

# COMPOSITIO MATHEMATICA

C. BAVARD

## **Courbure presque négative en dimension 3**

*Compositio Mathematica*, tome 63, n° 2 (1987), p. 223-236

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1987\\_\\_63\\_2\\_223\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__63_2_223_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Courbure presque négative en dimension 3

C. BAVARD

28, Allée Champréau, Chevry II, F-91190 Gif sur Yvette, France

Received 8 April 1986, accepted in revised form 9 March 1987

### Introduction

Soit  $M^n$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$  et  $K$  sa courbure sectionnelle. Il est bien connu que si  $K \leq 0$ , le revêtement universel de  $M^n$  est  $\mathbb{R}^n$ . Cette propriété est vraie également pour les variétés presque plates de Gromov, vérifiant  $|K|(\text{diamètre})^2 \leq \varepsilon(n)$ . Mais la conclusion ne subsiste pas si on suppose seulement  $M^n$  à courbure presque négative, i.e.  $M^n$  admet des métriques avec  $K(\text{diamètre})^2 \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  arbitraire; en effet la sphère  $S^3$  possède de telles métriques (exemple de Gromov, voir [3]).

Le cas  $n = 2$  est plutôt spécial car les surfaces à courbure presque négative sont déjà hyperboliques ou plates: pour  $S^2$  et  $\mathbb{R}P^2$  on a toujours  $\text{Max } K \cdot (\text{diamètre})^2 \geq (\pi/2)^2$  ( $\pi^2$  pour  $S^2$ ). Par contre, en dimension 3, l'hypothèse de courbure presque négative n'a aucune influence sur la topologie: c'est ce qui est établi dans ce travail. Un premier pas dans cette direction avait été de construire sur  $M^3$  fermée orientable des métriques avec  $K \leq 1$  et rayon d'injectivité partout  $\leq \varepsilon$  (et même volume  $\leq \varepsilon$ ) [1]. En fait  $M^3$  admet des métriques qui sont à la fois à  $K(\text{diamètre})^2 \leq \varepsilon$  et de petit volume:

**THÉORÈME.** *Soit  $M^3$  une variété fermée orientable de dimension 3. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe sur  $M^3$  une métrique telle que:*

$$K \leq 1, \text{ Diam} \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \text{Vol} \leq \varepsilon.$$

Le résultat s'obtient en combinant les méthodes de chirurgie de [3] avec une décomposition en livre ouvert utilisée dans [1].

### 0. Livres ouverts (voir [5] ou [7])

Soit  $A$  une variété à bord et  $\psi$  un difféomorphisme de  $A$  qui est l'identité près du bord. Posons  $F =$  quotient de  $A \times [0, 1]$  par la relation  $(\psi(x), 0) \sim (x, 1)$ ,

fibré sur le cercle  $\mathbb{S}^1$  dont le bord est  $\partial A \times \mathbb{S}^1$ . Puis recollons  $F$  et  $\partial A \times \mathbb{D}^2$  en identifiant  $\partial A \times \partial \mathbb{D}^2$  avec  $\partial F = \partial A \times \mathbb{S}^1$ . Une variété  $M$  est un *livre ouvert* (ou admet une décomposition en livre ouvert) si elle est difféomorphe à une variété du type précédent.  $A$  est la *page* (ou générateur) et  $\partial A$  la *reliure* (ou axe) de  $M$ .

**THÉORÈME (Alexander).** *Toute variété  $M^3$  de dimension 3 fermée orientable est un livre ouvert.*

Voir [7] p. 340 pour une démonstration.

*Remarque.* Si  $\Psi$  est isotope à  $\Phi$  dans  $\text{Diff}(A, \text{rel } \partial A)$ , groupe des difféomorphismes  $\varphi: A \rightarrow A$  tels que  $\varphi|_{\partial A} = id$ , alors le livre ouvert  $M_\psi$  construit avec  $\psi$  est difféomorphe à  $M_\phi$ . En effet  $A \times [0, 1]/\psi$  est difféomorphe à  $A \times [0, 1]/\Phi$  par un difféomorphisme qui est l'identité près du bord  $\partial A \times \mathbb{S}^1$ , donc s'étend en un difféomorphisme de  $M_\psi$  sur  $M_\phi$ .

En fait toute variété  $M^3$  fermée orientable est un livre ouvert de page  $A$  avec  $\chi(A) \leq 0$ . Quand  $\chi(A) > 0$ ,  $A$  est le disque  $\mathbb{D}^2$  et comme  $\text{Diff}(\mathbb{D}^2, \text{rel } \partial \mathbb{D}^2)$  est contractile (théorème de Smale), on peut prendre  $\psi = \text{identité}$ . On constate alors que  $M^3$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^3$ , qui admet bien d'autres décompositions en livre ouvert (voir [7] chapitre 10) par exemple de page  $A = \text{tore moins l'intérieur d'un disque}$ .

Pour la suite on fixe une décomposition en livre ouvert de  $M^3$  de page  $A$ ,  $\chi(A) \leq 0$ , et dont  $F$  désignera la partie fibrée.

## 1. Familles de métriques à $K \leq 0$ sur la page $A$

1.1. Considérons d'abord le cas où  $\chi(A) < 0$ , et soit  $h$  une métrique hyperbolique sur  $A$ . Il existe une famille lisse de métriques hyperboliques  $h_s (s \in I = [0, 1])$  sur  $A$  telle que

$$h_0 = h \quad \text{et} \quad h_1 = \psi^*h \quad \text{avec} \quad \psi \in \text{Diff}(A, \text{rel } \partial A) \quad (*)$$

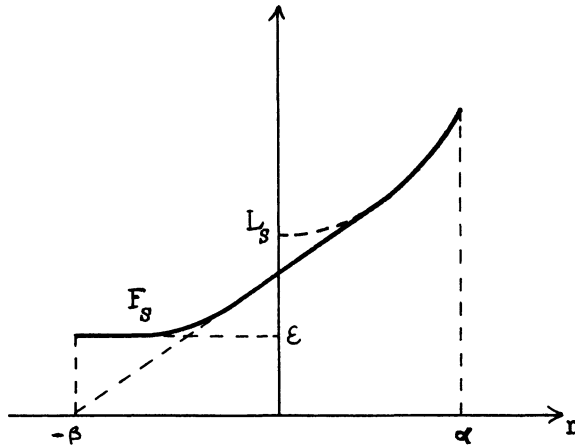
Il suffit d'avoir une telle famille  $(Dh_s)$  entre les doubles de  $(A, h)$  et  $(A, \psi^*h)$ , puis en coupant le double  $DA$  de  $A$  suivant les uniques géodésiques de  $Dh_s$  isotopes aux composantes de  $\partial A$  on obtient  $h_s$  par restriction. Or pour  $DA$ , l'espace des métriques riemanniennes (qui est connexe) se rétracte sur l'espace des métriques à courbure  $\equiv -1$ .

L'étape suivante consiste à préparer le bord des métriques  $h_s$  en vue d'un recollement ultérieur:

LEMME 1. Soit  $h_s$  ( $s \in I$ ) une famille lisse de métriques hyperboliques vérifiant (\*) sur une surface à bord  $A$ .  $\varepsilon$  étant donné et assez petit on peut déformer  $h_s$  en  $g_s$  telle que:

- (1) chaque composante  $c$  de  $\partial A$  a une voisinage isométrique au produit  $\mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z} \times [0, a[$ ,  $a > 0$ ; en particulier  $\text{long}^{g_s}(c) = \varepsilon$ ;
- (2) pour tout  $s \in I$   $\text{Vol}(g_s) \leq V$  et  $\text{Diam}(g_s) \leq D$ , où  $V$  et  $D$  sont des constantes (indépendantes de  $\varepsilon$ );
- (3)  $K(g_s) \leq 0$ ;
- (4)  $g_1 = \phi^*g_0$  où  $\phi$  est isotope à  $\psi$  dans  $\text{Diff}(A, \text{rel } \partial A)$ .

*Preuve.* Pour  $\alpha > 0$ , l'ensemble  $\{x \in A : \text{dist}^{h_s}(x, \partial A) < \alpha\}$  sera noté  $U_\alpha^s(\partial A)$ . Fixons une composante  $c$  de  $\partial A$ . La métrique  $h_s$  au voisinage de  $c$  s'écrit  $dr^2 + (L_s \text{ch } r)^2 d\theta^2$  avec  $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $r = \text{distance à } c$  ( $0 \leq r < \alpha$ ),  $L_s = \text{long}^{h_s}(c)$ , où  $\alpha$  est choisi indépendant de  $c$  et de  $s$  (par compacité) et tel que  $\psi \equiv \text{identité sur } U_0^s(\partial A)$ . En supposant  $\varepsilon$  assez petit, on peut changer la famille  $(L_s \text{ch } r)_{s \in I}$  en  $(F_s)_{s \in I}$  suivant le diagramme:



$F_s \in C^\infty[-\beta, \alpha]$  où  $\beta$  est indépendant de  $s$  et  $F_s'' \geq 0$  (pour plus de détails voir [1]). Ainsi la métrique  $dr^2 + F_s^2 d\theta^2$  est à courbure  $\leq 0$ . Cette construction s'applique à chaque composante du bord avec le même  $\beta$  (en prolongeant un peu  $F_s$ ) et donne une métrique  $g'_s$  sur  $A' \supset A$ ; posons alors  $g_s = d^*g'_s$  où  $d: A \rightarrow A'$  est un difféomorphisme qui vaut l'identité en dehors de tous les  $U_\alpha^s(\partial A)$  ( $s \in I$ ). On a  $F_s \equiv \varepsilon$  sur un voisinage de  $-\beta$  (indépendant de  $s$ ), d'où (1), et pour  $r \in [-\beta, 0]$

$$F_s(r) \leq L = \text{Max} \{ \text{long}^{h_s}(c); s \in I, c \in \pi_0(\partial A) \}$$

donc

$$\text{Vol } g_s \leq \text{Max}_{s \in I} (\text{Vol } h_s) + n\beta L, \quad n = \text{Card } \pi_0(\partial A).$$

Sur  $A - U_s^\alpha(\partial A)$ ,  $h_s$  n'a pas changé: il en résulte que

$$\text{Diam } g_s \leq \text{Max}_{s \in I} (\text{Diam } h_s) + 2(\alpha + \beta).$$

Remarquer enfin que  $F_0 = F_1$ , donc en prolongeant  $\psi$  en  $\psi' \in \text{Diff}(A')$  par  $\psi' = \text{identité sur } A' - A$ , on a bien (4) avec  $\phi = d^{-1}\psi'd$ . Ce qui achève la preuve.

On appliquera ce lemme au 2. avec  $\varepsilon^2$  à la place de  $\varepsilon$ .

1.2. Cas où  $\chi(A) = 0$  ( $A$  est un anneau)

En fait le Lemme 1 suffit pour la suite de la démonstration car il existe toujours sur  $M^3$  une décomposition en livre ouvert de reliure  $\partial A$  connexe ([7] p. 341), donc (le cas du disque étant déjà écarté) à  $\chi(A) < 0$ . Mais quand  $A$  est un anneau, on peut montrer de façon plus explicite une propriété analogue au Lemme 1. Prenons  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1\}/\Gamma$  où  $\Gamma = (0, 1)\mathbb{Z}$  sous-groupe de  $\mathbb{R}^2$ . Dans  $\text{Diff}(A, \text{rel } \partial A)$  tout élément est isotope à un difféomorphisme de la forme  $\psi(x, y) = (x + m\sigma(y), y)$  modulo  $\Gamma$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma \in C^\infty[0, 1]$  avec  $\sigma \equiv 0$  près de 0,  $\sigma \equiv 1$  près de 1. On a alors le:

LEMME 1'. Soit  $\varepsilon \leq 1$ . Il existe sur l'anneau  $A$  une famille lisse de métriques plates  $g_s$  ( $s \in I$ ) vérifiant les propriétés (1) à (4) du Lemme 1.

Preuve. Soit  $g_0$  définie par  $\varepsilon^2(dx^2 + dy^2)$ ; on constate alors que  $g_s: \varepsilon^2(dx^2 + 2sm\sigma'(y)dx dy + [1 + (sm\sigma'(y))^2]dy^2)$   $s \in I$  est plate et que  $g_1 = \psi^*g_0$ . De plus  $g_s$  est une métrique produit près de  $\partial A$  (où  $\sigma'(y) = 0$ ), et  $\text{Vol } g_s = \varepsilon^2$ ,

$$\text{Diam } g_s \leq (\varepsilon/2)(1 + [1 + (m \text{Max } |\sigma'|)^2]^{1/2}).$$

2. Fibrés en surfaces sur le cercle (ou construction d'une métrique sur  $F$ )

2.1. Considérons  $g_s$  une famille lisse de métriques sur  $A$  telle que  $g_1 = \psi^*g_0$

et  $\sigma$  une fonction comme au 1.2. Posons  $\varphi(t) = \varphi_\delta(t) = \sigma(\delta t)$  pour  $0 \leq t \leq \delta^{-1}$  ( $\delta > 0$  arbitraire). Alors

$$\begin{cases} \|\varphi'\| \leq \delta \|\sigma'\| \\ \|\varphi''\| \leq \delta^2 \|\sigma''\| \end{cases} \quad (\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty = \text{Sup})$$

Etant donné  $\varepsilon > 0$ , la métrique  $G_\delta^\varepsilon: dt^2 + \varepsilon^2 g_{\varphi(t)}$  sur  $[0, \delta^{-1}] \times A$  induit une métrique sur le fibré  $F$ , alors noté (en tant que variété riemannienne)  $F_\delta^\varepsilon$ .

LEMME 2. La courbure sectionnelle de  $F_\delta^\varepsilon$  vérifie:

$$K(F_\delta^\varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} \hat{K}^+ + C(\delta^2 + \delta\varepsilon^{-1})$$

où  $\hat{K}^+ = \text{Max} \{K_x(g_s); s \in I, x \in A\}$  et  $C =$  constante indépendante de  $\delta$  et  $\varepsilon$ .

*Démonstration.* La projection  $F \rightarrow \mathbb{R}/\delta^{-1}\mathbb{Z}$  est une submersion riemannienne. Comme la distribution horizontale est intégrable le tenseur courbure s'exprime uniquement au moyen du champ de tenseur  $T$  sur  $F_\delta^\varepsilon$  défini par  $T(E_1, E_2) = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}E_1}\mathcal{V}E_2 + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}E_1}\mathcal{H}E_2$ ,  $E_1, E_2$  champs de vecteurs et  $\mathcal{H}$  (resp.  $\mathcal{V}$ ) = projection sur les horizontales (resp. verticales) —  $T \equiv 0$  quand les fibres sont totalement géodésiques ([6]).

ASSERTION. Pour tout  $x \in F_\delta^\varepsilon$   $\|T_x\| = \text{Sup}_{|\xi, \eta| \leq 1} |T_x(\xi, \eta)| \leq C_1 \delta$   $C_1 =$  constante indépendante de  $\delta$  et  $\varepsilon$ ,  $|\cdot| = (G_\delta^\varepsilon(\cdot, \cdot))^{1/2}$ .

Fixons une fois pour toutes un nombre fini de cartes  $(t, u, v)$  de  $[0, \delta^{-1}] \times A$  où la métrique  $G_\delta^\varepsilon$  s'écrit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 g_{uu} & \varepsilon^2 g_{uv} \\ 0 & \varepsilon^2 g_{uv} & \varepsilon^2 g_{vv} \end{bmatrix} \tag{1}$$

avec  $g_{uu}, g_{uv}, g_{vv}$  fonctions de  $(s = \varphi(t), u, v)$ . Soit  $\mathcal{M}$  un majorant commun de  $g_{ij}, g^{ij}, \partial_s g_{ij}, \partial_s g^{ij}, \partial_k g_{ij}, \partial_k g^{ij}, \partial_s^2 g_{ij}, \partial_s^2 g^{ij}, \partial_{kl}^2 g_{ij}, \partial_{kl}^2 g^{ij}$   $i, j, k, l \in \{u, v\}$ .  $\mathcal{M}$  s'obtient à partir de  $g_s$ , donc est indépendant de  $\delta$  et  $\varepsilon$ .

Dans chaque carte  $(u, v)$  définissons la norme  $N$ :

$$N^2(\alpha\partial u + \beta\partial v) = \alpha^2 + \beta^2$$

En choisissant  $\mathcal{M}$  assez grand on a pour toutes les cartes et tout point  $x$  de chaque carte:

$$\mathcal{M}^{-1}N(\xi_x) \leq (G_\delta^1(\xi_x, \xi_x))^{1/2} \leq \mathcal{M}N(\xi_x) \quad \forall \xi_x \in T_x A,$$

d'où

$$\varepsilon \mathcal{M}^{-1}N(\xi_x) \leq |\xi_x| \leq \varepsilon \mathcal{M}N(\xi_x) \tag{2}$$

$T$  s'exprime à l'aide des symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  ( $i, j, k \in \{t, u, v\}$ ) calculés avec les composantes de (1):

$$\begin{cases} T(\partial t, \cdot) \equiv 0 \\ T(\partial u, \partial u) = \Gamma_{uu}^t \partial t \\ T(\partial u, \partial t) = \Gamma_{ut}^u \partial u + \Gamma_{ut}^v \partial v \end{cases}$$

Ainsi  $|T(\partial u, \partial u)| \leq 2^{-1} \mathcal{M} \|\sigma'\| \varepsilon^2 \delta \leq 2^{-1} \mathcal{M}^3 \|\sigma'\| \delta |\partial u|^2$  et de même avec  $(\partial u, \partial v)$  ou  $(\partial v, \partial v)$  à la place de  $(\partial u, \partial u)$ . Puis

$$|\Gamma_{ut}^u| \leq \mathcal{M}^2 \|\sigma'\| \delta \quad (\text{idem pour } \Gamma_{ut}^v) \tag{3}$$

d'où  $|T(\partial u, \partial t)| \leq \mathcal{M}^2 \|\sigma'\| (1 + \mathcal{M}^2) \delta |\partial u| |\partial t|$  et même inégalité pour  $T(\partial v, \partial t)$ . On a bien

$$|T(\partial i, \partial j)| \leq C_0 \delta |\partial i| |\partial j| \quad i, j \in \{t, u, v\}, C_0 = \text{constante.} \tag{4}$$

Maintenant soit  $U$  et  $V$  verticaux tels que  $|U|^2$  et  $|V|^2 \leq 1$ . En utilisant (2) et (4) on trouve  $|T(U, V)| \leq 4C_0 \mathcal{M}^4 \delta$  et  $|T(U, \partial t)| \leq 2\mathcal{M}^2 C_0 \delta$ . Ce qui prouve l'assertion.

### 2.2. Contrôle de $K(F_\delta^e)$

Tout 2-plan tangent admet une base orthonormée de la forme  $(U, V + \lambda \partial t)$  où  $U$  et  $V$  sont verticaux et  $|U|^2 = |V|^2 + \lambda^2 = 1, \langle U, V \rangle = 0$ ; sa courbure est  $R(U, V, V, U) + 2\lambda R(U, V, \partial t, U) + \lambda^2 R(U, \partial t, \partial t, U)$ . On peut exprimer successivement chaque terme à l'aide des formules de O'Neill:

1.  $R(U, V, V, U) = \hat{R}(U, V, V, U) + |T(U, V)|^2 - \langle T(U, U), T(V, V) \rangle$   
( $\hat{R}$  = tenseur courbure de la fibre), d'où:

$$R(U, V, V, U) \leq \frac{\hat{R}(U, V, V, U)}{|U \wedge V|^2} + 2C_1^2 \delta^2.$$

2.  $R(U, V, \partial t, U) = \langle \nabla_V T(U, U), \partial t \rangle - \langle \nabla_U T(V, U), \partial t \rangle$  en particulier  $R(\partial u, \partial v, \partial t, \partial u) = \langle \nabla_{\partial v} T(\partial u, \partial u), \partial t \rangle - \langle \nabla_{\partial u} T(\partial v, \partial u), \partial t \rangle$  où  $|\nabla_{\partial v} T(\partial u, \partial u), \partial t \rangle = \partial v \cdot \Gamma'_{uu} - 2\langle T(\mathcal{V}\nabla_{\partial v}\partial u, \partial u), \partial t \rangle$ . Or  $|\partial v \cdot \Gamma'_{uu}| \leq Cte \delta \varepsilon^2$  et  $|\langle T(\mathcal{V}\nabla_{\partial v}\partial u, \partial u), \partial t \rangle| \leq 2\mathcal{M}^3 C_1 \delta \varepsilon^2$ . Donc  $|R(\partial u, \partial v, \partial t, \partial u)| \leq Cte' \delta \varepsilon^2$  (idem pour  $R(\partial u, \partial v, \partial t, \partial v)$ ). En exprimant  $U$  et  $V$  dans la base  $(\partial u, \partial v)$  et en utilisant (2) on en déduit que

$$|R(U, V, \partial t, U)| \leq 4 Cte' \delta \varepsilon^2 (\mathcal{M}\varepsilon^{-1})^3 = C_2 \delta \varepsilon^{-1} \quad (C_2 = \text{constante}).$$

3.  $R(U, \partial t, \partial t, U) = \langle \nabla_{\partial t} T(U, U), \partial t \rangle - |T(U, \partial t)|^2$   
 $|\langle \nabla_{\partial t} T(\partial u, \partial u), \partial t \rangle| \leq |\partial t \cdot \Gamma'_{uu}| + |T(\mathcal{V}\nabla_{\partial t}\partial u, \partial u) + T(\partial u, \mathcal{V}\nabla_{\partial t}\partial u)|$   
 où le premier terme est majoré par  $2^{-1} \delta^2 \varepsilon^2 \mathcal{M}(\|\sigma'\| + \|\sigma'\|^2)$  et le second par

$$2C_1 \delta |\partial u| |\mathcal{V}\nabla_{\partial t}\partial u| \leq 4C_1 \mathcal{M}^4 \|\sigma'\| \delta^2 \varepsilon^2 \text{ d'après (2) et (3).}$$

Ainsi  $|\langle \nabla_{\partial t} T(\partial u, \partial u), \partial t \rangle| \leq Cte'' \delta^2 \varepsilon^2$ ; il en résulte que

$$|\langle \nabla_{\partial t} T(U, U), \partial t \rangle| \leq 4 Cte'' \delta^2 \varepsilon^2 (\mathcal{M}\varepsilon^{-1})^2 = C_3 \delta^2$$

puis  $|R(U, \partial t, \partial t, U)| \leq (C_3 + C_1^2) \delta^2$ . D'où le Lemme 2.

### 2.3. Conséquence

$\varepsilon$  étant donné, prenons pour notre livre ouvert  $M^3$  (à  $\chi(A) \leq 0$ ) les métriques  $g_\varepsilon$  des Lemmes 1 et 1' avec  $\varepsilon^2$  au lieu de  $\varepsilon$ . Alors la construction 2.1 donne pour  $\delta = \varepsilon^{3/2}$  une métrique sur  $F$  (la fibre est petite et la base longue) dont la géométrie est contrôlée comme suit:

$$K(F_\delta^\varepsilon) \leq 1 \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit}$$

$$\text{Vol } F_\delta^\varepsilon \leq \varepsilon^{1/2} V.$$

De plus le diamètre (dans  $F_\delta^\varepsilon$ ) de chaque fibre est  $\leq \varepsilon D$  et un voisinage de  $\partial F_\delta^\varepsilon$  est isométrique à  $n$  ( $= \text{Card } \pi_0(\partial A)$ ) copies de  $(\mathbb{R}/\varepsilon^{-3/2}\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\varepsilon^3\mathbb{Z}) \times [0, a[$ .

## 3. Métrique sur le voisinage tubulaire de la reliure

3.1. La reliure  $\partial A$  a un voisinage tubulaire difféomorphe à  $\partial A \times \mathbb{D}^2$ . Sur chacune de ses composantes nous allons construire une métrique à  $K \leq 1$  et ayant une géodésique simple fermée  $\varepsilon$ -dense.

LEMME 3. Soit  $\varepsilon, R, L$  donnés avec  $\varepsilon \leq 1$  et  $R\varepsilon^{-1} \geq 2$ . Alors il existe sur  $\mathbb{D}^2$  une métrique telle que:

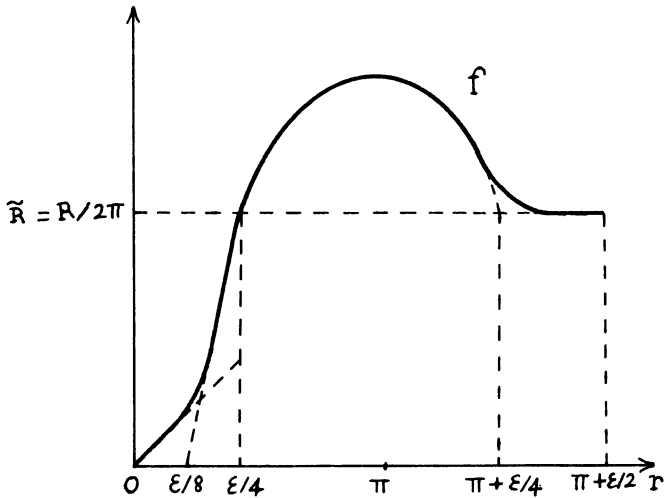


- (1)  $K \leq 1$
- (2) le voisinage du bord est isométrique à  $]0, \alpha] \times \mathbb{R}/R\mathbb{Z}$  ( $\alpha > 0$ , dépend de  $\varepsilon$ )
- (3) il existe  $\gamma$  géodésique fermée  $\varepsilon$ -dense
- (4) la longueur de  $\gamma$  est  $\geq L$
- (5) Volume  $< 33 R \varepsilon^{-1}$ .

*Preuve.* La métrique cherchée sera de révolution

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\theta^2 \quad \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \tag{*}$$

On part avec une fonction  $f$  qui raccorde les droites  $y = r$  et  $y = \tilde{R}(8\varepsilon^{-1}r - 1)$  ( $\tilde{R} = R/2\pi$ ) avec  $f'' \geq 0$  sur  $[0, \varepsilon/4]$  (possible puisque  $R\varepsilon^{-1} \geq 2 > \pi/2$ ) et qui vaut  $f(r) = \tilde{R}(1 + 8\varepsilon^{-1} \sin(r - \varepsilon/4))$  sur  $[\varepsilon/4, \pi + \varepsilon/4]$ . Puis on déforme  $f$  au voisinage de  $r = \varepsilon/4$  et de  $r = \pi + \varepsilon/4$  pour la rendre lisse et satisfaire (2) (avec toujours  $K \leq 1$ ), en conservant sa valeur sur  $[\varepsilon/2, \pi]$ :



On appelle  $\mathcal{D}$  le disque de révolution donné par (\*). Noter que (5) est vérifiée:  $\text{Vol } \mathcal{D} \leq 2\pi(\pi + \varepsilon/2)\tilde{R}(1 + 8\varepsilon^{-1}) < 33R\varepsilon^{-1}$ . Définissons  $\gamma(s) = (r(s), \theta(s))$  géodésique de vitesse 1 par  $\gamma(0) = (\varepsilon/2, 0)$  et  $\gamma'(0) = [f(\varepsilon/2)]^{-1} \partial\theta$ . Alors

$$\begin{cases} f^2(r) \theta'_s \equiv C & C = \text{constante} \\ (r'_s)^2 + f^2(r) (\theta'_s)^2 \equiv 1 \end{cases}$$

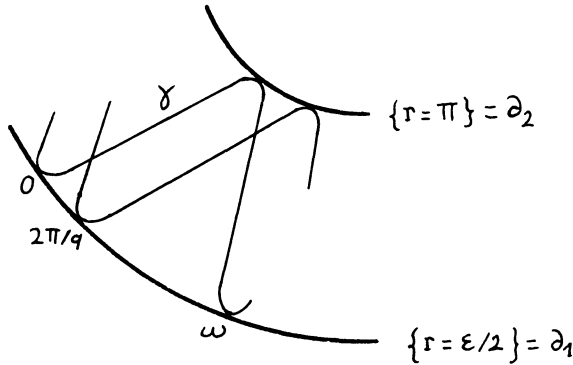
Comme  $\theta(s)$  n'est pas constant,  $r(s)$  parcourt tout l'intervalle  $[r_1, r_2]$   $r_1 = \varepsilon/2$ ,  $r_2 = \pi$ , et  $C = f(r_1) = f(r_2)$  (voir par exemple [4] ou [2] p. 97); de plus  $r'_s \neq 0$  sur  $]r_1, r_2[$ . Le premier angle  $\omega$  où  $\gamma$  revient sur le parallèle  $r = r_1$  est donc:

$$\omega = 2 \int_{r_1}^{r_2} \theta'_s / r'_s \, dr = 2C \int_{r_1}^{r_2} f^{-1}(r)(f^2(r) - C^2)^{-1/2} dr.$$

Soit maintenant  $N$  un entier naturel et  $\eta > 0$ . L'ensemble  $\{p/q$  rationnel,  $|p/q - \omega/2\pi| \leq \eta$  et  $0 < q < N\}$  est fini; par conséquent  $\{p/q$  rationnel,  $p$  et  $q$  premiers entre eux et  $q \geq N\}$  est dense dans un  $\eta$ -voisinage de  $\omega/2\pi$ . Or  $\omega$  est fonction strictement décroissante de  $f$ , donc en changeant un peu  $f$  près de  $r = \pi/2 + \varepsilon/4$  (en conservant  $K \leq 1$ ) on peut supposer que:

$$\omega/2\pi = p/q \quad p \text{ et } q \text{ premiers entre eux, } q \text{ arbitrairement grand.}$$

On prendra  $q \geq (L/2)(\pi - \varepsilon/2)^{-1}$  et  $q \geq 9R\varepsilon^{-2}$ . Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  tels que  $\alpha p + \beta q = 1$  on a:  $\alpha\omega = 2\pi/q - 2\pi\beta$ . Ainsi  $\gamma$  est périodique, invariante par l'isométrie  $(r, \theta) \rightarrow (r, \theta + 2\pi/q)$ .



D'où long  $(\gamma) \geq 2q \text{ dist}(\partial_1, \partial_2) = 2q(\pi - \varepsilon/2) \geq L$  et la distance à  $\gamma$  de chaque point de  $\mathcal{E} = \{(\theta, r) \mid r_1 \leq r \leq r_2\}$  est majorée par  $\pi/q \text{ Max } f \leq \pi/q \cdot 9R(2\pi\varepsilon)^{-1} \leq \varepsilon/2$ . D'autre part,

- si  $x \in \{\pi \leq r \leq \pi + \varepsilon/2\}$ , alors  $\text{dist}(x, \mathcal{E}) \leq \varepsilon/2$  et  $\text{dist}(x, \gamma) \leq \varepsilon$
- si  $x \in \{r \leq \varepsilon/2\}$ , alors  $\text{dist}(x, \gamma(0)) \leq \varepsilon$ .

En conclusion,  $\gamma$  est  $\varepsilon$ -dense dans  $\mathcal{D}$ .

**3.2. COROLLAIRE** Soit  $M^3$  une variété fermée orientable décomposée en livre ouvert de page  $A$ ,  $\chi(A) \leq 0$ , et  $n = \text{Card } \pi_0(\partial A)$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il

existe sur  $M^3$  une métrique vérifiant  $K \leq 1$ ,  $\text{Vol} \leq \varepsilon$ , et avec  $n$  géodésiques simples fermées dont la réunion est  $\varepsilon$ -dense.

REMARQUES

1. On a vu que toutes les  $M^3$  fermées orientables possèdent une telle décomposition. Pour  $\mathbb{S}^3$  (le seul livre ouvert de page  $\mathbb{D}^2$ ) on obtient le même résultat avec  $n = 2$  en recollant deux tores solides construits à l'aide du Lemme 3.
2. En fait toute  $M^3$  admet une décomposition avec  $\partial A = \mathbb{S}^1$  ([7] p. 341), d'où:

COROLLAIRE'. *Le corollaire est vrai avec  $n = 1$ .*

Précisions sur les  $n$  géodésiques du corollaire:

- leur longueur peut être choisie aussi grande que l'on veut
- elles sont dans une partie de  $M^3$  où  $0 \leq K \leq 1$
- leur holonomie est l'identité
- il existe  $x \in M^3$  à distance  $\leq \varepsilon$  de chacune de ces géodésiques.

*Démonstration du corollaire.* On commence par munir la partie fibrée de  $M^3$  d'une métrique  $F_\delta^\varepsilon$  ( $\delta = \varepsilon^{3/2}$ ) comme au 2.3, en supposant  $\varepsilon$  assez petit. Puis on pose  $R = \delta^{-1} = \varepsilon^{-3/2}$  et on prend un disque  $\mathcal{D}$  comme au Lemme 3 ( $L$  arbitraire). Dans le produit riemannien  $\mathcal{D} \times \mathbb{R}/\varepsilon^3\mathbb{Z}$  soit la géodésique  $t \rightarrow \tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), t\varepsilon^3/l)$   $l = \text{long } \gamma \geq L$ .  $\tilde{\gamma}$  est simple fermée, de longueur  $\geq L$ , et  $2\varepsilon$ -dense. Comme  $\gamma, \tilde{\gamma}$  est dans une zone à  $0 \leq K \leq 1$ , et l'holonomie de  $\gamma$  étant l'identité (car  $\mathcal{D}$  orientable), il en est de même pour  $\tilde{\gamma}$ .

Enfin on recolle  $n$  exemplaires  $(\mathcal{D} \times \mathbb{R}/\varepsilon^3\mathbb{Z})_{i=1, \dots, n}$  de  $\mathcal{D} \times \mathbb{R}/\varepsilon^3\mathbb{Z}$  à  $F_\delta^\varepsilon$  en identifiant pour chacun  $\partial\mathcal{D}$  avec la base du fibré et  $\mathbb{R}/\varepsilon^3\mathbb{Z}$  avec chaque composante de  $\partial A$ . Pour la métrique obtenue on a:

$$\begin{aligned}
 &K(M^3) \leq 1 \\
 &\text{Vol } M^3 \leq \text{Vol } F_\delta^\varepsilon + n \text{Vol } \mathcal{D}\varepsilon^3 \leq \varepsilon^{1/2}(V + 33n) \\
 &\text{pour tout } x \in F_\delta^\varepsilon \text{ dist}(x, (\mathcal{D} \times \mathbb{R}/\varepsilon^3\mathbb{Z})_i) \leq \varepsilon D, \text{ donc} \\
 &\quad \text{dist}(x, \tilde{\gamma}_i) \leq \varepsilon(D + 2) \quad (i = 1, \dots, n) \\
 &\text{et } \bigcup_{i=1}^n \tilde{\gamma}_i \text{ est } \varepsilon(D + 2)\text{-dense dans } M^3.
 \end{aligned}$$

D'où le corollaire et les précisions sur les  $\tilde{\gamma}_i$ .

**4. Fin de la démonstration: plomberie et chirurgie**

4.0. Disposant du Corollaire 3.2 (avec les précisions sur les géodésiques) il n'y a plus qu'à recopier la construction donnée dans [3] pour les métriques

de Gromov sur  $\mathbb{S}^3$  à  $K \leq 1$  et diamètre  $\leq \varepsilon$ , le seul point supplémentaire pour notre cas étant le contrôle du volume.

Noter qu'on obtient en plus volume  $\leq \varepsilon$ . Pour  $\mathbb{S}^3$ , ceci se voit directement en modifiant légèrement la description de [3]: on part d'une sphère de grand diamètre, homothétique à  $\mathbb{S}^3$  canonique, et on raccourcit les fibres de la fibration de Hopf afin que le volume devienne  $\leq \varepsilon$ . Puis si  $(\gamma^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une famille de géodésiques avec  $\bigcup \gamma^k$   $\varepsilon$ -dense, on change à la manière de [3] chaque voisinage de  $\gamma^k$  en augmentant son volume d'au plus  $\varepsilon_k$ ,  $\sum_k \varepsilon_k \leq \varepsilon$ , pour avoir diamètre  $\leq \varepsilon$ .

4.1. Avant de poursuivre la démonstration du théorème, rappelons le:

**LEMME DU PLOMBIER** *Etant donné  $\gamma$  géodésique simple fermée d'une variété riemannienne  $(N^d, g)$  de dimension  $d$ , on peut changer  $g$  à l'intérieur d'un  $r_0$ -voisinage  $\gamma^0$  de  $\gamma$  arbitrairement petit en une nouvelle métrique  $\tilde{g}$  vérifiant:*

- $\gamma$  est une géodésique de  $(N^d, \tilde{g})$  de même longueur et holonomie qu'avant
- $K(\tilde{g}) \equiv 0$  près de  $\gamma$
- sur  $\gamma^0$ :  $|K(\tilde{g})| \leq C(d) \text{Max}_{\gamma^0} |K(g)|$  où  $C(d) =$  constante dépendant seulement de  $d$ .

En outre il ressort de la démonstration (voir [3]) que la fonction  $\text{dist}(\cdot, \gamma)$  est la même pour  $g$  et  $\tilde{g}$ , et que  $\text{Vol}^{\tilde{g}}(\gamma^0) \leq 2 \text{Vol}^g(\gamma^0)$  si  $r_0$  est assez petit.

4.2. Soit  $N$  et  $\tilde{N}$  deux variétés riemanniennes de dimension 3 à  $K \leq 1$ , et  $\gamma$  (resp  $\tilde{\gamma}$ ) une géodésique simple fermée de  $N$  (resp  $\tilde{N}$ ) dont l'holonomie est l'identité. Supposons que  $K \equiv 0$  dans  $\gamma^r$  (resp  $\tilde{\gamma}^r$ ), un  $r$ -voisinage tubulaire de  $\gamma$  (resp  $\tilde{\gamma}$ ) et que  $\text{long } \gamma = \text{long } \tilde{\gamma} = L$ . La métrique dans  $\gamma^r$  s'écrit  $ds^2 = dt^2 + d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2$  ( $t \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ ,  $\varrho =$  distance à  $\gamma$  et  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ). Sur  $\{r/4 \leq \varrho \leq r\}$ , on remplace  $ds^2$  par  $dt^2 + d\varrho^2 + \sigma^2(\varrho)d\theta^2$  où  $\sigma \in C^\infty[r/4, r]$  est telle que:

$$\sigma'' \geq 0, \sigma(\varrho) \equiv r/2 \text{ près de } r/4, \sigma(\varrho) = \varrho \text{ près de } r.$$

D'où une métrique sur  $N - \gamma^{r/4}$  pour laquelle un collier du bord est isométrique au produit riemannien  $[0, \alpha] \times T$  ( $\alpha > 0$ ),  $T = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/(2^{-1}\pi r)\mathbb{Z}$  tore plat rectangulaire. Cette métrique vérifie encore  $K \leq 1$ . Noter aussi que:

$$\text{nouveau volume de } \gamma^r - \gamma^{r/4} \leq 2 \text{ (ancien volume de } \gamma^r - \gamma^{r/4}).$$

La même opération étant faite pour  $\tilde{N}$ ,  $N - \gamma^{r/4}$  et  $\tilde{N} - \tilde{\gamma}^{r/4}$  se recollent en une variété riemannienne à courbure  $K \leq 1$ .

4.3. Soit  $\varepsilon$  donné. Considérons un ellipsoïde de révolution  $E$  à courbure non constante et majorée par  $1/2C(3)$ ,  $C(3) =$  la constante du plombier en dimension 3. Il existe une géodésique  $\gamma$  fermée et  $\varepsilon/2$ -dense dans  $E$ . On définit dans  $E \times \mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z}$  une géodésique  $\gamma_1$  par

$$\gamma_1(t) = (\gamma(t), t\varepsilon/ml) \quad t \in [0, ml]$$

où  $l = \text{long } \gamma$  et  $m$  entier choisi tel que  $m \geq 2l/\varepsilon$ . En appliquant le Lemme du plombier à  $\gamma_1$  on obtient une variété  $N_1$  avec  $K(N_1) \leq 1/2 \leq 1$ . Dans un autre exemplaire de  $E \times \mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z}$  on définit de même  $\gamma_2$  en remplaçant  $m$  par  $m + 1$ , puis on applique le Lemme du plombier et on multiplie les distances par  $(m^2l^2 + \varepsilon^2)^{1/2}((m + 1)^2l^2 + \varepsilon^2)^{-1/2}$  afin d'avoir  $\text{long } \gamma_1 = \text{long } \gamma_2 = L'$ ; on note  $N_2$  cette variété:  $K(N_2) \leq 1$ .

On construit ensuite  $T_1 = N_1 - \gamma_1^{r/4}$  comme en 4.2 ( $r$  assez petit). Vu que  $\gamma_1$  est isotope au facteur  $\mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z}$  de  $E \times \mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z}$ ,  $T_1$  est un tore solide  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ .  $\partial T_1$  s'identifie au produit riemannien  $\gamma_1 \times C$  ( $C = \mathbb{R}/(2^{-1}\pi r)\mathbb{Z}$ ) et l'on a,  $s$  étant la longueur d'arc de  $\gamma_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial T_1 \text{ est } \varepsilon\text{-dense dans } T_1 \\ \text{dist}(\gamma_1(s) \times C, \gamma_1(s + kL'/m) \times C) \leq 2\varepsilon \text{ pour tout } s \text{ et tout } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \tag{1}$$

(dist = distance dans  $T_1$ ).

La seconde propriété résulte du fait que dans  $E \times \mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z}$ ,  $\gamma_1(s)$  et  $\gamma_1(s + kL'/m)$  ont la même projection sur  $E$ .

La même chose est vraie pour  $T_2 = N_2 - \gamma_2^{r/4}$  avec  $m + 1$  à la place de  $m$ . Remarque aussi que  $\text{Vol } T_i \leq c\varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ) où  $c =$  constante =  $8 \text{ Vol } E$ .

4.4. Revenons à notre variété  $M$ ; elle admet une métrique comme dans le Corollaire 3.2 où l'on peut prendre  $n = 1$ . On choisit cette métrique telle que:  $K \leq 1/C(3)$ ,  $\text{Vol} \leq \varepsilon/2$ , ayant une géodésique  $\gamma$   $\varepsilon$ -dense de longueur  $L \geq L'$  et d'holonomie = identité, et  $0 \leq K \leq 1/C(3)$  au voisinage de  $\gamma$ . Après application du Lemme du plombier on a  $K(M) \equiv 0$  dans un  $4r$ -voisinage de  $\gamma$  ( $r$  assez petit),  $K(M) \leq 1$ ,  $\text{Vol } M \leq \varepsilon$  et  $\gamma$  toujours  $\varepsilon$ -dense.

Il faut maintenant ajuster les longueurs  $L$  et  $L' = (l^2m^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ . Pour cela augmentons  $m$  (ce qui ne change rien aux propriétés de 4.3) jusqu'à avoir

$$m^2l^2 + \varepsilon^2 \leq L^2 < (m + 1)^2l^2 + \varepsilon^2$$

Puis en multipliant les distances de  $N_1$  et  $N_2$  par  $\alpha = LL^{-1}$  ( $1 \leq \alpha \leq 2$ ) on aura  $\text{long } \gamma_1 = \text{long } \gamma_2 = \text{long } \gamma = L$ . On note encore  $N_1$  et  $N_2$  les variétés  $\alpha N_1$  et  $\alpha N_2$ . Alors  $T_1$  et  $T_2$  vérifient (1) avec  $2\varepsilon$  à la place de  $\varepsilon$ , et  $\text{Vol } T_i \leq 8c\varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ).

4.5. Soit  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  deux géodésiques de  $M$  parallèles à  $\gamma$  et avec  $\text{dist}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) = \text{dist}(\tilde{\gamma}_1, \gamma) = \text{dist}(\tilde{\gamma}_2, \gamma) = 2r$ . Puisque  $\text{holonomie}(\gamma) = \text{identité}$ ,  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  sont simples fermées de longueur  $L$ . Puis on recolle  $T_1$  et  $T_2$  à  $M - (\tilde{\gamma}_1^{r/4} \cup \tilde{\gamma}_2^{r/4})$  selon 4.2: un méridien de  $T_i$  va alors sur un méridien de  $M - \tilde{\gamma}_i^{r/4}$  (i.e. du tore solide  $\tilde{\gamma}_i^{r/4}$ ), donc cette opération *ne change pas la topologie de  $M$* . Soit  $\bar{M}$  la variété riemannienne obtenue et  $\bar{\text{dist}}$  sa distance. On a

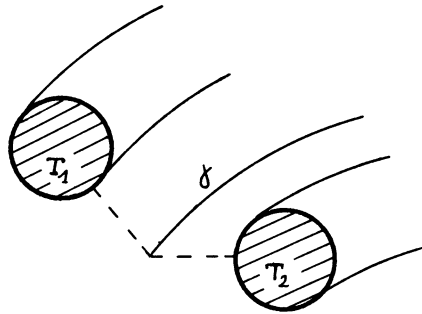
$$K(\bar{M}) \leq 1$$

$$\text{Vol } \bar{M} = \text{Vol}(M - (\tilde{\gamma}_1^{r/4} \cup \tilde{\gamma}_2^{r/4})) + \text{Vol } T_1 \cup T_2 \leq 2\varepsilon + 16c\varepsilon$$

et enfin:

ASSERTION.  $\text{Diam } \bar{M} \leq 14\varepsilon$ .

*Preuve.*



$\gamma$  est  $2\varepsilon$ -dense dans  $M - (\tilde{\gamma}_1^{r/4} \cup \tilde{\gamma}_2^{r/4})$ , et vu les propriétés (1) de  $T_1, T_2$ , on a  $\bar{\text{dist}}(x, \gamma) \leq 3\varepsilon$  si  $x \in T_1 \cup T_2$ ; donc  $\gamma$  est  $3\varepsilon$ -dense dans  $\bar{M}$ . De plus:

$$\bar{\text{dist}}(\gamma(s + kL/m), \gamma(s)) \leq 4\varepsilon + 4r \leq 5\varepsilon$$

et

$$\bar{\text{dist}}(\gamma(s + jL/m + 1), \gamma(s)) \leq 5\varepsilon$$

pour tout  $s =$  longueur d'arc de  $\gamma$  et tous  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où } \overline{\text{dist}}(\gamma(0), \gamma(kL/(m+1)m)) &\leq \overline{\text{dist}}(\gamma(0), \gamma(kL/m)) \\ &+ \overline{\text{dist}}(\gamma(kL/m), \gamma(kL/(m+1)m)) \\ &\leq 10\varepsilon \text{ puisque } k/m - k/m(m+1) = k/m + 1. \end{aligned}$$

Comme  $L/m(m+1) \leq 2l/m \leq \varepsilon$ , on en déduit que  $\text{Diam } \gamma \leq 11\varepsilon$  (dans  $\bar{M}$ ), et finalement que  $\text{Diam } \bar{M} \leq 14\varepsilon$ .

Ce qui achève la démonstration du théorème.

## Bibliographie

1. C. Bavard: *thèse de 3ème cycle*. Orsay (1984).
2. A. Besse: *Manifolds all of whose geodesics are closed*. Springer (1978).
3. P. Buser et D. Gromoll: *Gromov's examples of almost negatively curved metrics on  $\mathbb{S}^3$* , notes.
4. G. Darboux: *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, Vol. 3, Chelsea (réédition) (1972).
5. H.B. Lawson: *Foliations*. *Bull. A.M.S.* 80 (1974) 369–418.
6. B. O'Neill: *The fundamental equations of a submersion*. *Michigan Math. J.* 13 (1966) 459–469.
7. D. Rolfsen: *Knots and links*. Publish or Perish (1976).