projective, Théorie de Lefschetz, Transformation de Fourier et sommes trigonométriques, *Astérisque* 140–141 (1986).

[DEL] P. Deligne, lettre à R. MacPherson (1981).

[G-G-M] A. Galligo, M. Granger et P. Maisonobe, $\mathscr{D}$-Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal, *Ann. Inst. Fourier* 35 (1985) 1–48.

[GE-KH] I.M. Gelfand and S.M. Khoroskin, Algebraic description of some categories of $\mathscr{D}$-modules, *Funct. Anal. Appl.* 19 (1985) 208–210.

[GO-MA 1] M. Goresky and R. MacPherson, Intersection homology II, *Invent. Math.* 71 (1983) 77–129.

[GO-MA 2] M. Goresky and R. MacPherson, Morse Theory and intersection homology, *Astérisque* 101 (1983) 135–192.

[G-M] M. Granger et P. Maisonobe, Faisceaux pervers relativement à un cusp, *C.R.A.S. Paris* 299, série I (1984) 567–570.

[HAR] R. Hartshorne, Residues and duality, *Lect. Notes in Math.* vol. 20, Springer Verlag.

[KAS 1] M. Kashiwara, On the maximally overdetermined systems of linear differential equations, *Pub. R.I.M.S. Univ. Kyoto* 10 (1975) 563–579.

[KAS 2] M. Kashiwara, *Systems of microdifferential equations, Progress in Math.*, vol. 34, Birkhäuser (1983).

[KAS 3] M. Kashiwara, The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, *R.I.M.S., Kyoto Univ.* 20 (1984) 319–365.

[LÊ 1] Lê Dũng Tráng, Sur les noeuds algébriques, *Comp. Math.* 25 (1972) 281–321.

[LẼ 2] Lê Dũng Tráng, Three lectures on local monodromy, Aarhus Universitet, *Lect. Notes Series* No. 43 (1974).

[LÊ 3] Lê Dũng Tráng, *The geometry of the monodromy theorem*, C.P. Ramanujan: a tribute, Tata Inst. (1978) 157–173.

[LẼ-CHE] Lê Dũng Tráng et D. Cheniot, Quelques remarques sur les deux exposés précédents, *Astérisque* 7–8 (1973) 253–261.

[LÊ-ME] Lê Dũng Tráng et Z. Mebkhout, Variétés caractéristiques et variétés polaires, *C.R.A.S.* 296 (1983) 129–132.

[MA-VI 1] R. MacPherson and K. Vilonen, Construction élémentaire des faisceaux pervers, *C.R.A.S.*, t. 299, Série I (1984) 443–446.

[MA-VI 2] R. MacPherson and K. Vilonen, Elementary construction of perverse sheaves, *Invent. Math.* 84 (1986) 403–436.

[MA-VI 3] R. MacPherson and K. Vilonen, Perverse sheaves with singularities along the curve $Y^n = X^m$, preprint (1985).

[MAI 1] P. Maisonobe, *$\mathcal{D}$-Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane*, Thèse de doctorat d'Etat, Univ. de Nice (1985).

[MAI 2] P. Maisonobe, Faisceaux pervers sur $\mathbb{C}$ relativement à $\{0\}$ et couple E $\rightleftarrows$ F, preprint Univ. Nice (1986).

[MAL] B. Malgrange, Cours à l'Université de Grenoble, 1982.

[MEB 1] Z. Mebkhout, Théorèmes de bidualité locale pour les D-modules holonomes, *Ark. Mat.* 20 (1982) 111–124.

[MEB 2] Z. Mebkhout, Sur le problème de Riemann-Hilbert, *C.R.A.S.* 290 (1980) 415–418.

[MEB 3] Z. Mebkhout, Une équivalence de catégories, *Comp. Math.* 51 (1984) 51–62.

[MEB 4] Z. Mebkhout, Une autre équivalence de catégories, *Comp Math.* 51 (1984) 63–88.

[MI] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. of Math. Studies*, No. 61, Princeton Univ. Press (1968).

[NAR 1] L. Narváez Macarro, *Faisceaux pervers dont le support singulier est le germe d'une courbe plane irréductible*, Thèse de troisième cycle, Université de Paris VII (1984).

[NAR 2] L. Narváez Macarro, Un calcul de cycles évanescents par rapport aux courbes planes irréductibles. Applications aux faisceaux pervers, *C.R.A.S.* 301 (1985) 197–200.

[PHA] F. Pham, *Singularités des systèmes de Gauss-Manin, Progress in math.*, vol. No. 2, Birkhäuser (1979).

[S.G.A. 7] Séminaire de Géometrie algébrique de Bois Marie 1967-1969, partie II, par P. Deligne et N. Katz, *Lect. Notes in Math.*, No. 340, Springer Verlag (1973).

[VER] J.L. Verdier, Extension of a perverse sheaf over a closed subspace, *Astérisque* No. 130 (1985) 210–217.