COMPOSITIO MATHEMATICA

X. BENVENISTE

Un résultat sur les faces du cône des 1-cycles effectifs

Compositio Mathematica, tome 60, n° 2 (1986), p. 187-208

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1986__60_2_187_0>

Compositio Mathematica 60: 187–208 (1986)

UN RÉSULTAT SUR LES FACES DU CÔNE DES 1-CYCLES EFFECTIFS

X. Benveniste

Introduction

Dans tout ce qui suit toutes les variétés qui apparaissent seront définies sur $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 0-1: Soient V une variété irréductible et projective, et D un diviseur de Cartier. Nous dirons que D est numériquement positif si pour toute courbe irréductible C sur V, on a $D \cdot C \geqslant 0$.

DÉFINITION 0-2: Soit X une variété normale et projective de dimension d n'ayant que des singularités canoniques au sens de [R-1]. Soit r le p.p.c.m. des incides des singularités de X. Notons ω_X le faisceau dualisant de X et soit $\omega_X^{[r]}$ le bidual de $\omega_X^{\otimes r}$. Nous appelerons $\mathbb{Q}$-diviseur canonique et noterons K_X l'élément de $\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$ dont la classe est celle de $(1/r)\omega_X^{[r]}$.

DÉFINITION 0-3: Soit X une variété projective de dimension d. On note $NE(X)$ l'enveloppe convexe des 1-cycles effectifs dans le dual de $NS(X) \otimes \mathbb{R}$.

Le théorème suivant apparaît come un complément au résultat de J. Kollar obtenu dans [Ko]:

THÉORÈME 0: *Soient X une variété normale projective de dimension d n'ayant que des singularités canoniques au sense de* [R-1], *Y une variété normale et f: $X \to Y$ un morphisme birationnel. Soit L un diviseur ample sur Y et notons E l'ensemble des points $x \in X$ où f n'est pas un isomorphisme. Supposons que $-K_X|_E$ soit numériquement positif. Alors l'ensemble formé des $Z \in \overline{NE}(X)$ vérifiant $K_X \cdot Z \leqslant 0$ et $f^*(L) \cdot Z = 0$ est un cône convexe polyédral dont les faces sont en nombre fini et sont définies par des éléments de $NS(X)$.*

Qu'il nous soit permis de remercier M. Reid de nous avoir suggéré la forme du Théorème 0 à partir du Théorème 3-1.

Pour tout nombre réel x nous notons $\lceil x \rceil$ le plus petit entier $\geqslant x$ (round up). Le symbole $\equiv$ désigne l'équivalence rationnelle entre diviseurs.

1. Quelques rappels et notations

Dans ce qui suit, V désigne une variété projective définie sur $\mathbb{C}$, n'ayant que des singularités canoniques. Soit k l'un des corps $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. On notera K_V le $\mathbb{Q}$-diviseur canonique de V et $NS_k(V)$ le k-espace vectoriel $NS(V) \otimes k$.

Soient W une variété normale et projective et $f\colon V \to W$ un morphisme birationnel. Dans ce qui suit, k désigne $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$; notons $N^1_k(V, W)$ le quotient de $NS_k(V)$ par l'image de $f^*(\mathrm{Pic}(W))$. Notons aussi dans $\mathrm{Hom}_k(NS_k(V), k)$, $N_{1,k}(V, W)$ l'orthogonal de l'image de $f^*(\mathrm{Pic}(W))$ dans $NS_k(V)$. (Kawamata note $N^1_k(V, W)$ et $N_{1,k}(V, W)$ sous la forme $N^1(V/W)$ et $N_1(V/W)$). Nous notons aussi $g\colon NS_k(V) \to N^1_k(V, W)$ la projection naturelle. Soit E l'ensemble formé des points de V ou f n'est pas as un isomorphisme local.

REMARQUE 1-1: Pour tout $D \in NS_k(V)$ le fait que $D \mid_E$ soit numériquement positif ne dépend que de la classe $g(D)$.

REMARQUE 1-2: Soit $F_{\mathbb{R}}$ le sous-espace vectoriel de $NS_{\mathbb{R}}(V)$ formé des éléments $D \in NS_{\mathbb{R}}(V)$ tels que pour toute courbe $C \subset E$, on ait $D \cdot C = 0$. Alors $F_{\mathbb{R}}$ provient d'un sous-espace vectoriel $F_{\mathbb{Q}}$ de $NS_{\mathbb{Q}}(V)$ par extension des scalaires.

D'après Kawamata [K] et Viehweg [V], on a:

THÉORÈME 1-1: *Soient V une variété lisse et projective définie sur $\mathbb{C}$, de dimension d, $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs lisses et irréductibles à croisements normaux, $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres rationnels de* $[0, 1[$, *L un élément de $NS_{\mathbb{Q}}(V)$ numériquement positif vérifiant $L^d > 0$. Soid D un élément de* $\mathrm{Pic}(V)$ *dont la classe dans $NS_{\mathbb{Q}}(V)$ vérifie*:

$$D = L + \sum_{i \in I} a_i E_i.$$

Alors pour tout $p < d$, on a: $H^p(V, \mathcal{O}_V(-D)) = 0$.

D'après Shokurov [S] on a:

THÉORÈME 1-2: *Soient V une variété lisse et projective, P un diviseur numériquement positif, $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs lisses et irréductibles à croisements normaux, $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres*

rationnels de $[0, 1[$, L *un* $\mathbb{Q}$*-diviseur ample*, A *un diviseur effectif à support les diviseurs* E_i, *tels que l'on ait dans* $NS_{\mathbb{Q}}(V)$:

$$P + A = K_V + L + \sum_{i \in I} a_i E_i.$$

Alors pour m *assez grand on a*: $\chi(\mathcal{O}_V(mP + A)) \neq 0$.

D'après Kawamata [K-1], on a:

THÉORÈME 1-3: *Soient* V *une variété projective n'ayant que des singularités canoniques, et* P *un diviseur numériquement positif sur* V. *On suppose que* $P - K_V$ *est un diviseur numériquement positif dont la dimension de Kodaira est égale à* $\dim(V)$. *Alors il existe un entier* m_0 *tel que pour tout* $m \geqslant m_0$ *le système linéaire* $|mP|$ *est sans point de base.*

PROPOSITION 1-1: *Soient* V *une variété projective, et* H *un diviseur ample sur* V. *Il existe une constante* c *ne dépendant que de* V *et* H *telle que pour tout diviseur* P *numériquement positif, le système linéaire* $|cH + P|$ *est sans point de base.*

PROPOSITION 1-2: *Soient* X *une variété projective de dimension* d, Z *une variété projective normale,* $f: X \to Z$ *un morphisme birationnel et* H *un diviseur ample sur* Z. *Soient* E *l'ensemble formé des points de* X *où* f *n'est pas un isomorphisme local, et* D *un diviseur de Cartier sur* X *tel que* $D|_E$ *soit numériquement positif. Alors il existe un entier* n_0 *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$, *le diviseur* $nf^*(H) + D$ *soit numériquement positif.*

DÉMONSTRATION: Remarquons que puisque H est ample sur Z, il existe une famille finie $(F_i)_{i \in I}$ de diviseurs irréductibles, une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'entiers positifs, un diviseur ample L sur X et un entier $n_0 > 0$, tels que:

$$n_0 f^*(H) + D \equiv L + \sum_{i \in I} a_i F_i. \tag{1}$$

Soit I_0 l'ensemble formé des $i \in I$ tels que l'on ait: $F_i \not\subset E$. Montrons le résultat par récurrence sur d. Commençons par le cas $d = 2$.

Pour chaque $i \in I_0$, il existe un entier $n_i > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_i$, on ait $(nf^*(H) + D) \cdot F_i \geqslant 0$. Soit n_1 un majorant des n_i et de n_0. Supposons que pour un entier $n \geqslant n_1$, le diviseur $nf^*(H) + D$ ne soit pas numériquement positif. Alors il existe une courbe irréductible C telle que

$$(nf^*(H) + D) \cdot C < 0.$$

Par hypothèse C n'est pas contenue dans E. D'après (1) on a:

$$nf^*(H) + D \equiv (n - n_0)f^*(H) + L + \sum_{i \in I} a_i F_i. \tag{2}$$

Cela implique qu'il existe $0 \in I_0$ tel que $F_0 = C$, mais cela contredit le choix de n_1.

Supposons maintenant le résultat acquis pour $d - 1 \geqslant 2$, et montrons le pour d. Par hypothèse de récurrence appliquée pour chaque $i \in I_0$ à $f|_{F_i} : F_i \to f(F_i)$, il existe un entier $n_i > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_i$ le diviseur $nf^*(H) + D|_{F_i}$ soit numériquement positif. Soit n_1 un majorant de n_0 et des n_i pour $i \in I_0$. Supposons que pour un entier $n \geqslant n_1$, le diviseur $nf^*(H) + D$ ne soit pas numériquement positif. Alors il existe une courbe irréductible C telle que $(nf^*(H) + D) \cdot C < 0$. Par hypothèse C n'est pas contenue dans E. Puisque l'on a la relation (2), il existe $0 \in I_0$ tel que $F_0 \cdot C < 0$, mais cela est absurde car $nf^*(H) + D|_{F_0}$ est numériquement positif. On obtient ainsi le résultat.

Soient X et Y deux variétés vérifiant les hypothèses du théorème 0. Soient $(F_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de E. Pour chaque $i \in I$, notons $d_i = \dim(F_i)$; de plus si $d_i \geqslant 2$ soit H_i un diviseur très ample sur F_i. Posons pour $i \in I$:

$$C_i = F_i \quad \text{si } d_i = 1, \tag{3}$$

$$C_i = H_i^{d_i - 1} \quad \text{si } d_i \geqslant 2.$$

Soit $Z = \sum_{i \in I} C_i$, et notons g: $NS_{\mathbb{R}}(X) \to N^1_{\mathbb{R}}(X, Y)$ la surjection naturelle.

PROPOSITION 1-3: *L'ensemble P formé des $g(D) \in N^1_{\mathbb{R}}(X, Y)$ vérifiant $D \cdot Z = 1$ et tel que pour toute courbe C contenue dans E, on ait $D \cdot C \geqslant 0$ est un sous ensemble compact convexe de $N^1_{\mathbb{R}}(X, Y)$.*

DÉMONSTRATION: Soient $D \mapsto \| D \|$ une norme sur $NS_{\mathbb{R}}(X)$ et $g(D) \mapsto \| g(D) \|$ la norme quotient sur $N^1_{\mathbb{R}}(X, Y)$. Soit $(D_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de points de $NS_{\mathbb{R}}(X)$ telle que l'on ait:

$$g(D_n) \in P, \quad \| g(D_n) \| = \| D_n \| \quad \text{pour } n \geqslant 0$$

$$\text{et } \lim_{n \to +\infty} \| D_n \| = +\infty.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $n \mapsto D_n / \| D_n \|$ admet une limite U quand n tend vers $+\infty$.
1er pas: Pour toute courbe C contenue dans E, on a $U \cdot C = 0$.

Remarquons premièrement que puisque pour tout entier n positif, on a $g(D_n) \in P$, pour toute courbe C contenue dans E, on a $U \cdot C \geqslant 0$. Pour tout entier positif n on a:

$$((D_n - D_0)/\| D_n \|) \cdot Z = 0.$$

On déduit par passage à la limite que $U \cdot Z = 0$. D'après le choix de Z en (3) et éventuellement le théorème de l'indice, on obtient le résultat.

$2^{\text{ème}}$ pas: Il existe une famille finie $(D_j)_{j \in J}$ de diviseurs de Cartier sur Y et une famille $(a_j)_{j \in J}$ de nombres réels tels que l'on ait:

$$U = f^*\left(\sum_{j \in J} a_j D_j \right).$$

D'après la Remarque 1-2, il existe une famille finie $(M_j)_{j \in J}$ de diviseurs de Cartier sur X et une famille $(a_j)_{j \in J}$ de nombres réels tels que

$$U = \sum_{j \in J} a_j M_j$$

et que pour tout $j \in J$, on ait pour toute courbe C contenue dans E, $M_j \cdot C = 0$.

En utilisant la Proposition 1-2 et le Théorème 1-3, on voit facilement qu'il existe des entiers positifs c_j et d_j tels que le système linéaire $| c_j f^*(L) + d_j M_j |$ soit sans point base pour $j \in J$. Soit f_j le morphisme défini par ce système linéaire; en choisissant c_j assez grand on voit que $f_j(X)$ est isomorphe à Y ce qui implique le résultat.

$3^{\text{ème}}$ pas: où l'on arrive à une contradiction.

D'après le 2ème pas on par définition de g, $g(U) = 0$. Mais d'après le choix de la suite $(D_n)_{n \geqslant 0}$, on pour tout entier n positif:

$$\| g(D_n/\| D_n \|) \| = 1,$$

ce qui donne $\| g(U) \| = 1$. Cela est absurde.

Donnons la caractérisation suivante des ensembles convexes polyédriques dont les points extrémaux sont rationnels. Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension fini, R un réseau dans V. Soit C un sous-ensemble compact convexe de V tel que 0 soit dans l'intérieur de C. Pour chaque $x \in V - C$, on pose:

$$t(x) = \sup\{ t \in \mathbb{R}_+ ;\ tx \in C \}.$$

Soit $M = \sup\{ \| x \| ;\ x \in C \}$. On a:

PROPOSITION 1-4: *Supposons que la condition suivante est réalisée: Il existe une constante N tel que pour tout $x \in R$ tel que $\| x \| \geqslant N$, on a $t(x) \in \mathbb{Q}$ et le dénominateur de $t(x)$ est $\leqslant \| x \|$. Alors C est polyédrique. De plus il existe une famille finie A de couple $(g, a) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ telle que:*

(i) $C = \bigcap_{(g,a)\in A} \{x;\ g(x) + a \geqslant 0\}$.
(ii) *Pour tout $(g, a) \in A$, on a $\| g \| \leqslant M$ et $| a | \leqslant M$.*

La démonstration de cette proposition sera donnée en appendice. Rappelons le résultat classique dû à [H-W]:

PROPOSITION 1-5: *Soient n un entier > 0 et P un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[x, y, z]$ de degré n. Supposons qu'il existe des nombres réels strictement positifs s et c, une suite infinite $S \subset \mathbb{N}^2$ tels que pour tout $(p, q) \in S$, il existe un entier m tel que l'on ait:*

(a) $0 \leqslant 1 - ps < (1/c)$,
(b) *pour tout $r \geqslant m$, $P(r, p, q) = 0$.*

Alors on a:

(i) $P \in \mathbb{Q}[y, z]$,
(ii) *s est un nombre rationnel et le dénominateur de s est $\leqslant 2(n + 1)c$.*

2. Quelques inégalités sur la norme de diviseurs

Soient X une variété projective de dimension d, et L un diviseur de Cartier numériquement positif vérifiant $L^d > 0$. Soit $D \mapsto \| D \|$ une norme sur $NS_{\mathbb{R}}(X)$.

PROPOSITION 2-1: *Il existe une constante c ne dépendant que de X et L, une famille finie $(B_j)_{j\in J}$ de diviseurs irréductibles, tels que pour tout $D \in NS(X)$ on ait les assertions suivantes:*

(i) Il existe un entier positif $m(D)$, une famille $(a_j(D))_{j\in J}$ de nombres entiers positifs, et un diviseurs $M(D)$ tels que:

$$m(D)L + D \equiv M(D) + \sum_{j\in J} a_j B_j$$

et $| M(D) |$ est sans point base.

(ii) $\| m(D)L + D \| \leqslant c \| D \|$ et pour tout $j \in J$, on a $a_j(D) \leqslant c \| D \|$.

DÉMONSTRATION: Soit $(F_i)_{i\in I}$ une base de $NS(X)$. Il existe une famille finie $(B_j)_{j\in J}$ de diviseurs irréductibles vérifiant la condition suivante: pour chaque $i\in I$, il existe un entier $n_i>0$, une famille $(d_{ij})_{j\in J}$ d'entiers positifs, et pout $e\in\{-1,1\}$ un diviseur $M_i(e)$ tels que l'on ait:

(1) $n_iL+eF_i\equiv M_i(e)+\sum_{j\in J} d_{ij}B_j$ et $|M_i(e)|$ est sans point base, les $d_{i,j}$ ne dépendent pas de e.

Soient c_0 et c_1 deux nombres réels >0 tels que pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ de nombres réels on ait:

(2) $c_0\sup\{|x_i|;\ i\in I\}\leqslant\left\|\sum_{i\in I}x_iF_i\right\|\leqslant c_1\sup\{|x_i|\ i\in I\}$.

Soient $D\in NS(X)$ et $(a_i)_{i\in I}$ une familles d'entiers tels que: $D=\sum_{i\in I}a_iF_i$. Posons $m(D)=\sum_{i\in I}|a_i|n_i$. Alors il existe une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\{-1,1\}$ tels que l'on ait:

$$m(D)L+D=\sum_{i\in I}|a_i|(n_iL+e_iF_i)$$

$$=\sum_{i\in I}|a_i|M_i(e_i)+\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I}d_{ij}|a_i|\Big)B_j.$$

Posons $M(D)=\sum_{i\in I}|a_i|M_i(e_i)$ et pour chaque $j\in J$: $a_j(D)=\sum_{i\in I}d_{ij}|a_i|$. D'après (1) le système linéaire $|M(D)|$ est sans point base. En utilisant (2) on obtient:

$$\|m(D)L+D\|\leqslant(1/c_0)\Big(\sum_{i\in I}\|n_iL+e_iF_i\|\Big)\|D\|,$$

et pour tout $j\in J$:

$$a_j(D)\leqslant(1/c_0)\Big(\sum_{i\in I}d_{ij}\Big)\|D\|.$$

Il suffit de prendre pour c un majorant de $(1/c_0)\Big(\sum_{i\in I}\|n_iL+e_iF_i\|\Big)$ et des $(1/c_0)\Big(\sum_{i\in I}d_{ij}\Big)$. Cela termine la démonstration.

Supposons désormais que X soit à singularités canoniques. Soient Y un modèle birationnel de X, $f\colon Y\to X$ un morphisme composé d'une suite finie d'éclatements, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de diviseurs irréductibles, $(\rho_i)_{i\in I}$ une famille de nombres rationnels positifs, tels que l'on ait:

$$K_Y=f^*(K_X)+\sum_{i\in I}\rho_iE_i.$$

PROPOSITION 2-2: *Il existe une constante c ne dépendant que de L et de X (et pas du morphisme f) vérifiant la propriété suivante: Pour tout* $D \in NS(X)$ *il existe un entier positif* $m(D)$, *une famille* $(a_i(D))_{i \in I}$ *d'entiers positifs un diviseur* $M(D)$ *tels que*:

(i) $f^*(m(D)L + D) \equiv M(D) + \sum_{i \in I} a_i(D)E_i$ *et* $|M(D)|$ *est sans point de base.*

(ii) $\max\{a_i(D)/(\rho_i + 1);\ i \in I\} \leqslant c \| D \|$.

DÉMONSTRATION: Quitte à étendre la famille $(E_i)_{i \in I}$ on peut supposer que les transformés stricts des B_j pour $j \in J$ forment partie de cette famille. D'après la proposition 2-1, il existe un entier $m(D)$, une famille $(a_j)_{j \in J}$ d'entiers positifs, un diviseur $M(D)$ et une constante c ne dépendant que de X et L tels que l'on ait:

(3) $m(D)L + D \equiv M(D) + \sum_{j \in J} a_j(D)B_j$ et $|M(D)|$ est sans point base,

(4) $\| m(D)L + D \| \leqslant c \| D \|$ et pour tout $j \in J$: $a_j(D) \leqslant c \| D \|$. Maintenant il est clair qu'il existe une constante c_0 ne dépendant que des B_j et donc que de X et L, telle que l'on ait:

(5) Pour tout $j \in J$, il existe une famille $(d_{ij})_{i \in I}$ de nombres entiers positifs tels que: $f^*(B_j) = \sum_{i \in I} d_{ij}E_i$, et pour tout $i \in I$: $d_{ij} \leqslant c_0(\rho_i + 1)$.

En remarquant que $|f^*(M(D))|$ est sans point de base, on déduit aisément de (3), (4) et (5) le résultat annoncé. Cela termine la démonstration.

3. Un théorème de rationnalité

Soient X une variété projective de dimension d, n'ayant que des singularités canoniques, R et L deux diviseurs de Cartier numériquement positifs. On suppose que $L - K_X$ est numériquement positif et que l'on a $L^d > 0$.

Soient $D \in \mathrm{Pic}(X)$ et $A(L, R, D)$ l'ensemble formé des $t \in \mathbb{Q}_+$ vérifiant la propriété suivante: il existe un entier $m(t)$ tel que pour tout $m \geqslant m(t)$ on ait:

(1) $mL + R + tD$ est numériquement positif.

On voit que $0 \in A(L, R, D)$. On note $t(L, R, D)$ la borne supérieure de $A(L, R, D)$. Désormais nous supposons:

(2) $t(L, R, D)$ est fini.

Posons $t = t(L, R, D)$.

PROPOSITION 3-1: *Il existe deux constantes c_0 et c_1 ne dépendant que de X, R et L tels que pour tous entiers p et q positifs vérifiant $0 < q - tp < 1$, il existe*:

un entier $m(p, q)$
une variété lisse Y et un morphisme birationnel f: $Y \to X$ composé d'une suite finie d'éclatements,
une famille finie $(E_i)_{i \in I}$ de diviseurs lisses à croisements normaux,
un diviseur M,
une famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres entiers positifs non tous nuls,
une famille $(\rho_i)_{i \in I}$ de nombres rationnels positifs,

tels que:

(i) $f^*(m(p, q)L + pR + qD) \equiv M + \sum_{i \in I} a_i E_i$, *$M$ est la partie mobile de $|f^*(m(p, q)L + pR + qD)|$, $\sum_{i \in I} a_i E_i$ sa partie fixe, et $|M|$ est sans point base.*

(ii) $K_Y = f^*(K_X) + \sum_{i \in I} \rho_i E_i$,

(iii) $\max\{a_i/(\rho_i + 1);\ i \in I\} \leqslant c_0 \| D \| + c_1$.

DÉMONSTRATION: Puisque L est dimension de Kodaira d, il existe un diviseur ample H sur X, un diviseur effectif E et un entier m_0 tels que:

$$m_0 L \equiv H + E'.$$

D'après la Proposition 1-1, il existe un entier $a_0 > 0$ ne dépendant que de X et H tel que pour tout diviseur numériquement positif U, le système linéaire $|a_0 H + U|$ est sans point base. Puisque l'on a: $q - 1 - tp < 0$, d'après (1), il existe un entier m_1 tel que le diviseur $m_1 L + pR + (q-1)D$ soit numériquement positif. Posons: $A = m_1 L + a_0 H + pR + (q-1)D$. Le système linéaire $|A|$ est sans point base. Remarquons que l'on a en posant $E = a_0 E'$:

$$(3) \qquad (m_1 + a_0 m_0) L + pR + qD \equiv A + E + D.$$

Soit $m(E + D)$ l'entier positif fourni par la Proposition 2-2. Posons: $m(p, q) = m(E + D) + m_1 + m_0 a_0$. Soient Y un modèle birationnel lisse de X, f: $X \to Y$ un morphisme birationnel composé suite finie d'éclatements, $(E_i)_{i \in I}$ une famille de diviseurs lisses à croisements normaux, $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers positifs, $(\rho_i)_{i \in I}$ une famille de nombres rationnels positifs, M un diviseur sur Y tels que les assertions (i) et (ii) de la proposition soient vérifiées. Puisque $0 < q - tp$, le diviseur:

$m(p, q)L + pR + qD$ n'est pas numériquement positif.

Les a_i ne sont donc pas tous nuls. Soient $(a_i(E+D))_{i\in I}$ la suite d'entiers et c_0 la constante fournies par la proposition 2-2. D'après (3) on déduit

$$\max\{a_i/(\rho_i+1);\ i\in I\} \leqslant \max\{a_i(E+D)/(\rho_i+1);\ i\in I\}$$
$$\leqslant c_0\|D+E\| \leqslant c_0\|D\|+c_0\|E\|.$$

Il suffit de poser $c_1 = c_0\|E\|$ pour avoir le résultat de l'assertion (iii). Cela termine la démonstration.

THÉORÈME 3-1: *Soient c_0 et c_1 les constantes données dans la proposition* 3-1. *Sous l'hypothèse* (2), *$t(L, R, D)$ est un nombre rationnel et on a: le dénominateur de $t(L, R, D)$ est* $\leqslant 2(d+1)(c_0\|D\|+c_1)$.

DÉMONSTRATION: Posons $t = t(L, R, D)$. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que t n'est pas rationnel ou bien que son dénominateur est $> 2(d+1)(c_0\|D\|+c_1)$. Posons $c = 1 + c_0\|D\|+c_1$ et introduisons quelques notations:

Pour tout $(m, p, q)\in\mathbb{N}^3$ posons: $M(m, p, q) = mL + pR + qD$, et soit $B(m, p, q)$ le lieu fixe de $|M(m, p, q)|$. D'après les hypothèses faites sur L et le théorème 1-3, il existe un entier m_0 tel que pour tous $n\geqslant m_0$ et $s\geqslant n$:

(4) $|sL + nR|$ est sans point base.

Soit $<$ l'ordre partiel défini sur $\mathbb{N}^3$ par: $(a_1, a_2, a_3) < (b_1, b_2, b_3)$ si et seulement si $a_i < b_i$ pour tout i.

1er pas: Il existe une suite infinie $S\subset\mathbb{N}^3$ strictement croissante pour $<$ et un ensemble algébrique non vide T tel que pour tout $(n, p, q)\in S$, on ait

(1) pour tout $m\geqslant n$: $B(m, p, q) = T$,
(2) $0 < q - tp \leqslant (1/c)$.

Soit S_0 l'ensemble formé des $(m, p, q)\in\mathbb{N}^3$ vérifiant: $0 < q - tp \leqslant (1/c)$. Nous allons montrer que pour tout $(m, p, q)\in S_0$, il existe $(n', p', q')\in S_0$ tel que pour tout $m'\geqslant n'$, on ait:

(1) $(m', p', q') > (m, p, q)$,
(2) $B(m', p', q')\subset B(m, p, q)$.

Soit $(m', p', q')\in S_0$ tel que $(m', p', q') > (m, p, q)$. Il existe deux entiers k et s vérifiant $q' = kq + s$ avec $q\leqslant s\leqslant 2q$. Puisque $t\neq 0$, d'après le théorème 1-3, il existe deux entiers m_s et $p_s > 0$ tels que:

(5) $|m_sL + p_sR + sD|$ est sans point base.

Soit w un entier tel que: $p' = pk + p_s + w$, et soit u un entier tel que $m' = mk + m_s + u$. Par définition on a:

$$(6) \quad M(m', p', q') \equiv kM(m, p, q) + m_s L + p_s R + sD + wR + uL.$$

On a aussi:

$$0 < q' - tp' = k(q - tp) + s - tp_s - tw \leqslant (1/c).$$

Comme $q - tp > 0$, il existe q' suffisament grand pour que $w \geqslant m_0$. Posons $n' = m_s + km + u$. Alors d'après (4), (5) et (6), on déduit que pour $m' \geqslant n'$ on a:

$$B(m', p', q') \subset B(m, p, q).$$

Come X est noethérien et que pour tout $(m, p, q) \in S_0$, $M(m, p, q)$ n'est pas numériquement positif, on a les assertions annoncées.

$2^{\text{ème}}$ pas: Quelques calculs arithmétiques.

Soient $(m, p, q) \in S$ et k un entier strictement positif, tels que:

$$(7) \quad ((c-1)/c) \leqslant k(q - tp) < 1.$$

Remarquons que l'on a:

$$(8) \quad B(km, kp, kq) \subset T.$$

D'après La proposition 3-1, il existe:

un modèle birationnel lisse Y de X,
un morphisme $f: Y \to X$ composé d'une suite finie d'éclatements,
une famille finie $(E_i)_{i \in I}$ de diviseurs à croisements normaux,
une famille $(\rho_i)_{i \in I}$ de nombres rationnels $\geqslant 0$,
une famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres entiers positifs non tous nuls,
un diviseur M,

tels que:
$f^*(M(km, kp, kq)) \equiv M + \sum_{i \in I} a_i E_i$, M est la partie mobile de $|f^*(M(km, kp, kq))|$ et $\sum_{i \in I} a_i E_i$ est sa partie fixe. De plus $|M|$ est sans point base.

$$K_Y = f^*(K_X) + \sum_{i \in I} \rho_i E_i,$$

$$\max\{a_i/(\rho_i + 1);\ i \in I\} \leqslant c_0 \| D \| + c_1.$$

On peut choisir une famille $(t_i)_{i \in I}$ de nombres rationnels strictement positifs suffisament petits et $o \in I$, pour que les conditions suivantes soient réalisées:

(9) le $\mathbb{Q}$-diviseur $f^*(2L - K_X) - \sum_{i \in I} t_i E_i$ est ample,

(10) on a: $(a_0 + t_0)/(\rho_0 + 1) < c - 1$ et $a_0 \neq 0$,

(11) pour tout $i \in I - \{o\}$, on a:

$$(a_0 + t_0)/(\rho_0 + 1) > (a_i + t_i)/(\rho_i + 1).$$

Posons $r = (\rho_0 + 1)/(a_0 + t_0)$. Pour chaque $i \neq 0$, soit m_i un entier tel que

$$m_i = r(a_i + t_i) - \rho_i \in [0, 1[.$$

Alors pour chaque $i \neq 0$, on a:

(12) $0 \leqslant m_i \leqslant \ulcorner \rho_i \urcorner$.

Posons aussi $c_i = m_i + r(a_i + t_i) - \rho_i$ pour $i \neq o$. Soit $(n', p', q') \in S$ tel que $p' > rpk$, et soit $m' > n'$. On a:

$$(13) \quad M(m', p', q') \equiv (m' - rkm - 2)L + (p' - rkp)R + (q' - rkq)D + rkM(m, p, q) + 2L.$$

D'après (7) et le premier pas, on a:

$$q' - rkq - t(p' - rpk) = q' - tp' - rk(q - tp) \leqslant (1/c) - r((c-1)/c) < 0.$$

Posons $s = (q' - rkq)/(p' - rkp)$; on a $s < t$, et d'après la définition (1) il existe un entier m'_s tel que pour tout $m \geqslant m'_s$, on ait:

(14) $mL + (p' - rkp)R + (q' - rkq)D$

est un diviseur numériquement positif.
Soit $m' \geqslant rkm + m'_s + 2$; posons:

$$A = f^*(m'_s L + (p' - rkp)R + (q' - rkq)D).$$

On a dans $NS_{\mathbb{Q}}(Y)$:

$$f^*(M(m', p', q')) + \sum_{i\neq 0} m_i E_i$$

$$= K_Y + (m' - rkm - m'_s - 2)f^*(L) + A + rM + f^*(2L - K_X)$$

$$- \sum_{i\in I} t_i E_i + \sum_{i\neq 0} c_i E_i + E_0.$$

Posons $H = A + rM + f^*(2L - K_X) - \sum_{i\in I} t_i E_i$. Alors d'après (9), H est un $\mathbb{Q}$-diviseur ample et on a:

$$(15)\quad f^*(M(m', p', q')) + \sum_{i\neq 0} m_i E_i$$

$$= K_Y + (m' - rkm - m'_s - 2)f^*(L) + H + \sum_{i\neq 0} c_i E_i + E_0.$$

Posons $A(m', p', q') = f^*(M(m', p', q')) + \sum_{i\neq 0} m_i E_i$.

$3^{\text{ème}}$ pas: où l'on arrive à une contradiction.

D'après (8), (10) et (12), E_0 est contenue dans la partie fixe de $|A(m', p', q')|$. Comme on a la suite exacte:

$$0 \to \mathcal{O}_Y(A(m', p', q') - E_0) \to \mathcal{O}_Y(A(m', p', q'))$$

$$\to \mathcal{O}_{E_0}(A(m', p', q')) \to 0,$$

on déduit en appliquant le Théorème 1-1 à Y et E_0 que l'on a:

$$(16)\quad \chi\big(\mathcal{O}_{E_0}(A(m', p', q'))\big) = 0.$$

D'après la construction de la suite S effectuée au 1_{er} pas et la Proposition 1-5, on déduit que le polynôme:

$$(17)\quad (m', p', q') \mapsto \chi\big(\mathcal{O}_{E_0}(A(m', p', q'))\big) \text{ est le polynôme nul.}$$

Soient $(m', p', q') \in \mathbb{N}^3$ suffisament grand pour que l'on ait:

$$p'/q' < t, \quad p' > rkp \quad \text{et } q' > rkq.$$

On a donc: $(q' - rkq)/(p' - rkp) < t$. Posons $s' = (q' - rkq)/(p' - rkp)$. D'après la définition (1), il existe un entier $n_{s'}$ tel que pour tout $m \geqslant n_{s'}$ les diviseurs $mL + (p' - rkp)R + (q' - rkq)D$ et

$M(m, p', q')$ soient numériquement positifs. Pour $m' \geqslant rkm + n_{s'} + 2$, on a la relation (15) et H est encore un $\mathbb{Q}$-diviseur ample. Soit k' un entier > 1; remarquons que:

$$A(k'm', k'p', k'q') = (k'-1)f^*(M(m', p', q')) + A(m', p', q').$$

Puisque $f^*(M(m', p', q'))$ est numériquement positif, la relation (13) et le théorème 1-2 contredisent la relation (17), ce qui démontre le Théorème 3-1.

4. La démonstration du Théorème 0

Reprenons les notations du théorème 0, ainsi que celles introduites au paragraphe 1. Notons g: $NS(X) \to N^1_{\mathbf{Z}}(X, Y)$ la surjection naturelle. Soient $(F_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de E, et pour chaque $i \in I$, d_i la dimension de F_i. Pour chaque $i \in I$ tel que $d_i \geqslant 2$, soit H_i un diviseur très ample sur F_i; posons:

$$C_i = F_i \quad \text{si } d_i = 1, \qquad C_i = H_i^{d_i - 1} \quad \text{si } d_i \geqslant 2,$$

$$\text{et } Z = \sum_{i \in I} C_i.$$

La Remarque 1-1 permet de définir l'ensemble P formé des éléments $g(D)$ de $N^1_{\mathbf{R}}(X, Y)$ tels que $D \cdot Z = 1$ et que pour toute courbe C contenue dans E, on ait $D \cdot C \geqslant 0$. La Proposition 1-3 montre que P est un sous-ensemble compact convexe d'intérieur non vide dans l'hyperplan affine des $g(D)$ vérifiant $D \cdot Z = 1$.

Soit R un $\mathbb{Q}$-diviseur ample sur X vérifiant $R \cdot Z = 1$. Notons C l'ensemble formé des $g(D)$ tels que $g(R) + g(D) \in P$. Alors C est linéairement isomorphe à P et C est contenu dans l'hyperplan des $g(D)$ avec $D \cdot Z = 0$. Notons $V = \{ g(D);\ D \in NS(X) \text{ et } D \cdot Z = 0 \}$, et posons $V_{\mathbf{R}} = V \otimes \mathbb{R}$. L'ensemble C est donc un sous-ensemble compact convexe dont l'intérieur dans $V_{\mathbf{R}}$ contient 0. Soient $D \mapsto \| D \|$ une norme sur $NS_{\mathbf{R}}(X)$, et $g(D) \mapsto \| g(D) \|$ la norme quotient sur $NS^1_{\mathbf{R}}(X, Y)$. On définit pour tout $x \in V_{\mathbf{R}} - C$ le nombre réel $t(x)$ en posant:

$$t(x) = \sup\{ t;\ t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } tx \in C \}.$$

PROPOSITION 4-1: *Il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que pour tout $x \in V \setminus C$, on ait*:

(i) $t(x) \in \mathbb{Q}$,
(ii) *le dénominateur de $t(x)$ est* $\leqslant c_0 \| x \| + c_1$.

La Proposition 4-1 n'est qu'une reformulation du Théorème 1-3.

Grâce à la Proposition 1-4, en utilisant la dualité pour la forme d'intersection entre P et l'ensemble formé des $Z \in \overline{NE}(X)$ vérifiant $f^*(L) \cdot Z = 0$, on obtient le Théorème 0.

Appendice: Une caractérisation de certains convexes polyédriques

Introduction

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, R un réseau dans V. Soit C un ensemble convexe compact tel que 0 appartienne à l'intérieur de C. Pour chaque $x \in V - \{0\}$, on pose:

$$t(x) = \sup\{t;\ t \in \mathbb{R}_+,\ tx \in C\}.$$

Soit $M = \sup\{\|x\|;\ x \in C\}$.

THÉORÈME A-0: *Soit N un entier positif tel que la condition suivante soit réalisée: Pour tout $x \in R - \{0\}$ tel que $\|x\| \geqslant N$, on a $t(x) \in \mathbb{Q}$ et le dénominateur de $t(x)$ est $\leqslant \|x\|$. Alors C est polyédrique et il existe une famille finie A de couples $(g, a) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ telle que*:

(i) $C = \bigcap_{(g,a) \in A} \{x;\ g(x) + a \geqslant 0\}$,

(ii) *pour tout $(g, a) \in A$, on a $\|g\| \leqslant M$ et $|a| \leqslant M$.*

1. Quelques résultats intermédiaires

Soit n un entier $\geqslant 0$. Posons $V = \mathbb{R}^n$ et $R = \mathbb{Z}^n$.

PROPOSITION 1-1: (*referee inconnu*): *Soit f une fonction convexe de V dans $\mathbb{R}$ telle que pout tout $x \in V$ on ait pour tout entier q*:

$$qx \in R \Rightarrow qf(x) \in \mathbb{Z}.$$

Alors pour tout ouvert non vide $\mathscr{U} \subset V$, il existe un ouvert non vide $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$ tel que la restriction de f à $\mathscr{W}$ soit une forme affine à coefficients entiers.

DÉMONSTRATION: Introduisons quelques notations. Soit m un entier > 1. Posons $I = \{1, \ldots, n\}$ et soit $(e_i)_{i \in I}$ la base canonique de V. Pour tout entier positif t, notons $S(n, t)$ l'ensemble formé des $(x_i)_{i \in I}$ vérifiant pour tout $i \in I$, $x_i \geqslant 0$ et $\sum_{i \in I} x_i \leqslant (1/m)^t$.

1er pas: Soit g une fonction convexe de $S(n, 0)$ dans $\mathbb{R}$. Si g n'est pas une forme affine, pour tout $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ intérieur à $S(n, 0)$, on a:

$$g(x) < \Big(1 - \sum_{i \in I} x_i\Big) g(0) + \sum_{i \in I} x_i g(e_i).$$

Cela est une conséquence directe des définitions.

Posons pour tout $x \in V$ et tout $t \geqslant 0$:

(1) $\quad g(x, t) = m^t\big(f\big(x + \big(e_n/m^t\big)\big) - f(x)\big).$

D'après l'hypothèse, on a:

(2) Pour tout entier t positif et tout $x \in (1/m)^t R$ on a: $g(x, t) \in \mathbb{Z}$.

Il est clair qu'il existe un entier positif a et $z \in (1/m)^a R$ tels que:

$$z + S(n, a) \subset \mathscr{U}.$$

Montrons le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$ le résultat est clair. Soit n un entier > 0. Supposons le résultat acquis si $\dim V < n$ et montrons le pour $\dim V = n$. Montrons premièrement qu'il existe un ouvert non vide $\mathscr{W}$ tel que la restriction de f à $\mathscr{W}$ soit une forme affine à coefficients réels.

2ème pas: Quitte à multiplier f par entier > 0 et à ajouter à f une forme affine, on peut se ramener au cas où f vérifie les conditions suivantes:

(3) la restriction de f à $z + S(n-1, a)$ est nulle,

(4) f est à valeurs positives sur $z + S(n, a)$,

(5) pour tout $x \in V$ et tout entier q, on a: $qx \in R \Rightarrow qf(x) \in \mathbb{Z}$.

Considérons la fonction de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \mapsto m^a f\Big(z + \sum_{0 \leqslant i \leqslant n-1} x_i e_i\Big)$$

Elle vérifie les hypothèses de la proposition. Quitte à changer z et a, on peut supposer qu'il existe une forme affine h à coefficients entiers telle que pour tout $x \in z + S(n-1, a)$, on ait: $m^a f(x) = h(x)$. Remplaçons f par $m^a f - h$. On a:

(6) pour tout $x \in z + S(n-1, a)$, $f(x) = 0$.

Soit $s: V \to V$ la symétrie par rapport à l'hyperplan engendré par les e_i pour $i < n$ parallèlement à e_n. Pour tout $x = (x_i)_{i \in I} \in S(n, a)$ on a

$$z + s(x) = \left(1 - m^a \sum_{i \in I} x_i\right) z + \sum_{i<n} (m^a x_i)\left(z + (e_i/m^a)\right) + (m^a x_n)\left(z + (e_n/m^a)\right).$$

Puisque f est convexe on déduit compte tenu de (6) que:

$$(7) \qquad f(z + s(x)) \leqslant m^a x_n f\left(z - (e_n/m^a)\right)$$

Posons $b = m^a f(z - (e_n/m^a))$; par hypothèse on a $b \in \mathbb{Z}$. Soit k la forme affine définie pour tout $x \in V$ par: $k(x) = m^a b(z_n - x_n)$. Il est clair que

(8) pour tout $x \in V$ et tout entier q, si $qx \in R$, on a $qk(x) \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in z + S(n-1, a)$, on a $k(x) = 0$.

D'après (7) on a pour tout $x \in S(n, a)$: $f(z + s(x))m^a \leqslant k(z + s(x))$. Quitte à remplacer f par $m^a f - k$, on peut supposer que l'on a (5) et (6). Par construction on a alors pour tout $x \in S(n, a)$: $f(z + s(x)) \leqslant 0$. Puisque f est convexe on déduit que pour tout $x \in S(n, a)$, on a: $f(z + x) \geqslant 0$. Cela termine de montrer le $2^{\text{ème}}$ pas.

3ème pas: Supposons qu'il n'existe par d'ouvert non vide $\mathscr{W}$ contenu dans $z + S(n, a)$ tel que la restriction de f à $\mathscr{W}$ soit une forme affine. Montrons que l'on peut construire une suite $(x_p)_{p \geqslant 0}$ de points de $z + S(n-1, a)$ telle que pour tout $p \geqslant 0$ on ait:

$$(9) \qquad x_p + S(n-1, a+p) \subset z + S(n, a),$$

$$(10) \qquad g(x_{p+1}, a+p+1) < g(x_p, a+p).$$

Posons $x_0 = z$. Supposons x_p construit et construisons x_{p+1}. D'après le premier pas on a:

$$f\left(x_p + \sum_{i \in I} (e_i/m^{a+p+1})\right) < (1/m) f\left(x_p + \sum_{i<n} (e_i/m^{a+p})\right) + (1/m) f\left(x_p + (e_n/m^{a+p})\right) + (1 - (2/m)) f(x_p).$$

Posons $x_{p+1} = x_p + \sum_{i<n} (e_i/m^{a+p+1})$. D'après (1) et (3) on déduit l'asser-

tion (10). Puisque $m > 1$, on aussi l'assertion (9). Cela termine la démonstration du $3^{\text{ème}}$ pas.

$4^{\text{ème}}$ pas: La fin de la démonstration

D'après le résultat du $3^{\text{ème}}$ pas et les assertions (1), (2), (3), (4) et (5), on voit que l'hypothèse du $3^{\text{ème}}$ pas est absurde. Soit $\mathscr{W}$ on ouvert non vide contenu dans $\mathscr{U}$ tel que la restriction de f à $\mathscr{W}$ soit une forme affine. Soient $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels et a_0 un nombre réel tel que pour tout $x = (x_i)_{i \in I} \in \mathscr{W}$ on ait:

$$(11) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{i \in I} a_i x_i.$$

Soient r et s deux entiers premiers entre eux et u et v deux points de $\mathscr{W}$ tels que $ru \in R$ et $sv \in R$. Il existe un entier p positif tel que pour tout $i \in I$, on ait $u + (1/r)^p e_i \in \mathscr{W}$ et $v + (1/s)^p e_i \in \mathscr{W}$. En considérant pour chaque $i \in I$, $f(u + (1/r)^p e_i) - f(u)$ et $f(v + (1/s)^p e_i) - f(v)$ on a: $r^p a_i \in \mathbb{Z}$ et $s^p a_i \in \mathbb{Z}$, ce qui implique $a_i \in \mathbb{Z}$. En utilisant (11) on obtient: $ra_0 \in \mathbb{Z}$ et $sa_0 \in \mathbb{Z}$, ce qui montre que $a_0 \in \mathbb{Z}$. On a donc démontré la proposition.

PROPOSITION 1-2: *Soit C un ensemble compact convexe de V contenant 0 dans son intérieur. Pour tout $x \in V$, on définit l'ensemble $A(x)$ formé des éléments $t \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \in tC$. Soit $s(x)$ la borne inférieure de l'ensemble $A(x)$. Alors la fonction $x \mapsto s(x)$ est une function convexe de V dans $\mathbb{R}$ et on a*:

(i) $C = \{x;\ x \in V,\ s(x) \leqslant 1\}$,
(ii) *pour tout $t > 0$ et tout $x \in V$*: $s(tx) = ts(x)$.

Le résultat est classique et nous renvoyons le lecteur à Rockafellar [Ro] pour la démonstration.

PROPOSITION 1-3: *Soient C un cône convexe fermé d'intérieur non vide dans V, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbb{Z})$, a, m et M des entiers vérifiant les conditions suivantes*:

(a) $H = C \cap \{x;\ g(x) + a \geqslant 0\}$ *est un ensemble compact d'intérieur non vide et* $0 \in H$.
(b) $H \subset B(0, M)$ *et* $B(0, m) \subset \{x;\ g(x) + a \geqslant 0\}$.
(c) *Pour tout $x \in C - \{0\}$ soit $A(x)$ l'ensemble formé des $t \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \in tH$. Soit $s(x)$ la borne inférieure de $A(x)$. On suppose qu'il existe un entier N tel que pour tout $x \in C \cap R - \{0\}$ vérifiant $\| x \| \geqslant N$, on a $s(x) \in \mathbb{Q}$ et le numérateur de $s(x)$ est $\leqslant \| x \|$.*
(d) *L'idéal engendré par $g(R)$ et a est $\mathbb{Z}$.*

Alors on a: $\| g \|(1)(M/m)$ *et* $| a | \leqslant M$.

DÉMONSTRATION:
1er pas: quelques inégalités

Ecrivons pour tout $x \in C \cap R - \{0\}$ vérifiant $\| x \| \geqslant N$, $s(x) = (p(x)/q(x))$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des entiers premiers entre eux. Par (c), on a:

$$| p(x) | \leqslant \| x \|. \tag{1}$$

Par définition on a:

$$x(q(x)/p(x)) \in H.$$

D'après (b) on a:

$$\| x \| (q(x)/p(x)) \leqslant M.$$

En utilisant (1) on déduit:

$$| q(x) | \leqslant M. \tag{2}$$

D'autre part d'après (b) pour tout $x \in B(0, m)$ on a: $g(x) + a \geqslant 0$. Cela implique:

$$m \| g \| \leqslant | a |. \tag{3}$$

2ème pas: on a $| a | \leqslant M$

Soit $x \in \mathring{C} \cap R - \{0\}$ et $u \in R$ tels que $g(u)$ et a soient premiers entre eux. Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait:

$$nax + u \in C \cap R \quad \text{et} \quad \| nax + u \| \geqslant N.$$

Pour tout entier positif r posons $y(r) = rax + u$. Pour tout $r \geqslant n_0$ on a

$$g(y(r)) + s(y(r))a = 0.$$

Cela montre que:

$$a(p(y(r)) + rq(y(r))g(x)) = -q(y(r))g(u).$$

Comme $g(u)$ et a sont premiers entre eux, on voit que a divise $q(y(r))$, ce qui implique d'après (2) le résultat.

En utilisant (3) on termine la démonstration de la proposition.

2 La démonstration du théorème A-0

Gardons les notations de la section précédente. Soit C un ensemble compact convexe vérifiant les hypothèses du Théorème A-0. Soit s la

fonction définie à la Proposition 1-2. Notons A la famille des couples (g, a) où $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbb{Z})$ et $a \in \mathbb{Z}$ vérifiant:

(1) $g(R)$ et a engendrent $\mathbb{Z}$,
(2) $C \subset \{x;\ g(x) + a \geqslant 0\}$,
(3) $\| g \| \leqslant M$ et $| a | \leqslant M$.

Cette famille A est finie. Posons $C' = \bigcap_{(g,a)\in A} \{x;\ g(x) + a \geqslant 0\}$.

1er pas: Quelques inégalités
D'après les hypothèses pour tout $x \in R$ vérifiant $\| x \| \geqslant N$, on a: $s(x)$ appartient à $\mathbb{Q}$. Soient $x \in R$ vérifiant $\| x \| \geqslant N$, $p(x)$ et $q(x)$ deux entiers premiers entre eux tels que:

$$s(x) = p(x)/q(x).$$

On a aussi:

$$| p(x) | \leqslant \| x \|. \tag{4}$$

Puisque $x \in s(x)C$, on obtient:

$$q(x)(x/p(x)) \in C.$$

Par densité on déduit:

$$B(0, 1) \subset C, \tag{5}$$

et en utilisant (4):

$$| q(x) | \leqslant M. \tag{6}$$

2ème pas: on a $C = C'$
Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Comme $C \subset C'$, il existe un ouvert non vide $\mathcal{U}$ contenu dans C' tel que:

$$C \cap \mathcal{U} = \emptyset. \tag{7}$$

D'après (6) et l'assertion (ii) de la Proposition 1-2, il existe un entier $r > 0$ tel que pour tout $x \in rR - \{0\}$ on ait:

$$\| x \| \geqslant N,$$

$$s(x) \in \mathbb{Z}.$$

D'après la Proposition 1-2, s est une fonction convexe qui vérifie les

hypothèses de la proposition 1-1. Il existe donc un ouvert non vide $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(rR, \mathbb{Z})$ et un entier b tels que pour tout $x \in \mathscr{V}$ on ait:

$$s(x) = h(x) + b.$$

D'après l'assertion (ii) de la Proposition 1-2, on voit que $b = 0$. Posons $E = \overline{\mathscr{V}}\mathbb{R}_+$ et $k = -rh$. On a: $k \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbb{Z})$. D'après l'assertion (i) de la Proposition 1-2 on a:

$$E \cap C = E \cap \{x;\ k(x) + r \geqslant 0\}. \tag{8}$$

Posons $H = E \cap C$. Il est clair qu'il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbb{Z})$ et un entier a tels que a et $g(R)$ engendrent $\mathbb{Z}$ et que l'on ait:

$$H = E \cap \{x;\ g(x) + a \geqslant 0\}.$$

Pour $m = 1$, d'après (5), il est clair que les conditions (a),...,(d) de la Proposition 1-3 sont vérifiées. En utilisant celle-ci on obtient:

$$\| g \| \leqslant M \quad \text{et} \quad | a | \leqslant M.$$

Puisque $\mathscr{V} \subset C'$, on a $\mathscr{V} \subset H$; en utilisant (8) on obtient:

$$\mathscr{V} \subset C,$$

ce qui contredit (7).
Cela achève la démonstration du théorème.

Références

[B] X. BENVENISTE: Sur l'anneau canonique de certaines variétés de dimension 3. *Inv. Math.* 73 (1983) 153–164.

[B-1] X. BENVENISTE: Sur le cône des 1-cycles effectifs en dimension 3. *Math. Ann.* 272 (1985) 257–265.

[B-2] X. BENVENISTE: Sur la décomposition de Zariski en dimension 3. Note aux C.R.A.S. t 295 (20 Sept 1982), Série I 107–110.

[Ha] R. HARTSHORNE: *Algebraic Geometry*. G.T.M. 52. Springer Verlag (1977).

[Hi] H. HIRONAKA: Resolution of an algebraic variety over a field of characteristic zero (I, II). Anals of Math. 79 (1964) 109–326.

[H-W] G.H. HARDY and E.M. WRIGHT: An introduction to the theory of numbers 5th edition, Clarendon: Oxford (1979).

[K] Y. KAWAMATA: A generalisation of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem. *Math. Ann.* 261 (1983) 43–46.

[K-1] Y. KAWAMATA: The cone of curves of algebraic varieties. *Ann. of Math.* 119 (1984) 603–633.

[K-2] Y. KAWAMATA: Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties. *Inv. Math.* 79 (1985) 567–588.

[Ko] J. KOLLAR: The cone theorem. *Ann. of Math.* 120 (1984) 1–5.

[R] M. REID: Canonical 3-folds. In: *Géometrie Algébrique, Angers 1979*, pp. 273–310, A. Beauville (éditeur) Sijthoff Noordhoff (1980).
[R-1] M. REID: Minimal models of canonical 3-folds. In: *Symposia in Math.* Vol. 1, S. Iitaka et H. Morikawa (éditeurs). Kinokuniya-North Holland (1981).
[Ro] R.T. ROCKAFELLAR: *Convex Analysis*: Princeton University Press no. 28 (1970).
[S] V.V. SHOKUROV: Non vanishing theorem. *Izv. An. SSSR*. (à paraître).
[V] E. VIEHWEG: Vanishing theorems. *J. reine angew. Math.* 335 (1982) 1–8.

(Oblatum 25-VI-1985 & 22-X-1985)

X. Benveniste
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau
France