Compositio Mathematica

Henri Carayol

Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura

Compositio Mathematica, tome 59, n^{o} 2 (1986), p. 151-230
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1986__59_2_151_0>

Compositio Mathematica 59 (1986) 151–230

SUR LA MAUVAISE RÉDUCTION DES COURBES DE SHIMURA

Henri Carayol

Plan

0. Introduction et notations

0.1. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré fini $d > 1$, et soit B une algèbre de quaternions de centre F, telle que B se déploie en une place réelle τ de F et se ramifie aux autres places réelles. Soit G le groupe réductif sur $\mathbf{Q}$:

$$G \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(B^*).$$

Le groupe $G(\mathbf{R})$ est donc isomorphe au produit $GL_2(\mathbf{R}) \times (\mathbf{H}^*)^{d-1}$ où $\mathbf{H}$ désigne le corps des quaternions de Hamilton. L'homomorphisme de $\mathbf{C}^*$ dans $GL_2(\mathbf{R}) \times (\mathbf{H}^*)^{d-1}$ qui envoie $x + iy$ sur $\left[\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}^{-1}, 1, \dots, 1\right]$ provient d'un morphisme h du groupe $\boldsymbol{S} = \mathrm{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(G_m)$ dans $G_{\mathbf{R}}$. Nous désignons par X la classe de $G(\mathbf{R})$-conjugaison de h (X est somme de deux copies du "demi-plan de Poincaré').

0.2. Nous considérons alors le système projectif, indexé par les sous-groupes compacts-ouverts K de $G(\mathbf{A}^f)$, de surfaces de Riemann compactes:

$$M_K(G, X)(\mathbf{C}) \underset{\text{def}}{=} G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}^f) \times X/K.$$

La théorie de Shimura (cf. [Sh], [D1]) définit alors un *modèle canonique* $M_K(G, X)$ de $M_K(G, X)(\mathbf{C})$ sur le corps F (considéré via τ comme un sous-corps de $\mathbf{C}$). Les $M_K(G, X)$ constituent un système projectif de courbes algébriques lisses et complètes sur F.

L'objet de ce travail est d'étudier la *réduction* de ces courbes en une place finie de F où B *se déploie*.

0.3. Remarque: Le cas ici exclu où $F=\mathbf{Q}$ se décompose en deux possibilités:

(a) B est *déployée*: les $M_K(G, X)$ correspondantes sont alors les *courbes modulaires* (usuelles). La théorie de leur réduction est bien connue d'après les travaux de Deligne-Drinfeld-Rapoport. La seule différence notable avec le cas ici considéré tient à la non-compacité de ces courbes. (Voir [K · H]).

(b) B est *ramifiée*: Let $M_K(G, X)$ sont alors complètes. La réduction de ces courbes a été étudiée par Morita en interprétant $M_K(G, X)$ comme espace de modules de "fausses courbes elliptiques". Tous les résultats que nous allons obtenir dans ce travail sont valables dans ce cas particulier. Cependant, nous avons préféré l'exclure: en effet, les méthodes que nous allons utiliser (recours à un "modèle étrange") deviennent ridicules dans ce cas; de plus, nous serions obligés de traiter des cas particuliers parasites dans nos démonstrations.

0.4. Fixons donc une place $\mathfrak{p}$ de F où B est déployée, et notons $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$ l'anneau des éléments de F entiers en $\mathfrak{p}$, et $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ son complété, de corps des fractions $F_\mathfrak{p}$. Soit κ, de caractéristique p et de cardinal q, le corps résiduel de $F_\mathfrak{p}$. Nous choisissons une identification entre $B\otimes F_\mathfrak{p}$ et $M_2(F_\mathfrak{p})$, et nous notons $K_\mathfrak{p}^0$ (resp. $K_\mathfrak{p}^n$) le sous-groupe $GL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ de $(B\otimes F_\mathfrak{p})^*$ (resp. le sous-groupe de congruence formé des éléments de $GL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ qui sont congrus à 1 modulo $\mathfrak{p}^n$). Pour alléger les notations, nous notons Γ le produit restreint, étendu aux places finies $v\neq\mathfrak{p}$ de F, des groupes $(B\otimes F_v)^*$. Nous nous limitons ici à ne considérer que des sous-groupes K de la forme:

$$K=K_\mathfrak{p}^n\times H,$$

pour H un sous-groupe compact ouvert de Γ, et nous notons:

$$M_{n,H}\underset{\text{def}}{=}M_{K_\mathfrak{p}^n\times H}.$$

Noter cependant que des modifications faciles de nos arguments nous permettraient d'étudier aussi la réduction des M_K pour des sous-groupes K plus généraux de la forme:

$$K=K_\mathfrak{p}\times H,\quad \text{avec } K_\mathfrak{p}\subset K_\mathfrak{p}^0.$$

0.5. Le premier résultat que nous obtenons était déjà connu de Morita ([Mo]): pour H assez petit, la courbe $M_{0,H}$ a *bonne réduction* en $\mathfrak{p}$; il existe un modèle propre et lisse $\boldsymbol{M}_{0,H}$ de $M_{0,H}$ sur l'anneau $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$, et un tel modéle est unique (à isomorphisme unique près). Les $\mathbf{M}_{0,H}$ constituent alors un système projectif à morphismes de transition étales.

Ce résultat de bonne réduction se prouve par comparaison avec les variétés de Shimura associées à un groupe G' de similitudes unitaires (tel que G et G' admettent le même groupe dérivé). Ces dernières variétés se décrivent en termes de modules de variétés abéliennes. Il convient de souligner qu'il n'y a pas de choix canonique d'un tel groupe G', et que les variétés $M_K(G, X)$ n'admettent pas de description modulaire naturelle.

0.6. Afin d'obtenir des résultats propres sur la réduction des courbes $M_{n,H}$, nous sommes conduits à définir de façon naturelle certains groupes sur les $M_{0,H}$: soit $n \geqslant 1$ un entier, et considérons l'action à droite du groupe $K_{\mathfrak{p}}^0/K^n = GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$ sur le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$ telle que $g \in GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$ envoie $v \in (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$ sur $g^{-1} \cdot v$. Le même groupe opère aussi à droite sur $M_{n,H}$, avec pour quotient $M_{0,H}$. Pour H assez petit (une condition qui dépend de n), cette dernière action est *libre*. On définit alors sur $M_{0,H}$ un schéma étale en $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules, comme le quotient:

$$E_n \underset{\text{def}}{=} \left[M_{n,H} \times \left(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \right)^2 \right] / GL_2\left(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n \right).$$

Il existe entre les E_n lorsque n et H varient des compatibilités évidentes, et la limite inductive E_∞ des E_n constitue un *groupe de Barsotti-Tate* sur la limite projective des $M_{0,H}$. Ce dernier groupe E_∞ est le substitut dans le cas présent du groupe p-divisible de la courbe elliptique "universelle" sur les schémas de modules des courbes elliptiques.

0.7. Nous montrons ensuite (toujours par comparaison avec les variétés de Shimura associées au groupe G') qu'il existe une unique façon "naturelle" de prolonger les E_n en des groupes localement libres $\boldsymbol{E}_n$ sur les $\boldsymbol{M}_{0,H}$; la limite inductive $\boldsymbol{E}_\infty$ des $\boldsymbol{E}_n$ constitue alors un groupe de Barsotti-Tate sur la limite projective de $\boldsymbol{M}_{0,H}$. Le groupe $\boldsymbol{E}_\infty$ ainsi défini se trouve être un objet déjà étudié, dans un contexte différent, par Drinfel'd ([Dr]): un "$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module divisible de hauteur 2".

0.8. Soit x un point géométrique de caractéristique p de $\boldsymbol{M}_{0,H}$. Il résulte alors de Drinfel'd que deux possibilités se présentent pour le groupe $\boldsymbol{E}_\infty \mid x$.

(a) *Cas "ordinaire"*: Le groupe $\boldsymbol{E}_\infty \mid x$ est isomorphe au produit du $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module divisible constant $(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ par (l'unique) $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel de hauteur 1 (ce dernier n'étant autre que la réduction d'un groupe de Lubin-Tate associé au corps local $F_{\mathfrak{p}}$)

(b) *Cas "supersingulier"*: Le groupe $E_\infty \mid x$ est isomorphe à (l'unique) $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel de hauteur 2.

Nous montrons que les points supersinguliers de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ constituent un ensemble fini non vide.

0.9. Nous prouvons de plus un "théorème de Serre-Tate": Soit x un point géométrique de caractéristique p de $\boldsymbol{M}_{0,H}$, et soit $\widehat{(\boldsymbol{M}_0)_{(x)}}$ le complété du localisé strict de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ en x. Alors la restriction de $\boldsymbol{E}_\infty$ à $\widehat{(\boldsymbol{M}_0)_{(x)}}$ coïncide avec "la" déformation universelle (étudiée par Drinfel'd) du $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module divisible $\boldsymbol{E}_\infty \mid x$.

0.10. Disposant du groupe $\boldsymbol{E}_n$ sur $\boldsymbol{M}_{0,H}$, nous sommes alors en mesure d'étudier la (mauvaise) réduction des courbes $M_{n,H}$: après avoir rappelé la définition (d'après [Dr]) d'une "base de Drinfel'd" sur $\boldsymbol{E}_n$, nous considérons le schéma $\boldsymbol{M}_{n,H}$ au-dessus de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ qui représente le foncteur "ensemble des bases de Drinfel'd". Le $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$-schéma $\boldsymbol{M}_{n,H}$ constitue alors un modèle de $M_{n,H}$. Ses propriétés locales résultent du théorème de "Serre-Tate" précédent et de l'étude effectuée par Drinfel'd: on trouve que $\boldsymbol{M}_{n,H}$ est un schéma *régulier*, fini et plat au-dessus de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ (il s'identifie donc au *normalisé* de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ dans $M_{n,H}$).

0.11. Afin d'établir des propriétés relatives des schémas $\boldsymbol{M}_{n,H}$, nous introduisons le F-schéma fini $\mathcal{M}_{n,\nu(H)}$ des composantes connexes géométriques de $M_{n,H}$. Il résulte de la "loi de réciprocité des modèles canoniques" que ce schéma $\mathcal{M}_{n,\nu(H)}$ est isomorphe au spectre d'une extension abélienne finie de F (que l'on peut préciser). Il se prolonge de façon unique en un $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$-schéma fini normal $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,\nu(H)}$ (i.e. le spectre de l'anneau des $\mathfrak{p}$-entiers de ladite extension).

Nous montrons que le morphisme structural de $M_{n,H}$ dans $\mathcal{M}_{n,\nu(H)}$ se prolonge en un morphisme:

$$\boldsymbol{M}_{n,H} \to \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,\nu(H)},$$

lequel est *lisse en dehors des points supersinguliers*. Nous en donnons une interprétation modulaire en termes d'un groupe $\boldsymbol{L}_n$ sur $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,\nu(H)}$ défini de façon analogue au groupe $\boldsymbol{E}_n$ (la théorie de ces groupes $\boldsymbol{L}_n$ est une adaptation de la théorie de Lubin-Tate).

0.12. Soit x un point géométrique de caractéristique p de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,\nu(H)}$. Nous montrons que la fibre au-dessus de x du morphisme précédent est la réunion d'une famille indexée par $\mathbf{P}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$ de courbes irréductibles lisses, lesquelles s'intersectent deux à deux en chaque point supersingulier, et ne s'intersectent pas ailleurs.

0.13. Nous prouvons enfin une "relation de congruence" reliant l'action sur $\boldsymbol{M}_{n,H}(\bar{\kappa})$ du groupe $G(\mathbf{A}^f)$ et du groupe $W(\bar{\kappa}/\kappa)$ et nous décrivons la structure de l'ensemble des points supersinguliers de $\boldsymbol{M}_{n,H}(\bar{\kappa})$.

0.14. Ce travail a été annoncé dans [Ca 1]. Dans un prochain article, nous appliquerons les résultats ici obtenus à l'étude (annoncée dans [Ca 2]) de la correspondance entre formes modulaires de Hilbert sur F et représentations l-adiques du groupe $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$.

Suite des notations

- Nous utiliserons souvent la notation abrégée: $M_K = M_K(G, X)$.
- Nous noterons $\tau_1 = \tau$ et nous désignerons par $\tau_2, \ldots, \tau_d$ les autres plongements réels de F.
- Soient $T \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(G_m)$.

  Z(isomorphe à T) le centre de G.

  G_1 le groupe dérivé de G.

  PG le groupe adjoint.
- Nous notons $\nu: G \to T$ le morphisme obtenu par restriction de la norme réduite (le noyau de ν est donc G_1).
- Nous noterons $G(\mathbf{R})^+$ la composante neutre de $G(\mathbf{R})$, et $G(\mathbf{Q})^+ = G(\mathbf{Q}) \cap G(\mathbf{R})^+$. Mêmes notations pour d'autres groupes définis sur $\mathbf{Q}$.
- L'espace X est réunion de deux classes de $G(\mathbf{R})^+$-conjugaison. Nous noterons X^+ (demi-plan de Poincaré) la classe de $G(\mathbf{R})^+$-conjugaison de h.
- Nous poserons $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$, et soient $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ les autres places de F qui figurent dans la décomposition de p. Nous aurons parfois besoin de choisir une uniformisante du corps $F_\mathfrak{p}$, nous la noterons encore $\mathfrak{p}$ (ce choix ne jouera qu'un rôle auxiliaire).
- Le groupe $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^*$ (resp. le sous-groupe des unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{p}^n$) est noté $U_\mathfrak{p}^0$ (resp. $U_\mathfrak{p}^n$).
- Nous considérerons toujours F comme plongé dans $\mathbf{C}$ par le plongement τ. Nous désignerons par $\overline{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$. Nous fixons aussi une clôture algébrique $\bar{F}_\mathfrak{p}$ de $F_\mathfrak{p}$, ainsi qu'un F-plongement $\overline{\mathbf{Q}} \subset \bar{F}_\mathfrak{p}$.

  Nous notons aussi:

  $F^{ab} \subset \overline{\mathbf{Q}}$ l'extension abélienne maximale de F

  $F_\mathfrak{p}^{ab} \subset \bar{F}_\mathfrak{p}$ l'extension abélienne maximale de $F_\mathfrak{p}$

  $F_{(\mathfrak{p})}^{nr} \subset F^{ab}$ l'extension abélienne non ramifiée en $\mathfrak{p}$ maximale de F

  $F_\mathfrak{p}^{nr}$ (ou $F_\mathfrak{p}^0$) $\subset F_\mathfrak{p}^{ab}$ l'extension non ramifiée maximale de $F_\mathfrak{p}$

  $F_\mathfrak{p}^n \subset F_\mathfrak{p}^{ab}$ l'extension de $F_\mathfrak{p}^{nr}$ correspondant par la théorie du corps de classes au groupe $U_\mathfrak{p}^n$.

  Soient $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^{ab}$ (resp. $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^{nr}$, resp. $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$, resp. $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}^{nr}$) l'anneau des entiers de $F_\mathfrak{p}^{ab}$ (resp. de $F_\mathfrak{p}^{nr}$, resp. de $F_\mathfrak{p}^n$, resp. l'anneau des $\mathfrak{p}$-entiers de $F_{(\mathfrak{p})}^{nr}$).

- Pour X un schéma sur un corps L, nous considèrerons toujours l'action *à droite* de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ sur le schéma $X \underset{L}{\otimes} \bar{L}$.
- Enfin, l'isomorphisme de la théorie du corps de classes sera toujours normalisé en sorte que les éléments de Frobenius *géométriques* correspondent aux uniformisantes. Nos conventions pour les structures de Hodge sont celles de [D2].

§1. Propriétés générales des courbes $M_K(G, X)$

Nous nous référons dans la suite (parfois implicitement) aux exposés [D1] et [D2] de Deligne sur la théorie de Shimura.

1.1. Généralités

Les courbes de Shimura $M_K = M_K(G, X)$ ont été définies dans l'introduction.

1.1.1. Commençons par vérifier que le *corps de définition du modèle canonique* est bien le corps F, plongé dans $\mathbf{C}$ via τ. On obtient ce corps de définition comme le corps de définition de la classe de conjugaison du morphisme composé

$$G_{m,\mathbf{C}} \xrightarrow{r} \boldsymbol{S}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{h} G_{\mathbf{C}} \quad (\text{où } r \text{ est défini dans } [\mathrm{D1}], 1.3)$$

Ce morphisme composé est conjugué au morphisme qui envoie $z \in \mathbf{C}^* = G_m(\mathbf{C})$ sur l'élément:

$$\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}\right) \in G_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = \prod_{i=1}^{d} \left(B \underset{F,\tau_i}{\otimes} \mathbf{C}\right)^* \simeq [GL_2(\mathbf{C})]^d$$

et nous constatons aussitôt que le corps de définition de cette classe de conjugaison est bien le sous-corps $F \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbf{C}$.

1.1.2. Le système projectif $\{M_K(\mathbf{C})\}$ est muni d'une action à droite évidente du groupe $G(\mathbf{A}^f)$ i.e. de la famille des isomorphismes, pour $g \in G(\mathbf{A}^f)$:

$$.g : M_K(\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} M_{g^{-1}Kg}(\mathbf{C}).$$

Il résulte de la théorie de Shimura que cette action provient en fait d'une action sur le système projectif $\{M_K\}$ de F-schémas, i.e. d'une famille d'isomorphismes de F-schémas:

$$.g : M_K \xrightarrow{\sim} M_{g^{-1}Kg}.$$

1.1.3. Nous noterons M le F-schéma limite projective des M_K. Les points complexes de M sont donnés par:

$$M(\mathbf{C}) = G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}^f) \times X/Z(\mathbf{Q})^{\wedge}$$

où $Z(\mathbf{Q})^{\wedge}$ désigne l'adhérence de $Z(\mathbf{Q})$ dans $Z(\mathbf{A}^f)$.

Le F-schéma M est muni d'une action à droite "continue" du groupe $G(\mathbf{A}^f)$, laquelle se factorise via le quotient $G(\mathbf{A}^f)/Z(\mathbf{Q})^{\wedge}$.

Nous nous intéresserons aussi aux limites projectives partielles: $M_n \underset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ H}} M_{n,H}$ (isomorphes aux quotients $M/K_{\mathfrak{p}}^n$). (Nous nous intéresserons surtout en fait à M_0).

1.2. Ensemble des composantes connexes, loi de réciprocité

Nous avons noté $T(\mathbf{Q})^+$ l'ensemble des éléments totalement positifs de $T(\mathbf{Q}) = F^*$; soit aussi $T(\mathbf{Q})^{(+)} = \nu(G(\mathbf{Q}))$ l'ensemble des éléments qui sont positifs en $\tau_2, \dots, \tau_d$. Soit enfin $\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$ la bijection qui envoie la composante X^+ sur $+1$. D'après ([D1], th. 2.5) le morphisme ν induit alors une bijection:

$$\begin{aligned}\pi_0(M_K(\mathbf{C})) &\xrightarrow{\sim} T(\mathbf{Q})^{(+)}\backslash T(\mathbf{A}^f) \times \{\pm 1\}/\nu(K) \\ &\simeq T(\mathbf{Q})^{+}\backslash T(\mathbf{A}^f)/\nu(K) \\ &\simeq T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A}^f) \times \pi_0(T(\mathbf{R}))/\nu(K) \\ &\simeq \pi_0\big(T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A}^f)/\nu(K)\big).\end{aligned}$$

On obtient donc, en passant à la limite projective, une bijection:

$$\begin{aligned}\pi_0(M_{\mathbf{C}}) &\xrightarrow{\sim} T(\mathbf{Q})^{+\wedge}\backslash T(\mathbf{A}^f) \\ &\simeq T(\mathbf{Q})^{\wedge}\backslash T(\mathbf{A}^f) \times \pi_0(T(\mathbf{R})) \\ &\simeq \pi_0(T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A}))\end{aligned}$$

L'ensemble $\pi_0(M_{\mathbf{C}})$ s'identifie à l'ensemble des composantes connexes de $M \underset{F}{\otimes} \overline{\mathbf{Q}}$, et l'action *à droite* de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ sur $M \underset{F}{\otimes} \overline{\mathbf{Q}}$ induit donc une action de ce groupe de Galois sur $\pi_0(M_{\mathbf{C}})$. D'autre part, on dispose aussi d'une action à droite du groupe $G(\mathbf{A}^f)$ sur $M_{\mathbf{C}}$ et donc sur $\pi_0(M_{\mathbf{C}})$. Il est clair que cette dernière action se factorise via ν à travers $T(\mathbf{A}^f)$, et fait de $\pi_0(M_{\mathbf{C}})$ un espace principal homogène sous le groupe quotient

$T(\mathbf{Q})^{+\wedge}\backslash T(\mathbf{A}^f)$. Parce que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ commute à l'action de $G(\mathbf{A}^f)$, elle est définie par un *morphisme de "réciprocité"*:

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F) \to T(\mathbf{Q})^{+\wedge}\backslash T(\mathbf{A}^f).$$

On obtient comme suit ce morphisme de réciprocité (cf. [D1] 3.9.): l'homomorphisme composé $\nu \circ h \circ r$ est défini sur F, et donc provient d'un morphisme de groupes algébriques sur F

$$G_{m,F} \to T_F.$$

Composant le morphisme qu'on en déduit par restriction des scalaires de F à $\mathbf{Q}$ avec le norme, on obtient un morphisme:

$$T_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(G_{m,F}) \to \mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(T_F) \to T_{\mathbf{Q}}$$

égal dans le cas considéré ici à *l'inverse de l'identité*. Le morphisme de réciprocité est alors le composé:

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F) \to \mathrm{Gal}(F^{ab}/F) \xrightarrow{\sim} T(\mathbf{Q})^{+\wedge}\backslash T(\mathbf{A}^f) \xrightarrow{\mathrm{inv}} T(\mathbf{Q})^{+\wedge}\backslash T(\mathbf{A}^f)$$

i.e. l'inverse du composé de la projection naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ *sur* $\mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$ et de l'isomorphisme de la théorie du corps de classes.

1.3. Il est commode de paraphraser comme suit la loi de réciprocité précédente: pour $U \subset T(\mathbf{A}^f)$ un sous-groupe compact ouvert, nous considérons l'ensemble fini:

$$\mathscr{M}_U(\mathbf{C}) \underset{\mathrm{def}}{=} T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A}^f) \times \pi_0(T(\mathbf{R}))/U$$

et nous définissons sur cet ensemble une action "à droite" de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$, via $\mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$, comme l'inverse du composé de l'action évidente de $\pi_0(T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A}))$ par l'isomorphisme de la théorie du corps de classes. Cela définit un F-schéma fini $\mathscr{M}_U$, muni d'une action de $T(\mathbf{A}^f)$. On prendra garde à ne pas confondre $\mathscr{M}_U$ avec la variété de Shimura $M_U(T, \nu \circ h)$ dont $\mathscr{M}_U$ est un revêtement (les points complexes de $M_U(T, \nu \circ h)$ sont donnés par:

$$M_U(T, \nu \circ h)(\mathbf{C}) = T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A}^f)/U).$$

Le morphisme ν induit alors un morphisme à fibres connexes:

$$\nu : M_K(\mathbf{C}) \to \mathscr{M}_{\nu(K)}(\mathbf{C}),$$

et la loi de réciprocité précédente exprime le fait que ce dernier morphisme est défini sur F, i.e. provient d'un morphisme de F-schémas:

$$\nu : M_K \to \mathcal{M}_{\nu(K)}.$$

Nous adopterons pour $\mathcal{M}$ des notations analogues à (0.4): pour $V \subset (\mathbf{A}^{f,\mathfrak{p}})^*$ un sous-groupe compact ouvert, et n un entier nous poserons:

$$\mathcal{M}_{n,V} \underset{\text{def}}{=} \mathcal{M}_{U_{\mathfrak{p}}^n \times V}.$$

Nous poserons aussi:

$$\mathcal{M} \underset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\leftarrow \\ U}} \mathcal{M}_U \quad \text{et } \mathcal{M}_n = \lim_{\substack{\leftarrow \\ V}} \mathcal{M}_{n,V}.$$

Noter enfin que $\mathcal{M}_U$ est isomorphe (non canoniquement) en tant que F-schéma au spectre de l'extension abélienne de F qui correspond par la théorie du corps de classes au sous-groupe $T(\mathbf{Q}) \cdot U \cdot T(\mathbf{R})^0$ de $\mathbf{A}_F^*$; en particulier, $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(F^{ab})$ et $\mathcal{M}_0$ à $\mathrm{Spec}(F_{(\mathfrak{p})}^{nr})$.

1.4. Construction d'un groupe p-divisible sur M_0

1.4.1. Pour $H \subset \Gamma$ un sous-groupe compact ouvert, et $n \geqslant 1$ un entier, considérons le revêtement:

$$M_{n,H} \to M_{0,H}.$$

Le groupe $K_{\mathfrak{p}}^0$ agit sur $M_{n,H}$, avec pour quotient $M_{0,H}$. Le sous-groupe $K_{\mathfrak{p}}^n$ agit trivialement, ainsi que $(Z(\mathbf{Q}) \cap K_{\mathfrak{p}}^0 H)_{\mathfrak{p}}$, projection de $Z(\mathbf{Q}) \cap K_{\mathfrak{p}}^0 H$ sur $K_{\mathfrak{p}}^0$.

1.4.1.1. Lemme: *Le groupe H étant supposé assez petit (une condition indépendante de n), le quotient $K_{\mathfrak{p}}^0/[K_{\mathfrak{p}}^n \cdot (Z(\mathbf{Q}) \cap K_{\mathfrak{p}}^0 H)_{\mathfrak{p}}]$ agit librement sur $M_{n,H}$.*

Donnons de ce lemme une démonstration terre à terre:

Soient donc $k \in K_{\mathfrak{p}}^0$, $(g, x) \in G(\mathbf{A}^f) \times X$, $\gamma \in G(\mathbf{Q})$, $\kappa \in K_{\mathfrak{p}}^n$ et $h \in H$ tels qu'on ait la relation:

$$\gamma(g, x)\kappa h = (g, x)k$$

$$\text{i.e.} \begin{cases} \gamma = gk\kappa^{-1}h^{-1}g^{-1} & (\text{dans } G(\mathbf{A}^f)). \\ \gamma x = x. \end{cases}$$

Nous allons montrer que γ est central; il en résultera aussitôt que: $\gamma \in K_{\mathfrak{p}}^{0}H \cap Z(\mathbf{Q})$, d'où: $k \in K_{\mathfrak{p}}^{n}(Z(\mathbf{Q}) \cap K_{\mathfrak{p}}^{0}H)_{\mathfrak{p}}$. Pour cela, on considère la trace réduite et la norme réduite de γ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \gamma &= \operatorname{tr}(k\kappa^{-1}h^{-1}) \quad \text{dans } \mathbf{A}_F^f \\ \nu(\gamma) &= \nu(k\kappa^{-1}h^{-1}) \quad \text{dans } \mathbf{A}_F^f \end{aligned}$$

et l'élément suivant de F:

$$\mu = \frac{\operatorname{tr}^2\gamma - 4\nu(\gamma)}{\nu(\gamma)}.$$

On voit aussitôt que la projection de μ sur $\mathbf{A}_F^f$ se trouve dans un voisinage de 0 dépendant de H, qu'on peut rendre arbitrairement petit. De plus, la projection de μ sur $F \otimes \mathbf{R}$ se trouve dans un compact fixe (cela résulte du fait que γ stabilise x). Pour H assez petit, μ est donc *nul*, et il en résulte que γ est central, comme annoncé. □

1.4.1.2. LEMME (cf. Chevalley [Ch], th. 1): *Lorque H est assez petit (une condition qui dépend maintenant de n), on a l'inclusion*: $(Z(\mathbf{Q}) \cap K_{\mathfrak{p}}^{0}H)_{\mathfrak{p}} \subset K_{\mathfrak{p}}^{n}$.

1.4.1.3. COROLLAIRE: *Lorsque H est assez petit (une condition qui dépend de n), le groupe $K_{\mathfrak{p}}^{0}/K_{\mathfrak{p}}^{n}$ agit librement sur $M_{n,H}$. Le revêtement $M_{n,H} \to M_{0,H}$ est donc galoisien de groupe $K_{\mathfrak{p}}^{0}/K_{\mathfrak{p}}^{n} = GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$.*

1.4.2. On considère ensuite l'action à droite du groupe $GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$ sur le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$ telle que $g \in GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$ envoie $v \in (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$ sur $g^{-1}v$. Puis on définit *pour H assez petit* (comme dans le corollaire précédent) sur $M_{0,H}$ *un schéma en $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules par la formule*:

$$E_{n,H} \underset{\text{def}}{=} \left[M_{n,H} \times \left(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\right)^2\right] / GL_2\left(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n\right).$$

Ce $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module est localement (pour la topologie étale) isomorphe au $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module constant $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$.

1.4.3. *Propriétés*

(i) Soit $H' \subset H$ un sous-groupe. Il est alors clair que $E_{n,H'}$ *s'identifie au pull-back* de $E_{n,H}$ par la projection de $M_{0,H'}$ sur $M_{0,H}$. (Nous nous permettrons par conséquent de noter E_n le groupe $E_{n,H}$, lorsque aucune confusion ne sera possible).

(ii) Pour H assez petit pour que $E_{n,H}$ et $E_{n+1,H}$ soient définis, $E_{n,H}$ *s'identifie au sous-module de $\mathfrak{p}^n$-torsion de $E_{n+1,H}$.*

(iii) On définit une action du groupe Γ sur le système projectif des $E_{n,H}$ (n fixé), laquelle relève l'action naturelle de Γ sur le système projectif des $M_{0,H}$, de la façon suivante: on considère l'action de Γ sur le système des $[M_{n,H} \times (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2]$ produit de l'action de Γ sur le système des $M_{n,H}$ et de l'action triviale sur $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$. Parce que cette action de Γ commute à l'action du groupe $GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$, elle définit par passage au quotient l'action cherchée sur le système des $E_{n,H}$: on obtient donc, pour $\gamma \in \Gamma$ et $H' = \gamma^{-1}H\gamma$ un isomorphisme $E_{n,H} \xrightarrow{\sim} E_{n,H'}$ qui relève l'isomorphisme $M_{n,H} \xrightarrow{\sim} M_{n,H'}$.

1.4.4. Sur la limite projective M_0 des $M_{0,H}$ vit donc un groupe de $\mathfrak{p}^n$-torsion E_n, pull-back de chacun des $E_{n,H}$. La limite inductive E_∞ des E_n constitue alors un *p-groupe de Barsotti-Tate* sur M_0, muni d'une action de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. L'action sur M_0 du groupe Γ se relève en une action sur le groupe E_∞.

Par pull-back, on définit aussi E_∞ sur les M_n. Par construction, le groupe $E_\infty \mid M$ est trivial, isomorphe à $(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$.

1.5. Le groupe E_∞ à isogénie près

Notons E_∞^0 le groupe de Barsotti-Tate à isogénie près sur M_0 déduit de E_∞. Il est muni d'une action de $F_{\mathfrak{p}}$. Sur M, E_∞^0 est trivial, isomorphe au groupe p-divisible à isogénie près constant $[(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2]^0$.

On définit alors une action à droite du groupe $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ sur $E_\infty^0 \mid M \simeq M \times [(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2]^0$ comme le produit de l'action naturelle sur M et de l'action à isogénie près sur $(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$ pour laquelle $g \in GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ agit par multiplication à gauche par g^{-1}. On voit que cette action provient en fait d'une action sur le système projectif des $(E_\infty^0 \mid M_l)$: de façon plus précise, soit $g \in GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ et soient l et m des entiers tels que le conjugué $g^{-1}K_{\mathfrak{p}}^l g$ soit contenu dans $K_{\mathfrak{p}}^m$. L'action de g sur le système projectif des M_l définit un morphisme $g: M_l \to M_m$. L'action de g sur E_∞^0 induit alors un isomorphisme:

$$E_\infty^0 \mid M_l \overset{g}{\simeq} g^*\big(E_\infty^0 \mid M_m\big).$$

Combinant cette action de $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ avec l'action précédemment définie du groupe Γ sur E_∞, on obtient alors une action du groupe $G(\mathbf{A}^f)$ sur E_∞^0, laquelle relève l'action naturelle de $G(\mathbf{A}^f)$ sur M. On prendra garde au fait que le groupe $Z(\mathbf{Q})^\wedge$, qui agit trivialement sur M, *n'agit pas trivialement sur* E_∞^0: un élément $z \in Z(\mathbf{Q})^\wedge$ agit sur E_∞^0, via l'action de $F_{\mathfrak{p}}$ sur E_∞^0, par l'inverse $z_{\mathfrak{p}}^{-1} \in F_{\mathfrak{p}}^*$ de sa composante en $\mathfrak{p}$.

Le lecteur qui répugnerait à travailler au-dessus de la limite projective M pourrait se borner à ne considérer que des éléments $g \in G(\mathbf{A}^f)$ tels que g^{-1} envoie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^2$ dans lui-même (on se ramène toujours à ce cas par multiplication par un élément de $Z(\mathbf{Q})$). L'action de g sur $E_\infty \mid M$ est alors décrite par une famille de morphismes:

$$(E_n \mid M_{l,H}) \xrightarrow{g} g^*(E_n \mid M_{m,g^{-1}Hg})$$

1.6. Construction d'un groupe p-divisible sur $\mathcal{M}_0$

Soit $V \subset (\mathbf{A}^{\mathrm{f},\mathfrak{p}})^*$ un sous-groupe compact ouvert. On démontre comme le corollaire (1.4.1.3) que, *pour n fixé, si V est assez petit* (*une condition qui dépend de n*), *alors $\mathcal{M}_{n,V}$ est un revêtement galoisien de $\mathcal{M}_{0,V}$ de groupe $U_\mathfrak{p}^0/U_\mathfrak{p}^n$*. On considère alors l'action du groupe $U_\mathfrak{p}^0/U_\mathfrak{p}^n = (\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)^*$ sur le $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ telle que $g \in (\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)^*$ agisse par multiplication par g^{-1}, et on définit comme en (1.4.2) un schéma en $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules sur $\mathcal{M}_{0,V}$ par la formule:

$$L_{n,V} \underset{\mathrm{def}}{=} \left[\mathcal{M}_{n,V} \times (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})\right]/(\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)^*.$$

Il est clair que le système des $L_{n,V}$ possède les propriétés analogues à (1.4.3) (i), (ii) et (iii) (où Γ est remplacé par $(\mathbf{A}_F^{f,\mathfrak{p}})^*$). En particulier, sur la limite projective $\mathcal{M}_0$ des $\mathcal{M}_{0,V}$ vivent des groupes L_n (pull-back des $L_{n,V}$), et leur limite inductive constitue un groupe de Barsotti-Tate L_∞ où opère $(\mathbf{A}_F^{f,\mathfrak{p}})^*$.

1.7. "Accouplement de Weil"

L'isomorphisme composé (qui dépend du choix de l'uniformisante $\mathfrak{p}$):

$$\overset{2}{\underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\Lambda}} (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})^2 \xrightarrow[\sim]{\det} (\mathfrak{p}^{-2n}/\mathfrak{p}^{-n}) \xrightarrow[\sim]{\mathfrak{p}^n} (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})$$

induit de façon évidente un isomorphisme:

$$\overset{2}{\underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\Lambda}} E_n \xrightarrow{\sim} \nu^* L_n.$$

Nous noterons $e_n : E_n \underset{M_{0,H}}{\times} E_n \to \nu^* L_n$ le morphisme $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-bilinéaire alterné qui en résulte.

§2. Un "modèle étrange": Description modulaire

Parce que les variétés de Shimura $M_K(G, X)$ ne se décrivent pas en termes de modules de variétés abéliennes, nous sommes conduits à introduire un groupe G', admettant le même groupe dérivé que G, et une classe de conjugaison X' de morphismes du groupe S dans $G'_{\mathbf{R}}$, tels que les variétés de Shimura $M_{K'}(G', X')$ se décrivent en termes modulaires. Au paragraphe 4, nous expliquerons comment l'étude de $M_K(G, X)$ se ramène à celle des $M_{K'}(G', X')$.

2.1. Définitions:

2.1.1. Nous choisissons un élément négatif λ de $\mathbf{Q}$ tel que l'extension $\mathbf{Q}(\sqrt{\lambda})$ soit *décomposée* en p, et nous considérons alors l'extension quadratique totalement imaginaire $E = F(\sqrt{\lambda})$ de F. Nous choisissons aussi une racine carrée ρ de λ dans $\mathbf{C}$, et nous définissons des plongements complexes de E relevant les places $\tau_1, \ldots, \tau_d$ de F, et encore notés $\tau_1, \ldots, \tau_d$, par la formule:

$$\tau_i(x + y\sqrt{\lambda}) = \tau_i(x) + \rho\tau_i(y).$$

Nous considèrerons toujours E comme étant plongé dans $\mathbf{C}$ par le plongement τ_1 (en particulier $\sqrt{\lambda}$ est identifié à ρ).

Nous fixons de plus une racine carrée μ de λ dans $\mathbf{Q}_p$. Le morphisme de E dans $F_p \oplus F_p = (F \otimes \mathbf{Q}_p) \oplus (F \otimes \mathbf{Q}_p)$ qui envoie $x + y\sqrt{\lambda}$ sur le couple $(x + y\mu,\ x - y\mu)$ se prolonge en un isomorphisme:

$$E \otimes \mathbf{Q}_p \simeq F_p \oplus F_p = (F_{\mathfrak{p}_1} \oplus F_{\mathfrak{p}_2} \oplus \cdots \oplus F_{\mathfrak{p}_r}) \oplus (F_{\mathfrak{p}_1} \oplus \cdots \oplus F_{\mathfrak{p}_r}).$$

Nous considérons toujours E comme plongé dans $F_{\mathfrak{p}}$ par le morphisme composé:

$$E \subset E \otimes \mathbf{Q}_p \simeq F_p \oplus F_p \xrightarrow{pr_1} F_p \xrightarrow{pr_1} F_{\mathfrak{p}}.$$

Nous noterons enfin $z \to \bar{z}$ la conjugaison de E par rapport à F.

2.1.2. Soit T_E le tore $\mathrm{Res}_{E/\mathbf{Q}}(G_m)$ et soit U_E le sous-groupe de T_E défini par l'équation $z\bar{z} = 1$. Nous considérons le produit amalgamé $G'' = G \underset{Z}{\times} T_E$, et le morphisme:

$$G'' = G \underset{Z}{\times} T_E \xrightarrow{\nu'} T \times U_E$$

défini par $(g, z) \to (\nu(g)z\bar{z},\ z/\bar{z})$.

Considérons alors le sous-tore $T' = G_m \times U_E$ de $T \times U_E$, et soit G' l'image réciproque par ν' de T'. Le groupe dérivé de G' s'identifie au groupe dérivé G_1 de G, et l'on a une suite exacte:

$$1 \to G_1 \to G' \xrightarrow{\nu'} T' \to 1.$$

2.1.3. Les plongements complexes $\tau_1, \ldots, \tau_d$ de E définis ci-dessus nous fournissent un isomorphisme:

$$T_E(\mathbf{R}) = (E \otimes \mathbf{R})^* \simeq (\mathbf{C}^*)^d.$$

Soit $h_E : \boldsymbol{S} \to (T_E)_{\mathbf{R}}$ le morphisme défini par:

$$(\text{pour } z \in \boldsymbol{S}(\mathbf{R}) = \mathbf{C}^*) : h_E(z) = (1, z^{-1}, \ldots, z^{-1}).$$

La projection de $h \times h_E : \boldsymbol{S} \to (G \underset{T}{\times} \mathrm{T_E})_{\mathbf{R}}$ se factorise à travers un morphisme h' de $\boldsymbol{S}$ dans $G'_{\mathbf{R}}$. La classe de $G'(\mathbf{R})$-conjugaison X' de h' s'identifie à X^+. Au couple (G', X'), la théorie de Shimura associe un système projectif, indexé par les sous-groupes compacts-ouverts K' de $G'(\mathbf{A}^f)$, de courbes algébriques complètes $M_{K'}(G', X')$.

2.2. G' comme groupe de similitudes symplectiques

2.2.1. Soit $D = B \underset{F}{\otimes} E$, une algèbre de quaternions de centre E, et soit $l \to \bar{l}$ son involution de seconde espèce, produit tensoriel de l'involution canonique de B et de la conjugaison de E. Soit $\delta \in D$ un élément symétrique ($\bar{\delta} = \delta$) inversible et définissons sur D une autre involution de seconde espèce, notée $l \to l^*$, par la formule:

$$l^* = \delta^{-1}\bar{l}\delta$$

2.2.2. Considérons alors le $\mathbf{Q}$-vectoriel V sous-jacent à D, muni de l'action évidente (à gauche) de D. Choisissons de plus un élément α non nul dans E, et imaginaire ($\bar{\alpha} = -\alpha$), et définissons, pour v et w dans V:

$$\psi(v, w) \underset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}_{E/\mathbf{Q}}\big(\alpha\ \mathrm{tr}_{D/E}(v\delta w^*)\big)$$

(où $\mathrm{tr}_{D/E}$ désigne la trace réduite).

On voit aussitôt que ψ *est une forme alternée non dégénérée sur* V, vérifiant la relation suivante, pour tout $l \in D$:

$$\psi(lv, w) = \psi(v, l^*w).$$

2.2.3. Considérons alors *le groupe des similitudes symplectiques D-linéaires de* (V, ψ). Les points à valeurs dans $\mathbf{Q}$ de ce groupe s'identifient aux éléments $l \in D^*$ tels qu'il existe $\mu \in \mathbf{Q}^*$ pour lequel l'identité suivante soit satisfaite:

$$\psi(vl, wl) = \mu\psi(v, w)$$

soit: $\mathrm{tr}_{E/\mathbf{Q}}(\alpha\ \mathrm{tr}_{D/E}(vl\delta l^* w^*)) = \mu\ \mathrm{tr}_{E/Q}(\alpha\ \mathrm{tr}_{D/E}(v\delta w^*))$; cette identité équivaut à l'égalité suivante:

$$l\delta l^* = \mu\delta$$

soit encore: $l\delta\delta^{-1}\bar{l}\delta = \mu\delta$

$$i.e.\quad l\bar{l} = \mu.$$

On vérifie très facilement que cette dernière égalité équivaut au fait que l appartienne au sous-groupe de $B^* \underset{F^*}{\times} E^*$ $(\subset D^*)$ formé des éléments $l = be$ tels que $\nu(b)e\bar{e} = \mu$ soit rationnel.

On traite de même le cas d'un point à valeurs dans une $\mathbf{Q}$-algèbre, et on trouve donc que:

Le groupe G' s'identifie au groupe des similitudes symplectiques D-linéaires de (V, ψ) (nous considèrerons l'action à gauche inverse de l'action à droite définie par les formules précédentes).

2.2.4. Le composé du morphisme h' défini en (2.1.3) et de l'action de $G'_{\mathbf{R}}$ sur $V_{\mathbf{R}}$ définit une action de $\boldsymbol{S}$ sur $V_{\mathbf{R}}$, et donc une *structure de Hodge* dont on voit aussitôt qu'elle est de type $\{(-1, 0), (0, -1)\}$. *Nous choisirons dans la suite l'élément $\delta \in D^*$ de sorte que la forme ψ soit une polarisation de la structure de Hodge précédente*, i.e. de sorte que la forme (symétrique) sur $V_{\mathbf{R}}$:

$$(x, y) \to \psi\big(x, yh'(i)^{-1}\big)$$

soit *définie positive*. L'involution $l \to l^*$ de D est alors *positive*.

Montrons qu'un tel choix est effectivement possible. Pour $1 \leqslant i \leqslant d$, soit $D_i = D \underset{F,\tau_i}{\otimes} \mathbf{R} = D \underset{E,\tau_i}{\otimes} \mathbf{C}$ et soit V_i le $\mathbf{R}$-espace sous-jacent à D_i. L'espace $V_{\mathbf{R}}$ est la somme directe des V_i. Utilisant la densité de D dans $\oplus D_i$ et le fait que la condition d'être défini positif est ouverte, il nous suffit de montrer l'existence pour chaque i d'un élément $\delta_i \in D_i$, symétrique et inversible, tel que la forme symétrique sur V_i

$$(x, y) \overset{\psi_i}{\to} \mathrm{Re}\big(\tau_i(\alpha)\ \mathrm{tr}_{D_i/\mathbf{C}}\big(\overline{xh'(i)}^{-1}\bar{y}\delta_i\big)$$

soit définie positive. On distingue deux cas:

(a) $i = 1$. Alors D_1 est isomorphe à $M_2(\mathbf{C})$ par un isomorphisme qui transforme l'involution $l \to \bar{l}$ en l'involution

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

est $h'(i)$ est conjugué à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La forme précédente est alors définie positive pour:

$$\delta_1 = (\mathrm{Im}\ \tau_1(\alpha))\begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}$$

(b) $i \geqslant 2$. Dans ce cas, D_i est isomorphe à $M_2(\mathbf{C})$ par un isomorphisme qui transforme l'involution $l \to \bar{l}$ en l'involution

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

et $h'(i)$ est égal à $\begin{pmatrix} -i & \\ & -i \end{pmatrix}$.

La forme ψ_i est alors définie positive pour:

$$\delta_i = (\mathrm{Im}(\tau_i(\alpha)))\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. Le problème de modules: première version

2.3.1. Posons, pour $l \in D$:

$$t(l) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{tr}(l;\ V_{\mathbf{C}}/F^0(V_{\mathbf{C}}))$$

où F^0 est relatif à la structure de Hodge définie précédemment. Soit E' le sous-corps de $\mathbf{C}$ engendré par les $t(l)$.

Il résulte alors de ([D.0], §6) que *le corps E' est le corps de définition du modèle canonique de Shimura $M_{K'}(G', X')$ et que ce dernier représente (lorsque K' est assez petit) le foncteur $\mathfrak{M}^1_{K'}$: $\{E'$-algèbres$\} \to \{$Ensembles$\}$ défini comme suit*:

Pour R une E'-algebre, $\mathfrak{M}^1_{K'}(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets $(A, \iota, \bar{\theta}, \bar{k})$ où

(a) *A est un R-schéma abélien à isogénie près muni d'une action $\iota: D \to$* End *A de l'anneau D, telle que pour tout $l \in D$ on ait l'égalité*:

$$(*)\quad \mathrm{tr}(\iota(l);\ \mathrm{Lie}\ A) = t(l).$$

(b) *$\bar{\theta}$ est une polarisation homogène de A telle que l'involution de Rosati associée envoie $\iota(l)$ sur $\iota(l^*)$*

(c) *$\bar{k}$ est une classe modulo K' de similitudes symplectiques D-linéaires $k: \hat{V}(A) \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathbf{A}^f$.*

(Nous avons utilisé les notations standard relatives aux variétés abéliennes: pour A une variété abélienne, $\hat{T}(A) \underset{\mathrm{def}}{=} \prod T_l(A)$ est le produit des modules de Tate, et $\hat{V}(A) \underset{\mathrm{def}}{=} \hat{\mathrm{T}}(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{Q}$. Ce dernier espace est défini pour A une variété abélienne à isogénie près).

Le fait qu'aucune condition supplémentaire ne figure dans le problème de modules $\mathfrak{M}^1_{K'}$ résulte de ce que le groupe G' vérifie le principe de Hasse: cf. ([D.0], Cor. 5.13).

2.3.2. Calcul de t(l)

L'espace $V_{\mathbf{C}}/F^0V_{\mathbf{C}} = V_{\mathbf{C}}/V_{\mathbf{C}}^{0,-1}$ est isomorphe à $V_{\mathbf{C}}^{-1,0}$ (la partie de $V_{\mathbf{C}}$ où $h'(z)$ agit par multiplication par z). Utilisant les notations de (2.2.4) nous avons une décomposition

$$V_{\mathbf{C}}^{-1,0} = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant d} (V_i \otimes \mathbf{C})^{-1,0}$$

et la trace que nous voulons calculer se décompose donc en la somme de d termes calculés ci-dessous:

(a) Pour $i = 1$, l'espace V_1 est isomorphe à $M_2(\mathbf{C})$, de sorte que $V_1 \otimes \mathbf{C}$ s'identifie à la somme de deux copies de $M_2(\mathbf{C})$:

$$M_2(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbf{C}) \oplus M_2(\mathbf{C})$$

$$m \otimes \lambda \to (m\lambda, \bar{m}\lambda).$$

Sur chacune de ces deux copies, $h'(i)$ agit par multiplication à droite par $J = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; un élément $l_1 \in D_1 = M_2(\mathbf{C})$ agit par multiplication à gauche par l_1 sur la première copie et par $\bar{l}_1$ sur la seconde.

L'espace $(V_1 \otimes \mathbf{C})^{-1,0}$ s'identifie à l'ensemble des couples (m_1, m_2) d'éléments de $M_2(\mathbf{C})$ qui vérifient:

$$m_\alpha J = +im_\alpha.$$

Cette relation équivaut au fait que m_α appartienne au sous-espace de $M_2(\mathbf{C})$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} ib & b \\ id & d \end{pmatrix}$; la trace de l'endomor - phisme induit par $l_1 \in D_1$ sur $(V_1 \otimes \mathbf{C})^{-1,0}$ est donc égale à: $\operatorname{tr} l_1 + \overline{\operatorname{tr} l_1}$.

(b) Pour $i \geqslant 2$, $V_i \otimes \mathbf{C}$ admet la même décomposition en la somme de deux copies de $M_2(\mathbf{C})$, mais $h'\mathrm{h}(i)$ agit maintenant par multiplication par $(+i)$ sur la première copie et par $(-i)$ sur la seconde; donc $(V_i \otimes \mathbf{C})^{-1,0}$ s'identifie à cette première copie, et la trace de $l_i \in D_i$ sur $(V_i \otimes \mathbf{C})^{-1,0}$ est égale à: $2 \operatorname{tr} l_i$.

De ce qui précède, on déduit la valeur de $t(l)$ pour $l \in D$:

PROPOSITION: $t(l) = (\tau_1 + \bar{\tau}_1 + 2\tau_2 + \cdots + 2\tau_d)(\operatorname{tr}_{D/E}(l))$.

2.3.3. Nous allons maintenant utiliser la définition (2.1.1) du corps E et des plongements τ_i pour calculer le morphisme additif $\sigma = \tau_1 + \bar{\tau}_1 + 2\tau_2 + \cdots + 2\tau_d$ de E dans $\mathbf{C}$. Pour x et y dans F, nous avons l'égalité:

$$\sigma(x + y\sqrt{\lambda}) = (\tau_1(x) + \rho\tau_1(y)) + (\tau_1(x) - \rho\tau_1(y))$$
$$+ 2(\tau_2(x) + \rho\tau_2(y)) + \cdots + 2(\tau_d(x) + \rho\tau_d(y))$$

soit:

$$\sigma(x+y\sqrt{\lambda}) = 2(\tau_1(x)+\tau_2(x)+\cdots+\tau_d(x))$$
$$+2\rho(\tau_2(y)+\tau_3(y)+\cdots+\tau_d(y))$$

soit encore (rappelons que E est considéré via τ_1 comme un sous-corps de $\mathbf{C}$):

$$\sigma(x+y\sqrt{\lambda}) = 2\ \mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(x) + 2(\mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(y)-y)\sqrt{\lambda}.$$

L'image de σ (et donc celle de t) est contenue dans E. (on vérifie en fait très facilement que cette image engendre E). Il en résulte que le *modèle canonique de Shimura $M_{K'}(G', X')$ est défini sur E.*

2.3.4. *Quelques remarques sur la condition $(*)$ du problème de modules $\mathfrak{M}^1_{K'}$.*
(a) Tout d'abord, il est clair que la condition $(*)$ est vérifiée *si et seulement si elle l'est en chaque point géométrique de* Spec R.
(b) La condition $(*)$ est vérifiée *si et seulement si elle est vérifiée pour tout élément $l \in E$* (le centre de D). Cela résulte du fait que toute représentation de D admet un caractère de la forme:

$$l \to \left(\sum n_\iota \tau_\iota + n'_\iota \bar{\tau}_\iota\right)(\mathrm{tr}_{D/E}(l))$$

et de l'indépendance linéaire des plongements $\{\tau_\iota, \bar{\tau}_\iota\}_{1 \leqslant \iota \leqslant d}$.
(c) La fonction $l \to t(l)$ est le caractère d'une représentation de degré $4d$ de D. Par suite, si la condition $(*)$ est vérifiée, alors le schéma abélien A est de *dimension relative* $4d$.

2.4. Le problème de modules sur $F_{\mathfrak{p}}$

Nous utilisons maintenant le plongement $E \hookrightarrow F_{\mathfrak{p}}$ défini en (2.1.1) et nous considérons (pour K' assez petit) le $F_{\mathfrak{p}}$-schéma $M_{K'}(G', X') \underset{E}{\otimes} \mathrm{F}_{\mathfrak{p}}$, lequel représente la restriction aux $F_{\mathfrak{p}}$-algèbres du foncteur $\mathfrak{M}^1_{K'}$. Pour R une $F_{\mathfrak{p}}$-algèbre, nous allons exprimer sous une autre forme – qui s'avèrera plus maniable – la condition $(*)$ du problème de modules.

2.4.1. Nous avons défini en (2.1.1) un isomorphisme:

$$E \otimes \mathbf{Q}_p \simeq F_p \oplus F_p = (F_{\mathfrak{p}_1} \oplus \cdots \oplus F_{\mathfrak{p}_r}) \oplus (F_{\mathfrak{p}_1} \oplus \cdots \oplus F_{\mathfrak{p}_r}).$$

L'homomorphisme additif σ s'étend en un morphisme $\mathbf{Q}_p$-linéaire σ_p : $E \otimes \mathbf{Q}_p \to E \otimes \mathbf{Q}_p$, lequel se calcule à l'aide du diagramme suivant:

$$x + y\sqrt{\lambda} \in E \xrightarrow{\sigma} 2\,\mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(x) + 2\big(\mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(y) - y\big)\sqrt{\lambda} \in E$$

$$(x + y\mu,\ x - y\mu) \in F_p \oplus F_p \xrightarrow{\sigma_p} \big(2\,\mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(x) + 2\big(\mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(y) - y\big)\mu,$$

$$2\,\mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(x) - \big(2\,\mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(y) - y\big)\mu\big) \in F_p \oplus F_p$$

Et on voit donc que σ_p *envoie le couple* $(u, v) \in F_p \oplus F_p$ *sur le couple* $(2\,\mathrm{tr}_{F_{\mathfrak{p}}/\mathbf{Q}_p}(u) - u + v,\ 2\,\mathrm{tr}_{F_p/\mathbf{Q}_p}(v) - v + u)$.

Le composé de σ_p et de la projection sur $F_{\mathfrak{p}}$ (premier facteur) envoie donc le $2r$-uple $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r)$ sur l'élément:

$$2\,\mathrm{tr}_{F_{\mathfrak{p}_1}/\mathbf{Q}_p}(u_1) + \cdots + 2\,\mathrm{tr}_{F_{\mathfrak{p}_r}/\mathbf{Q}_p}(u_r) - u_1 + v_1 \in F_{\mathfrak{p}}.$$

2.4.2. La décomposition précédente de $E \otimes \mathbf{Q}_p$ induit une décomposition de l'algèbre $D_p = D \otimes \mathbf{Q}_p = B \underset{F}{\otimes} (\mathrm{E} \otimes \mathbf{Q}_p)$. Nous notons cette décomposition:

$$D_p = D_1^1 \oplus D_2^1 \oplus \cdots \oplus D_r^1 \oplus D_1^2 \oplus D_2^2 \oplus \cdots \oplus D_r^2$$

où D_ι^k est une $F_{\mathfrak{p}_\iota}$-algèbre isomorphe à $B_{\mathfrak{p}_\iota} = B \underset{F}{\otimes} \mathrm{F}_{\mathfrak{p}_\iota}$. En particulier, D_1^1 et D_1^2 sont identifiées à $M_2(F_{\mathfrak{p}})$. Noter que l'involution $l \to l^*$ de D_p échange les facteurs D_ι^1 et D_ι^2.

Soit maintenant Λ un D_p-module. Alors la décomposition précédente de D_p induit une décomposition de Λ

$$\Lambda = \Lambda_1^1 \oplus \Lambda_2^1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_r^1 \oplus \Lambda_1^2 \oplus \Lambda_2^2 \oplus \cdots \oplus \Lambda_r^2$$

où D_p opère sur Λ_ι^k via son facteur D_ι^k.

Nous aurons besoin aussi de décomposer Λ_1^2 en la somme directe de $F_{\mathfrak{p}}$-vectoriels:

$$\Lambda_1^2 = \Lambda_1^{2,1} \oplus \Lambda_1^{2,2}$$

où $\Lambda_1^{2,1}$ (resp. $\Lambda_1^{2,2}$) est le noyau de l'idempotent $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\left(\textit{resp}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de D_1^2. Ces deux vectoriels sont échangés par l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de D_1^2.

2.4.3. Soit alors R une $F_{\mathfrak{p}}$-algèbre, et A un R-schéma abélien à isogénie près muni d'une action de l'anneau D. L'algèbre de Lie relative $\mathrm{Lie}_R(A)$

est alors un $R \otimes D$ module, en particulier un D_p-module, et comme tel se décompose comme précédemment en la somme directe:

$$\mathrm{Lie}(A) = \mathrm{Lie}_1^1(A) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Lie}_r^1(A) \oplus \mathrm{Lie}_1^2(A) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Lie}_r^2(A)$$

où $\mathrm{Lie}_i^k(A)$ est un R-module projectif muni d'une action de l'anneau D_i^k. La partie Lie_1^2 admet la décomposition:

$$\mathrm{Lie}_1^2(A) = \mathrm{Lie}_1^{2,1}(A) \oplus \mathrm{Lie}_1^{2,2}(A)$$

en deux R-modules projectifs munis d'une action du corps $F_{\mathfrak{p}}$.

Il résulte alors de (2.4.1) que la condition $(*)$ est équivalente à la conjonction des conditions suivantes:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \mathrm{tr}\left(l \in D_1^1;\ \mathrm{Lie}_1^1\right) = 2\ \mathrm{tr}_{F_{\mathfrak{p}}/\mathbf{Q}_p}\ \mathrm{tr}_{D_1^1/F_{\mathfrak{p}}}(l) - \mathrm{tr}_{D_1^1/F_{\mathfrak{p}}}(l) \\ \text{(ii)} & \text{pour } i \geqslant 2\text{: } \mathrm{tr}\left(l \in D_i^1;\ \mathrm{Lie}_i^1\right) = 2\ \mathrm{tr}_{F_{\mathfrak{p}_i}/\mathbf{Q}_p}\ \mathrm{tr}_{D_i^1/F_{\mathfrak{p}_i}}(l) \\ \text{(iii)} & \mathrm{tr}\left(l \in D_1^2;\ \mathrm{Lie}_1^2\right) = \mathrm{tr}_{D_1^2/F_{\mathfrak{p}}}(l) \\ \text{(iv)} & \text{pour } i \geqslant 2\text{: } \mathrm{tr}\left(l \in D_i^2,\ \mathrm{Lie}_i^2\right) = 0;\ \left(\text{i.e. } \mathrm{Lie}_i^2 = 0\right). \end{cases}$$

2.4.4. Nous allons montrer qu'en fait la moitié des conditions précédentes, jointes au fait que $\dim(A) = 4d$, suffisent à entraîner la condition $(*)$. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME: *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de caractéristique nulle, et soit F un sous-corps totalement réel de* $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbf{Q}$. *Alors le degré de F divise la dimension de A et l'on a l'égalité pour tout élément f de F:* $\mathrm{tr}(f;\ \mathrm{Lie}\ A) = \dfrac{\dim A}{\deg F}\mathrm{tr}_{F/\mathbf{Q}}(f)$.

PREUVE DU LEMME (d'après Giraud [Gi] lemme 1.7): Nous pouvons supposer que le corps de base est le corps $\mathbf{C}$. La représentation de F sur Lie A se décompose en une somme directe:

$$\mathrm{Lie}\ A = \bigoplus_{\sigma} F_{\sigma}^{r(\sigma)}$$

où σ décrit l'ensemble des plongements de F dans $\mathbf{C}$, où F_σ désigne la représentation de degré 1 qui correspond à σ et où les $r(\sigma)$ sont des entiers.

Considérons alors l'homologie rationnelle $H_1(A, \mathbf{Q})$ de A: c'est un F-vectoriel de dimension $\alpha = \dfrac{2\dim A}{\deg F}$, et nous avons un isomorphisme:

$$H_1(A, \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C} \simeq \mathrm{Lie}\ A \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C} = \mathrm{Lie}\ A \oplus \overline{\mathrm{Lie}\ A}.$$

Parce que F est totalement réel, la représentation conjuguée $\overline{\text{Lie } A}$ de F est équivalente à Lie A, et l'on obtient donc un isomorphisme:

$$\left(\bigoplus_\sigma F_\sigma\right)^\alpha \simeq \left(\bigoplus_\sigma F_\sigma^{r(\sigma)}\right)^2$$

Il en résulte que tous les $r(\sigma)$ sont égaux à $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\dim A}{\deg F}$, d'où le lemme. □

2.4.5. Soit A comme en (2.4.3), supposons que soient satisfaites les trois conditions suivantes:

$$\begin{cases} \text{(a)} & \dim_R A = 4d \\ \text{(b)} & \operatorname{tr}\left(l \in D_1^2,\ \operatorname{Lie}_1^2\right) = \operatorname{tr}_{D_1^2/F_{\mathfrak{p}}}(l) \\ \text{(c)} & \text{pour } i \geqslant 2\colon \operatorname{Lie}_i^2 = 0 \end{cases}$$

et montrons qu'*alors la condition* $(*)$ *est satisfaite*. En vertu de ce qui précède et de la remarque (2.3.4.b), il nous suffit de vérifier, pour tout élément l de $E \otimes \mathbf{Q}_p$, l'égalité:

$$(E) \quad \operatorname{tr}(l;\ \operatorname{Lie} A) = pr \circ \sigma_p(2l)$$

où pr désigne la projection de $E \otimes \mathbf{Q}_p$ sur le premier facteur $F_{\mathfrak{p}}$.

Les conditions (b) et (c) ci-dessus signifient que cette égalité est satisfaite pour tout élément de $E \otimes \mathbf{Q}_p = F_p \oplus F_p$ de la forme $l = (0, f)$. De la condition (a) et du lemme précédent, il résulte que (E) est satisfaite pour tout élément de $F \otimes \mathbf{Q}_p$, i.e. pour tout élément de $E \otimes \mathbf{Q}_p$ de la forme (f, f). On conclut par linéarité que (E) est satisfaite pour tout élément de $E \otimes \mathbf{Q}_p$. □

Notons enfin que la condition (b) ci-dessus signifie que la représentation Lie_1^2 est isomorphe à la représentation naturelle de $D_1^2 = M_2(F_{\mathfrak{p}})$ sur $F_{\mathfrak{p}}^2$. Elle équivaut a:

$$(\text{b}') \quad \operatorname{tr}\left(f \in F_{\mathfrak{p}};\ \operatorname{Lie}_1^{2,1}\right) = f.$$

En définitive, nous avons prouvé la proposition suivante:

PROPOSITION: *Soit* R *une* $F_{\mathfrak{p}}$*-algèbre, et soit* A *un* R*-schéma abélien à isogénie près muni d'une action de l'anneau* D. *La condition* $(*)$ *qui figure dans le problème de modules* $\mathfrak{M}^1_{K'}$ *de* (2.3.1) *est alors équivalente à la conjonction des trois conditions suivantes*:

(a) *La dimension relative de* A *est égale à* $4d$.

(b) *Le R-module projectif* $\mathrm{Lie}_1^{2,1}(A)$ *est de rang* 1, *et* $F_{\mathfrak{p}}$ *y opère via le morphisme structural* $F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow R$.
(c) *Pour* $i \geqslant 2$, $\mathrm{Lie}_i^2(A)$ *est nul.*

2.5. La structure de niveau en p

Nous allons maintenant interpréter en termes de la décomposition du D_p-module $V_p = V \otimes \mathbf{Q}_p$:

$$V_p = V_1^1 \oplus \cdots \oplus V_r^1 \oplus V_1^2 \oplus \cdots \oplus V_r^2$$

la composante en p de la donnée (c) (structure de niveau) du problème de modules $\mathfrak{M}_{K'}^1$.

L'espace V_p est muni de la forme alternée $\psi_p = \psi \otimes \mathbf{Q}_p$. Pour cette forme, les composantes V_i^k et V_j^l de V_p sont *orthogonales* sauf si $i = j$ et $k \neq l$. Plus généralement, on dispose du lemme évident suivant:

LEMME: *Soit* Λ *un* D_p*-module muni d'une forme* $\mathbf{Q}_p$*-bilinéaire alternée* Φ *vérifiant la condition suivante*:

Pour tous $l \in D_p$, $v, w \in \Lambda : \Phi(lv, w) = \Phi(v, l^*w)$. *Alors* Λ_i^k *et* Λ_j^l *sont orthogonaux, sauf si*: $i = j$ *et* $k \neq l$.

Le groupe $G'(\mathbf{Q}_p)$ s'identifie au groupe des similitudes symplectiques D_p-linéaires de (V_p, ψ_p). Une telle similitude est entièrement déterminée par:

$$\begin{cases} - \text{ son rapport de similitude } \mu \in \mathbf{Q}_p^*, \\ - \text{ sa restriction aux } V_i^2. \end{cases}$$

Le groupe $G'(\mathbf{Q}_p)$ s'identifie donc au produit du groupe $\mathbf{Q}_p^*$ et des groupes $\mathrm{Aut}_{D_i^2}(V_i^2) = (D_i^2)^* \simeq (B \underset{F}{\otimes} F_{\mathfrak{p}_i})^*$.

Considérons maintenant une variété abélienne à isogénie près A munie d'une action ι de D et d'une polarisation θ telle que l'involution de Rosati correspondante échange $\iota(l)$ et $\iota(l^*)$. Alors le D_p-module $V_p(A)$ vérifie la condition du lemme pour Φ l'accouplement associé à θ:

$$\Phi : V_p(A) \times V_p(A) \to \mathbf{Q}_p(1).$$

Il en résulte donc que les composantes $V_i^k(A)$ et $V_j^l(A)$ sont orthogonales pour Φ, sauf si $i = j$ et $k \neq l$. La donnée d'une similitude symplectique D-linéaire

$$k : \hat{V}(A) \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathbf{A}^f$$

équivaut donc à la donnée:

$$\begin{cases} 1) & \text{d'une similitude symplectique } D\text{-linéaire} \\ & k^p : \hat{V}^p(A) = \prod_{l \neq p} V_l(A) \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathbf{A}^{f,p} \\ 2) & \text{d'un rapport de similitude } \mu_p \in \mathbf{Q}_p^*(-1). \\ 3) & \text{d'isomorphismes } D_\iota^2\text{-linéaires, pour } 1 \leqslant i \leqslant r: \\ & k_\iota^2 : V_\iota^2(A) \xrightarrow{\sim} V_\iota^2. \end{cases}$$

Et la donnée de k_1^2 équivaut encore à la donnée d'un isomorphisme $F_{\mathfrak{p}}$-linéaire:

$$k_1^{2,1} : V_1^{2,1}(A) \xrightarrow{\sim} V_1^{2,1}.$$

2.6. Le problème de modules: deuxième version

Il est souvent nécessaire de décrire $M_{K'}(G', X')$ à l'aide d'un problème de modules défini en termes de variétés abéliennes, et non plus en termes de variétés abéliennes à isogénie près. Il est standard (cf. [D.1], 4.12) de passer de l'une à l'autre de ces descriptions. On procède comme suit:

2.6.1. Choisissons un ordre $\mathcal{O}_D$ de D, et notons $V_{\mathbf{Z}}$ le réseau de V qu'il définit. L'anneau $\mathcal{O}_D \otimes \mathbf{Z}_p$ admet une décomposition:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \mathcal{O}_{D_p} = \mathcal{O}_D \otimes \mathbf{Z}_p & = & \mathcal{O}_{D_1^1} & \oplus & \cdots & \oplus & \mathcal{O}_{D_r^1} & \oplus & \mathcal{O}_{D_1^2} & \oplus & \cdots & \oplus & \mathcal{O}_{D_r^2} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ D_p & = & D_1^1 & \oplus & \cdots & \oplus & D_r^1 & \oplus & D_1^2 & \oplus & \cdots & \oplus & D_r^2 \end{array}$$

Nous pouvons évidemment supposer, et nous supposerons, que (pour un choix convenable de $\mathcal{O}_D$, δ et α) les conditions suivantes sont satisfaites:

(1) $\mathcal{O}_D$ est stable par l'involution $l \to l^*$
(2) les $\mathcal{O}_{D_\iota^k}$ sont des ordres maximaux dans les D_ι^k, et $\mathcal{O}_{D_1^2} \subset D_1^2 = M_2(F_{\mathfrak{p}})$ s'identifie à $M_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$,
(3) ψ est à valeurs entières sur $V_{\mathbf{Z}}$
(4) ψ induit une dualité parfaite ψ_p sur $V_{\mathbf{Z}_p} = V_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Z}_p$.

Nous noterons $V'_{\mathbf{Z}}$ le réseau *dual* de $V_{\mathbf{Z}}$ pour ψ (ensemble des $v \in V$ tels que $\psi(v, V_{\mathbf{Z}}) \subset \mathbf{Z}$). La condition (4) ci-dessus signifie que $V'_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Z}_p$ est égal à $V_{\mathbf{Z}_p}$, c'est-à-dire que le quotient $V'_{\mathbf{Z}}/V_{\mathbf{Z}}$ est sans p-torsion.

Tout $\mathcal{O}_{D_p}$-module Λ admet une décomposition en la somme directe de $\mathcal{O}_{D_\iota^k}$-modules:

$$\Lambda = \Lambda_1^1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_r^1 \oplus \Lambda_1^2 \oplus \cdots \oplus \Lambda_r^2 = \Lambda^1 \oplus \Lambda^2.$$

Et le $\mathcal{O}_{D_1^2}$-module Λ_1^2 se décompose en la somme directe de deux $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules $\Lambda_1^{2,1}$ et $\Lambda_1^{2,2}$ noyaux des idempotents $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$.

2.6.2. Soit K' un sous-groupe compact-ouvert de $G'(\mathbf{A}^f)$ assez petit pour laisser globalement invariant le réseau adélique: $V_{\hat{\mathbf{Z}}} = V_{\mathbf{Z}} \otimes \hat{\mathbf{Z}} \subset V \otimes \mathbf{A}^f$.

Considérons alors un point $(A, \iota, \bar{\theta}, \bar{k})$ du problème de modules $\mathfrak{M}^1_{K'}$. Pour $k \in \bar{k}$, le réseau adélique

$$k^{-1}(V_{\hat{\mathbf{Z}}}) \subset \hat{V}(A)$$

ne dépend pas du choix de k. Il existe un unique schéma abélien A_0 dans la classe d'isogénie de A, tel que $\hat{T}(A_0)$ soit égal à $k^{-1}(V_{\hat{\mathbf{Z}}})$. Parce que $V_{\hat{\mathbf{Z}}}$ est stable sous l'action de $\mathcal{O}_D$, ce dernier anneau opère sur A_0. De plus, il est possible, et ce de façon unique, de choisir une polarisation effective $\theta \in \bar{\theta}$ de A_0, telle que $k^{-1}(V_{\hat{\mathbf{Z}}}^{\prime})$ soit le réseau adélique dual de $k^{-1}(V_{\hat{\mathbf{Z}}})$ pour la forme associée à θ.

Il résulte facilement de tout cela que *le foncteur $\mathfrak{M}^1_{K'}$ est isomorphe au foncteur $\mathfrak{M}^2_{K'}$ défini comme suit*:

Pour R une E-algèbre, $\mathfrak{M}^2_{K'}(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de quadruples $(A, \iota, \theta, \bar{k})$ où

(a) *A est un schéma abélien sur R, muni d'une action $\iota: \mathcal{O}_D \to \operatorname{End} A$ de l'anneau $\mathcal{O}_D$, telle que la condition $(*)$ de* (2.3.1) *soit vérifiée.*

(b) *θ est une polarisation de A, telle que l'involution de Rosati associée envoie $\iota(l)$ sur $\iota(l^*)$.*

(c) *$\bar{k}$ est une classe modulo K' d'isomorphismes symplectiques $\mathcal{O}_D$-linéaires: $k: \hat{T}(A) \xrightarrow{\sim} V_{\hat{\mathbf{Z}}}$.*

On notera que le degré de la polarisation θ est alors nécessairement premier à p.

2.6.3. Exemple: Il résulte de (2.5) que le groupe $G'(\mathbf{A}^f)$ apparaît comme un produit:

$$G'(\mathbf{A}^f) = \mathbf{Q}_p^* \times GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times \Gamma'$$

où Γ' désigne le produit:

$$\Gamma' = G'(\mathbf{A}^{f,p}) \times \Big(B \underset{F}{\otimes} F_{\mathfrak{p}_2}\Big)^* \times \cdots \times \Big(B \underset{F}{\otimes} F_{\mathfrak{p}_r}\Big)^*.$$

Nous nous limiterons le plus souvent dans ce qui suit à ne considérer que des sous-groupes compacts-ouverts de $G'(\mathbf{A}^f)$ de la forme:

$$K' = \mathbf{Z}_p^* \times K_{\mathfrak{p}}^n \times H'$$

avec H' un sous-groupe compact ouvert assez petit de Γ'. Nous noterons $M'_{n,H'}$ la variété de Shimura $M_{K'}(G', X')$ correspondante, et M'_n la limite projective des $M'_{n,H'}$.

Soit A une variété abélienne, munie d'une action de $\mathcal{O}_D$ et d'une polarisation, telles que les conditions (a) et (b) du problème de modules précédent soit satisfaites. Nous notons alors $A_{\mathfrak{p}^n}$ le sous-groupe de $\mathfrak{p}^n$-torsion de A, et $(A_{\mathfrak{p}^n})_1^{2,1}$ la partie définie par la décomposition (2.6.1).

Nous notons aussi $T_p^{\mathfrak{p}}(A)$ la somme directe $T(A)_2^2 \oplus \cdots \oplus T_r^2(A)$, et $\hat{T}^{\mathfrak{p}}(A)$ la somme directe $T_p^{\mathfrak{p}}(A) \oplus \hat{T}^p(A)$. Notons également $\hat{W}^p = V_{\mathbf{Z}} \otimes \hat{\mathbf{Z}}^p$ et $W_p^{\mathfrak{p}}$ la somme directe $(V_{\mathbf{Z}_p})_2^2 \oplus \cdots \oplus (V_{\mathbf{Z}_p})_r^2$.

On remarquera que le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module $(V_{\mathbf{Z}_p})_1^{2,1}$ est libre de rang 2. On remarquera aussi que $(T_p(A))^2 = \oplus(T_p(A))_i^2$ est de rang $4d$ sur $\mathbf{Z}_p$. On en déduit que s'il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_r}$-modules:

$$T_p^{\mathfrak{p}}(A) \simeq W_p^{\mathfrak{p}}$$

alors il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules:

$$\left(T_p(A)\right)_1^{2,1} \simeq \left(V_{\mathbf{Z}_p}\right)_1^{2,1} \left(\simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^2\right).$$

De ce qui précède on déduit alors que le schéma $M'_{n,H'}$ (pour H' assez petit) représente le foncteur suivant $\mathfrak{M}^2_{n,H'}$: pour R une algèbre, $\mathfrak{M}^2_{n,H'}(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets $(A, \iota, \theta, k_{\mathfrak{p}}, k^{\mathfrak{p}})$ où:

(a) *A est un R-schéma abélien muni d'une action ι de l'anneau $\mathcal{O}_D$, telle que la condition $(*)$ de (2.3.1) soit satisfaite.*

(b) *θ est une polarisation de A, d'ordre premier à p, telle que l'involution de Rosati associée envoie $\iota(l)$ sur $\iota(l^*)$.*

(c) *$k_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme de $(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$-modules*

$$k_{\mathfrak{p}} : \left(A_{\mathfrak{p}^n}\right)_1^{2,1} \simeq \left(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\right)^2$$

(d) *$\bar{k}^{\mathfrak{p}}$ est une classe modulo H' d'isomorphismes:*

$$k^{\mathfrak{p}} = k_p^{\mathfrak{p}} \oplus k^p : T_p^{\mathfrak{p}}(A) \oplus \hat{T}^p(A) \xrightarrow{\sim} W_p^{\mathfrak{p}} \oplus \hat{W}^p$$

avec $k_p^{\mathfrak{p}}$ linéaire et k^p symplectique.

Lorsque $n = 0$, la donnée c) disparaît du problème de modules.

§3. Suite de l'étude de $M'_{K'} = M_{K'}(G', X')$

3.1. Remarques topologiques

Il résulte des définitions (2.1.2) que le groupe G' s'insère dans une suite exacte:

$$1 \to G_1 \to G' \xrightarrow{\nu'} T' \to 1$$

avec T' le tore $G_m \times U_E$. Nous noterons Z' le centre de G'; il s'identifie à l'image réciproque de $G_m \subset T$ par le morphisme de T_E dans T défini par $z \to z\bar{z}$. Le groupe Z' apparaît donc comme une extension de G_m par U_E.

Il résulte alors très facilement du fait que $\mathbf{Q}^*$ est discret dans $(\mathbf{A}^f)^*$, que: *le groupe* $T'(\mathbf{Q})$ (*resp.* $Z'(\mathbf{Q})$) *est discret dans* $T'(\mathbf{A}^f)$ (*resp.* $Z'(\mathbf{A}^f)$). On déduit de cela les conséquences suivantes:

D'une part, si M' désigne la limite projective des $M'_{K'}$, alors l'ensemble des points complexes de M' est donné par:

$$M'(\mathbf{C}) = G'(\mathbf{Q}) \backslash G'(\mathbf{A}^f) \times X'.$$

D'autre part, l'ensemble des composantes connexes du quotient $T'(\mathbf{Q}) \backslash T'(\mathbf{A})$ est donné par la formule:

$$\begin{aligned}\pi_0(T'(\mathbf{Q}) \backslash T'(\mathbf{A})) &= T'(\mathbf{Q}) \backslash T'(\mathbf{A}) / T'(\mathbf{R})^+ \\ &= T'(\mathbf{Q})^+ \backslash T'(\mathbf{A}^f)\end{aligned}$$

où $T'(\mathbf{Q})^+$ est l'ensemble $Q^{*+} \times U_E(\mathbf{Q})$. Soit encore:

$$\pi_0(T'(\mathbf{Q}) \backslash T'(\mathbf{A})) = (\mathbf{Q}^{*+} \backslash \mathbf{A}^{f*}) \times (U_E(\mathbf{Q}) \backslash U_E(\mathbf{A}^f))$$

3.2. Composantes connexes, loi de reciprocité

3.2.1. Comme en (1.2), le morphisme ν' induit une bijection:

$$\begin{aligned}\pi_0(M'_{K'}(\mathbf{C})) &\xrightarrow{\sim} T'(\mathbf{Q})^+ \backslash T'(\mathbf{A}^f) / \nu'(K') \\ &\simeq \pi_o(T'(\mathbf{Q}) \backslash T'(\mathbf{A}) / \nu'(K')).\end{aligned}$$

D'où, passant à la limite projective, une bijection:

$$\begin{aligned}\pi_0(M'(\mathbf{C})) &\xrightarrow{\sim} T'(\mathbf{Q})^+ \backslash T'(\mathbf{A}^f) \\ &\simeq \pi_0(T'(\mathbf{Q}) \backslash T'(\mathbf{A})).\end{aligned}$$

Et, toujours de la même façon qu'en (1.2), $\pi_0(M'(\mathbf{C}))$ est muni d'une action du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$, action donnée par un morphisme de réciprocité:

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E) \to \mathrm{Gal}(E^{ab}/E) \to T'(\mathbf{Q})^+ \backslash T'(\mathbf{A}^f)$$

où la première flèche est la projection de Galois sur Galois rendu abélien, et où la seconde flèche provient, via l'isomorphisme entre

$\mathrm{Gal}(E^{ab}/E)$ et $T_E(\mathbf{Q})^{+\wedge} \backslash T_E(\mathbf{A}^f)$, d'un morphisme de groupes algébriques:

$$T_E \xrightarrow{\mathscr{R}} T' = G_m \times U_E.$$

3.2.2. Pour calculer $\mathscr{R}$, on commence par considérer le composé (cf. (1.2)):

$$G_{m,\mathbf{C}} \overset{r}{\hookrightarrow} S_{\mathbf{C}} \xrightarrow{h'} G'_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\nu'} T'_{\mathbf{C}} = G_{m,\mathbf{C}} \times (U_E)_{\mathbf{C}}.$$

Via les plongements $\tau_1, \ldots, \tau_d$, le groupe $U_E(\mathbf{C})$ s'identifie à $(\mathbf{C}^*)^d$, et le morphisme $\nu'h'r$ envoie alors $z \in \mathbf{C}^*$ sur l'élément $(z^{-1}; 1, z^{-1}, \ldots, z^{-1}) \in T'(\mathbf{C})$. Ce morphisme composé est défini sur E, et provient donc d'un morphisme:

$$G_{m,E} \to T'_E.$$

On obtient alors $\mathscr{R}$ comme le composé du morphisme déduit du précédent par restriction de E à $\mathbf{Q}$ et de la norme de $\mathrm{Res}_{E/\mathbf{Q}}(T'_E)$ dans T'. Un calcul facile montre alors que $\mathscr{R}$ est donné comme suit: l'application $\varphi : z \to \tau_2(z) \ldots \tau_d(z)$ envoie E^* dans E^* et provient d'un morphisme de groupes algébriques, noté encore φ, de T_E dans T_E. Le morphisme $\mathscr{R}$ est alors décrit par la formule suivante:

$$\mathscr{R}(z) = \left(N_{E/\mathbf{Q}}(z),\ \varphi(z)\bar{\varphi}(z)^{-1}\right)^{-1}.$$

3.2.3. Nous nous intéresserons en fait surtout dans la suite au $F_{\mathfrak{p}}$-schéma $M' \underset{E}{\otimes} F_{\mathfrak{p}}$, et donc à la restriction du morphisme de réciprocité au groupe de Weil local $W(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}}) \simeq F_{\mathfrak{p}}^*$. Le groupe $T_E(\mathbf{Q}_p) = (E \otimes \mathbf{Q}_p)^*$ s'identifie au produit de deux copies de $F_p^* = F_{\mathfrak{p}}^* \times F_{\mathfrak{p}_2}^* \times \cdots \times F_{\mathfrak{p}_r}^*$, et le morphisme $\varphi\bar{\varphi}^{-1}$ de T_E dans T_E envoie l'élément $(u, v) \in F_p^* \times F_p^*$ sur l'élément $(N(u)v/N(v)u,\ N(v)u/N(u)v)$, où N désigne la norme de F_p^* dans $\mathbf{Q}_p^*$.

Le groupe $T'(\mathbf{Q}_p)$ s'identifie à l'ensemble des triples $(\lambda, u, v) \in \mathbf{Q}_p^* \times F_p^* \times F_p^*$ tels que le produit uv soit égal à 1. *Nous identifions en fait* $T'(\mathbf{Q}_p)$ *à* $\mathbf{Q}_p^* \times F_p^*$ *par l'application*: $(\lambda, u, v) \to (\lambda, v)$. Cette identification est choisie ainsi pour être compatible à l'identification (2.5) du groupe $G'(\mathbf{Q}_p)$ avec le produit $\mathbf{Q}_p^* \times (B \underset{F}{\otimes} F_p)^*$: le morphisme ν' s'identifie alors au produit de l'identité par les normes réduites sur les $(B \underset{F}{\otimes} F_{\mathfrak{p}_i})^*$.

Avec cette convention, on voit tout de suite que l'action de $W(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}}) \simeq F_{\mathfrak{p}}^*$ *sur l'ensemble des composantes connexes géométriques de* M' *est donnée par le morphisme*:

$$F_{\mathfrak{p}}^* \to T'(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p^* \times F_{\mathfrak{p}}^* \times F_{\mathfrak{p}_2}^* \times \cdots \times F_{\mathfrak{p}_r}^*$$

défini par: $z \to (N_{F_{\mathfrak{p}}/\mathbf{Q}_p}(z);\ z, 1, \ldots, 1)^{-1}$.

3.2.4. Comme en (1.3), il sera parfois commode de définir, pour $U' \subset T'(\mathbf{A}^f)$ un sous-groupe compact ouvert, un E-schéma fini $\mathscr{M}'_{U'}$, par l'ensemble de ses points sur $\mathbf{C}$:

$$\mathscr{M}'_{U'}(\mathbf{C}) \underset{\text{def}}{=} T'(\mathbf{Q})^+ \backslash T'(\mathbf{A}^f)/U'$$

et par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ définie par la loi de réciprocité qui précède. On obtient alors, pour $K' \subset G'(\mathbf{A}^f)$, un E-morphisme à fibres géométriquement connexes:

$$M'_{K'} \xrightarrow{\nu'} \mathscr{M}'_{\nu'(K')}.$$

Pour V un sous-groupe compact ouvert du produit $T'(\mathbf{A}^{f,p}) \times F_{\mathfrak{p}_2}^* \times \cdots \times F_{\mathfrak{p}_r}^*$ (considéré comme facteur de $T'(\mathbf{A}^f)$ via l'identification définie en (3.2.3)), on notera aussi:

$$\mathscr{M}'_{n,V} \underset{\text{def}}{=} \mathscr{M}'_{\mathbf{Z}_p^* \times U_{\mathfrak{p}}^n \times V}.$$

On remarquera qu'il résulte de la loi de réciprocité que le schéma $\mathscr{M}'_{0,V}$ se trivialise sur une extension abélienne de E non ramifiée en $\mathfrak{p}$.

3.3. Construction de groupes p-divisibles

3.3.1. Considérons, pour H' assez petit, le schéma $M'_{0,H'}$. D'après (2.6.3), il est solution du problème de modules $\mathfrak{M}^2_{0,H'}$, et il est de ce fait muni d'une variété abélienne universelle A, sur laquelle opère l'anneau $\mathcal{O}_D$. Soit $E'_{n,H'}$ le schéma localement libre en $(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$-modules défini par:

$$E'_{n,H'} \underset{\text{def}}{=} \left(A_{\mathfrak{p}^n}\right)_1^{2,1}.$$

Localement pour la topologie étale sur $M'_{0,H'}$, $E'_{n,H'}$ est isomorphe au $(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$-module constant $(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)^2$.

3.3.2. Il résulte également de (2.6.3) que le schéma $M'_{n,H'}$ au-dessus de $M'_{0,H'}$ est le schéma qui classifie les isomorphismes

$$k_{\mathfrak{p}} : E'_{n,H'} \simeq \left(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\right)^2.$$

Cette description met en évidence l'action à droite du groupe $K_{\mathfrak{p}}^0/K_{\mathfrak{p}}^n = GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$ sur $M'_{n,H'}$: un élément k de ce groupe envoie $k_{\mathfrak{p}}$ sur $k^{-1}k_{\mathfrak{p}}$. Le schéma $M'_{n,H'}$ constitue donc un revêtement galoisien de $M'_{0,H'}$ de groupe $GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$, et on voit que le groupe $E'_{n,H'}$ s'obtient, de façon analogue au groupe $E_{n,H}$ en (1.4.2), comme le quotient:

$$E'_{n,H'} = \left[M'_{n,H'} \times \left(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\right)^2\right]/GL_2\left(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n\right).$$

3.3.3. Les groupes $E'_{n,H'}$ jouissent des propriétés analogues aux propriétés (1.4.3) ((i) et (ii)) des groupes $E_{n,H}$, et l'action de Γ' sur le système projectif des $M'_{0,H'}$ se relève aux $E'_{n,H'}$. La seule différence notable à signaler est le fait que cette fois *tous les E'_n vivent simultanément sur* $M'_{0,H'}$; leur limite inductive E'_∞ y constitue donc un groupe de Barsotti-Tate.

3.3.4. On peut procéder comme (1.5) pour définir un groupe L'_n sur $\mathcal{M}'_{0,V'}$ comme le quotient:

$$L'_n \underset{\text{def}}{=} \left[\mathcal{M}'_{n,V'} \times \left(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\right)\right]/\left(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n\right)^*$$

avec des propriétés évidentes analogues à (1.5). On obtient comme en (1.6) un morphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-bilinéaire alterné:

$$e'_n : E'_n \times E'_n \to \nu'^* L'_n.$$

3.4. Actions de groupes

3.4.1. Le système projectif des $M'_{K'}$ est muni d'une action à droite du groupe $G'(\mathbf{A}^f)$. Nous aurons besoin dans la suite d'étendre cette action à un groupe un peu plus gros. Pour cela, commençons par rappeler la définition de G': soit G'' le produit amalgamé $G \underset{Z}{\times} T_E$, il est muni d'un morphisme ν'_1 dans T (défini par: $\nu'_1(g, z) = \nu(g)z\bar{z}$). Le groupe G' est alors le sous-groupe de G'', image réciproque par ν'_1 du sous-groupe $G_m \subset T$. *Considérons alors le sous-groupe* $\tilde{G}$ de $G''(\mathbf{A}^f)$, image réciproque par ν'_1 du sous-groupe $F^{*+}(\mathbf{A}^f)^* \subset T(\mathbf{A}^f)$. Le groupe $\tilde{G}$ contient $G'(\mathbf{A}^f)$ et $G''(\mathbf{Q})^+$. En fait, $\tilde{G}$ *est le groupe engendré par* $G'(\mathbf{A}^f)$ et $G''(\mathbf{Q})^+$: cela résulte de ce que ν'_1 envoie surjectivement $G''(\mathbf{Q})^+$ sur F^{*+}.

Le groupe G'' opère par conjugaison sur G', d'où une action de $G''(\mathbf{R})^+$ sur X' qui prolonge l'action de $G'(\mathbf{R})$. Soit alors $\gamma \in \tilde{G}$, que nous décomposons sous la forme $\gamma = \gamma_0\gamma_1$, avec $\gamma_0 \in G''(\mathbf{Q})^+$ et $\gamma_1 \in G'(\mathbf{A}^f)$, et soit $[g, x]$ un point de $M'_{\mathbf{C}} = G'(\mathbf{Q})\backslash G'(\mathbf{A}^f) \times X'$. On pose alors:

$$[g, x] \cdot \gamma = \left[\gamma_0^{-1} g \gamma, \gamma_0^{-1} x\right]$$

On voit facilement que cela ne dépend pas de la décomposition choisie de γ, et *définit une action à droite (continue) de* $\tilde{G}$ *sur* $M'_{\mathbf{C}}$ *qui prolonge l'action de* $G'(\mathbf{A}^f)$.

REMARQUE: L'action ainsi définie provient, par restriction, de l'action du groupe $G''(\mathbf{A}^f)$ sur la variété de Shimura $M(G'', h \times h_E)$ et de l'inclusion naturelle de M' dans $M'' = M(G'', h \times h_E)$. Il eût été possible de travailler avec M'' plutôt que M', ce qui aurait simplifié certaines parties de ce travail, mais en aurait compliqué d'autres. Le choix effectué est une affaire de goût.

3.4.2. Sur $M'_{\mathbf{C}}$, le groupe E'_∞ est trivial, isomorphe au groupe p-divisible constant $(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$. Comme en (2.6.3), le groupe $G''(\mathbf{A}^f)$ apparaît comme un produit:

$$G''(\mathbf{A}^f) = F_p^* \times GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times (B \otimes F_{\mathfrak{p}_2})^* \times \cdots \times (B \otimes F_{\mathfrak{p}_r})^* \times$$
$$\times G''(\mathbf{A}^{f,p}).$$

Nous définissons alors de manière analogue à (1.5) une action de $G''(\mathbf{A}^f)$, via son facteur $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$, sur le groupe p-divisible à isogénie près $[(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2]^0$, telle que $g \in GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ opère par multiplication à gauche par g^{-1}. *On définit alors sur*

$$E'^0_\infty \mid M'_{\mathbf{C}} \simeq M'_{\mathbf{C}} \times \left[(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2 \right]^0$$

une action du groupe $\tilde{G}$ comme le produit de l'action sur $M'_{\mathbf{C}}$ et de l'action qu'on vient de définir sur $[(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2]^0$. De même qu'en (1.5), cette action est *continue*, i.e. provient d'une action sur le système projectif des $E'^0_\infty \mid M'_{K'}(\mathbf{C})$.

3.4.3. *Interprétation modulaire.* On vérifie sans peine qu'on peut voir l'action précédemment définie en terms du problème de modules $\mathfrak{M}^1$ de la façon suivante: soit $\gamma \in \tilde{G}$ et soit $f \in F^{*+}$ (bien défini modulo $\mathbf{Q}^{*+}$) tel que $\nu'_1(\gamma) \in f(\mathbf{A}^f)^*$. Alors par l'action de γ, le point $x = (A, \iota, \bar{\theta}, k)$ $\in \mathfrak{M}^1(\mathbf{C})$ est transformé en le point $x\gamma = (A, \iota, f^{-1}\bar{\theta}, \gamma^{-1} \circ k)$. L'action de γ sur E'^0_∞ est donnée alors par l'isomorphisme naturel:

$$E'^0_\infty \mid x \simeq \left[(A_{p^\infty})_1^{2,1} \right]^0 \simeq E'^0_\infty \mid x\gamma.$$

Cette description met en évidence la rationalité de l'action de $\tilde{G}$, i.e. le fait que l'action de $\tilde{G}$ sur le système projectif des $(E'^0_\infty \mid M'_{K'}(\mathbf{C}))$ *provient en fait d'une action sur le système projectif des E-schémas* $(\mathrm{E}'^0_\infty \mid M'_{K'})$.

3.4.4. Nous aurons aussi besoin de voir l'action précédente en termes du problème de modules $\mathfrak{M}^2$. Soit Z'' – isomorphe à T_E – le centre de G''. Le groupe $Z''(\mathbf{Q}) \simeq E^*$ est contenu dans $\tilde{G}$; un élément $z \in E^*$ opère trivialement sur M' et il opère sur E^0_∞ par multiplication par $\bar{z}^{-1}$ (via le plongement $E \subset F_\mathfrak{p}$ de 2.1.1 et l'action de $F_\mathfrak{p}$ sur E^0_∞). Soit γ un élément de $\tilde{G}$. Quitte à le multiplier par un élément de E^*, on peut supposer, et nous supposerons, que γ^{-1} envoie $V_{\hat{\mathbf{Z}}}$ dans $V_{\hat{\mathbf{Z}}}$. Choisissons aussi un entier m tel que $\gamma^{-1}(V_{\hat{\mathbf{Z}}})$ contienne $mV_{\hat{\mathbf{Z}}}$. Soit enfin $f \in F^{*+}$ (uniquement déterminé) tel que $\nu_1'(\gamma) \in f \cdot \hat{\mathbf{Z}}^*$ (f^{-1} est alors un entier de F).

Donnons-nous alors un point $x = (A, \iota, \theta, k)$ du problème de modules $\mathfrak{M}^2$. Le groupe de m-torsion A_m de A s'identifie à $m^{-1}\hat{T}(A)/\hat{T}(A)$, et k induit un isomorphisme:

$$k_m : A_m \xrightarrow{\sim} m^{-1} \cdot V_{\hat{\mathbf{Z}}}/V_{\hat{\mathbf{Z}}}.$$

Soit Λ le sous-groupe de A_m image réciproque par k_m du sous-groupe $\gamma(V_{\hat{\mathbf{Z}}})/V_{\hat{\mathbf{Z}}}$ de $m^{-1}V_{\hat{\mathbf{Z}}}/V_{\hat{\mathbf{Z}}}$. Nous considérons alors le schéma abélien quotient $A' = A/\Lambda$. Il est muni d'une action quotient ι' de l'anneau $\mathcal{O}_D$. La polarisation θ définit une isogénie $\theta : A \to \hat{A}$. Le schéma abélien dual $\hat{A}'$ de A' s'identifie à un quotient $\hat{A}/\hat{\Lambda}$ où le dual $\hat{\Lambda}$ de Λ contient $f^{-1}\theta(\Lambda)$. Le produit $\theta' = f^{-1}\theta$ définit alors une polarisation de A'.

Enfin, il existe un unique isomorphisme $\hat{T}A' \overset{k'}{\xrightarrow{\sim}} V_{\hat{\mathbf{Z}}}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \hat{T}A & \leftarrow & \hat{T}A' \\ k \downarrow & & k' \downarrow \\ V_{\hat{\mathbf{Z}}} & \overset{\gamma^{-1}}{\hookrightarrow} & V_{\hat{\mathbf{Z}}} \end{array}$$

On vérifie alors sans peine que l'action de γ envoie le point x sur le point $x' = (A', \iota', \theta', k')$ et que l'action de γ sur E'^0_∞ est donnée par l'isogénie naturelle:

$$E'_\infty \mid x = \left(A_{p^\infty}\right)_1^{2,1} \to \left(A'_{p^\infty}\right)_1^{2,1} \simeq E'_\infty \mid x'.$$

§4. Relations entre le système projectif des $M_K(G, X)$ et le système projectif des $M_{K'}(G', X')$

Dans ce paragraphe, nous utilisons la théorie des *variétés connexes de Shimura* – pour lesquelles on renvoie à l'exposé de Deligne à Corvallis

[D.2] – pour exprimer les relations qui lient les variétés de Shimura $M(G, X)$ et $M(G', X')$, associées à deux groupes admettant le même groupe dérivé G_1.

4.1. Composantes neutres

4.1.1. Nous avons vu précédemment que les ensembles des points sur $\mathbf{C}$ des schémas $M = M(G, X) = \varprojlim M_K(G, X)$ et $M' = M(G', X') = \varprojlim M_{K'}(G', X')$ s'exprimaient comme des quotients:

$$M(\mathbf{C}) = G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{Q})^{\wedge}\backslash G(\mathbf{A}^f) \times X$$

et

$$M'(\mathbf{C}) = G'(\mathbf{Q})\backslash G'(\mathbf{A}^f) \times X'.$$

Nous définissons alors la *composante neutre* $M^+(\mathbf{C})$ *de* $M(\mathbf{C})$ (*resp. la composante neutre* $M'^+(\mathbf{C})$ de $M'(\mathbf{C})$) comme la composante connexe qui contient l'image de $\{1\} \times X^+ \subset G(\mathbf{A}^f) \times X$ (resp. $\{1\} \times X' \subset G'(\mathbf{A}^f) \times X'$). Cela définit en fait une composante connexe M^+ (resp. M'^+) du $\overline{\mathbf{Q}}$-schéma $M \underset{F}{\otimes} \overline{\mathbf{Q}}$ (resp. $M' \underset{E}{\otimes} \overline{\mathbf{Q}}$).

4.1.2. Le schéma $M \underset{F}{\otimes} \overline{\mathbf{Q}}$ est muni d'actions à droite (qui commutent entre elles) des deux groupes $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ et $G(\mathbf{A}^f)$ (ce dernier opérant via son quotient $G(\mathbf{A}^f)/Z(\mathbf{Q})^{\wedge}$). Pour un élément σ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$, notons $[\sigma]$ l'élément de $T(\mathbf{Q})^{+\wedge}\backslash T(\mathbf{A}^f)$ qui lui correspond par l'isomorphisme de la théorie du corps de classes. Il résulte alors de la loi de réciprocité (1.2) que le *sous-groupe*

$$\mathscr{E}^{\wedge} \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F) \times G(\mathbf{A}^f),$$

constitué des couples (σ, g) *tels que* $[\sigma]^{-1}\nu(g) \in T(\mathbf{Q})^{+\wedge}$, *stabilise* M^+ (en fait il stabilise chaque composante connexe de $M \underset{F}{\otimes} \overline{\mathbf{Q}}$). Ce groupe $\mathscr{E}^{\wedge}$ apparaît comme une extension:

$$1 \to \Delta^{\wedge} \to \mathscr{E}^{\wedge} \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F) \to 1$$

où $\Delta^{\wedge}$ désigne le sous-groupe de $G(\mathbf{A}^f)$ formé des g tels que $\nu(g) \in T(\mathbf{Q})^{+\wedge}$. Il opère via le quotient $\bar{\mathscr{E}} = \mathscr{E}^{\wedge}/Z(\mathbf{Q})^{\wedge}$, lequel est une extension:

$$1 \to \bar{\Delta} \to \bar{\mathscr{E}} \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F) \to 1$$

où $\bar{\Delta} = \Delta^\wedge / Z(\mathbf{Q})^\wedge$ est aussi isomorphe au quotient par $Z(\mathbf{Q})$ du sous-groupe Δ de $G(\mathbf{A}^f)$ formé des g tels que $\nu(g) \in T(\mathbf{Q})^+$. Nous aurons cependant besoin de considérer $\mathscr{E}^\wedge$ et non pas seulement $\bar{\mathscr{E}}$, ceci afin d'étudier l'action de $\mathscr{E}^\wedge$ sur E^0_∞.

Nous nous intéresserons surtout dans la suite à l'image de M^+ dans le $\bar{F}_{\mathfrak{p}}$-schéma $M \underset{F}{\otimes} \bar{F}_{\mathfrak{p}}$ et donc à l'action de la sous-extension:

$$1 \to \Delta^\wedge \to \mathscr{E}_{\mathfrak{p}}^\wedge \to W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \to 1$$

obtenue par pull-back de la précédente via l'inclusion du groupe de Weil local dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$. Notant encore $[\sigma]$ l'élément de $F_{\mathfrak{p}}^*$ qui correspond à un élément σ de $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$, on voit que $\mathscr{E}_{\mathfrak{p}}^\wedge$ est le sous-groupe du produit $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \times G(\mathbf{A}^f)$ formé des couples (σ, g) tels que $[\sigma]^{-1}\nu(g) \in T(\mathbf{Q})^{+\wedge}$. Nous noterons $\mathscr{E}_{\mathfrak{p}}$ le sous-groupe de $\mathscr{E}_{\mathfrak{p}}^\wedge$ formé des (σ, g) tels que $[\sigma]^{-1}\nu(g) \in T(\mathbf{Q})^+$. Il est une extension:

$$1 \to \Delta \to \mathscr{E}_{\mathfrak{p}} \to W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \to 1$$

et le quotient $\mathscr{E}_{\mathfrak{p}}/Z(\mathbf{Q})$ s'identifie à $\mathscr{E}_{\mathfrak{p}}^\wedge / Z(\mathbf{Q})^\wedge = \bar{\mathscr{E}}_{\mathfrak{p}}$.

4.1.3. De même, le schéma $M' \underset{E}{\otimes} \overline{\mathbf{Q}}$ est muni d'actions à droite des groupes $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ et $\tilde{G}$. On définit de façon évidente un morphisme:

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} : \tilde{G}/Z''(\mathbf{Q}) &\to \left(F^{*+}(\mathbf{A}^f)^*/F^{*+}\right) \times U_E(\mathbf{A}^f)/U_E(\mathbf{Q}) \\ &\simeq (\mathbf{A}^f)^*/\mathbf{Q}^{*+} \times U_E(\mathbf{A}^f)/U_E(\mathbf{Q}) \\ &\simeq T'(\mathbf{A}^f)/T'(\mathbf{Q})^+\end{aligned}$$

lequel décrit (cf. (3.2)) l'action de $\tilde{G}$ sur l'ensemble des composantes connexes de $M'(\mathbf{C})$.

Pour σ un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$, nous notons $[\sigma]'$ l'élément de $T_E(\mathbf{A}^f)/T_E(\mathbf{Q})^{+\wedge}$ qui lui correspond par la théorie du corps de classes. Il résulte alors de la loi de réciprocité (3.2) que le *sous-groupe*:

$$\mathscr{E}' \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E) \times \tilde{G}$$

constitué des couples (σ, g) *tels que* $\mathscr{R}([\sigma]')\tilde{\nu}(g) \in T'(\mathbf{Q})^+$ *stabilise* M'^+ (en fait, chaque composante de $M' \underset{E}{\otimes} \overline{\mathbf{Q}}$). Ce groupe $\mathscr{E}'$ est une extension:

$$1 \to \Delta' \to \mathscr{E}' \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E) \to 1$$

où Δ' désigne le sous-groupe de $\tilde{G}$ formé des g tels que $\tilde{\nu}(g)$ soit trivial. Il opère via le quotient $\bar{\mathscr{E}}' = \mathscr{E}'/Z''(\mathbf{Q})$, lequel est une extension:

$$1 \to \bar{\Delta}' \to \bar{\mathscr{E}}' \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E) \to 1$$

avec $\bar{\Delta}' = \Delta'/Z''(\mathbf{Q})$. On constate que l'inclusion de G dans G'' envoie Δ dans Δ' et induit une bijection:

$$\bar{\Delta} \simeq \bar{\Delta}'.$$

Comme précédemment, nous nous intéresserons surtout à l'image de M'^{+} dans le $\bar{F}_{\mathfrak{p}}$-schéma $M' \underset{E}{\otimes} \bar{F}_{\mathfrak{p}}$ et donc à l'action de la sous-extension

$$1 \to \Delta' \to \mathscr{E}'_{\mathfrak{p}} \to W\left(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}\right) \to 1$$

obtenue par pull-back de la précédente au moyen de l'inclusion de $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$. Rappelons que d'après (3.2.3) le morphisme $\mathscr{R}$ envoie $\sigma \in W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$ sur l'élément $(N_{F_{\mathfrak{p}}/\mathbf{Q}_p}([\sigma])^{-1};\ [\sigma]^{-1}, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{Q}_p^* \times F_{\mathfrak{p}_1}^* \times \cdots \times F_{\mathfrak{p}_r}^* = T'(\mathbf{Q}_p)$.

4.2. La comparaison fondamentale

4.2.1. On renvoie le lecteur à ([D.2], (2.5)) pour les affirmations qui suivent:

Le groupe $\bar{\Delta} \simeq \bar{\Delta}'$ est le groupe noté par Deligne:

$$G_1(\mathbf{A}^f) \underset{G_1(\mathbf{Q})}{*} PG(\mathbf{Q})^{+} = PG(\mathbf{Q})^{\wedge +} \quad (\text{rel. } G_1)$$

et l'extension $\bar{\mathscr{E}}$ (resp. $\bar{\mathscr{E}}'$) coïncide avec l'extension notée $\mathscr{E}_F(PG, G_1, X^+)$ (resp. $\mathscr{E}_E(PG, G_1, X^+)$. En particulier, *$\bar{\mathscr{E}}'$ s'identifie naturellement au pull-back par l'inclusion de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ *dans* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ *de l'extension $\bar{\mathscr{E}}$.*

On obtient explicitement cette identification comme il suit:

– Le pull-back de l'extension $\bar{\mathscr{E}}$ s'identifie au sous-groupe:

$$\bar{\mathscr{E}}_E \subset \left(G(\mathbf{A}^f)/Z(\mathbf{Q})^{\wedge}\right) \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$$

formé des couples $(\dot{g}, \sigma)$ tels que $\nu(g)^{-1}[\sigma]'\overline{[\sigma]}' \in T(\mathbf{Q})^{+\wedge}$.

– L'extension $\bar{\mathscr{E}}'$ s'identifie au sous-groupe:

$$\bar{\mathscr{E}}' \subset (\tilde{G}/Z''(\mathbf{Q})) \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$$

formé des couples $(\dot{g}, \sigma)$ tels que $\tilde{\nu}(g)\mathscr{R}([\sigma]') \in T'(\mathbf{Q})^{+}$.

– Soit $(\dot{g}, \sigma)$ un élément de $\bar{\mathscr{E}}_E$. Pour un choix convenable d'un représentant g de $\dot{g}$ dans $G(\mathbf{A}^f)$ et d'un représentant de $[\sigma]'$ dans $T_E(\mathbf{A}^f)$, on peut supposer que le produit $\nu(g)^{-1}[\sigma]'\overline{[\sigma]}'$ est dans $T(\mathbf{Q})^+$. On associe alors à $(\dot{g}, \sigma)$ l'élément:

$$((g, \varphi([\sigma]')), \sigma) \in \bar{\mathscr{E}}'$$

on vérifie que cela définit bien une *bijection* entre les extensions $\bar{\mathscr{E}}'$ et $\bar{\mathscr{E}}_E$.

– On laisse au lecteur méfiant le soin de vérifier, en déroulant le formalisme de ([D.2], (2.5)), que la bijection ainsi définie est la bijection *canonique* ([D.2] (2.5.6)). On pourra se contenter de remarquer qu'il n'en existe aucune autre raisonnable (il n'existe aucun morphisme raisonnable de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ dans $\bar{\Delta}$).

4.2.2. Le résultat fondamental *d'unicité d'un modèle faiblement canonique connexe* – cf. [D.2] (2.7.10 à 2.7.13) – s'énonce alors de la façon suivante:

PROPOSITION: *Les $\overline{\mathbf{Q}}$-schémas M^+ et M'^+ sont isomorphes par un isomorphisme compatible aux actions de l'extension $\mathscr{E}_E(PG, G_1, X^+)$, laquelle s'identifie à la fois à $\bar{\mathscr{E}}'$* (agissant sur M'^+) *et au pull-back $\bar{\mathscr{E}}_E$ de $\bar{\mathscr{E}}$* (agissant sur M^+).

Il en résulte en particulier que les $\bar{F}_\mathfrak{p}$-schémas $M^+ \underset{\overline{\mathbf{Q}}}{\otimes} \bar{F}_\mathfrak{p}$ et $M'^+ \underset{\overline{\mathbf{Q}}}{\otimes} \bar{F}_\mathfrak{p}$ sont isomorphes par un isomorphisme compatible aux actions de l'extension $\bar{\mathscr{E}}_\mathfrak{p} \simeq \bar{\mathscr{E}}'_\mathfrak{p}$.

4.2.3. Afin de pouvoir comparer l'action des extensions $\mathscr{E}_\mathfrak{p}$ et $\mathscr{E}'_\mathfrak{p}$ sur les groupes p-divisibles à isogénie près E^0_∞ et E'^0_∞, *on définit comme il suit une injection de $\mathscr{E}_\mathfrak{p}$ dans $\mathscr{E}'_\mathfrak{p}$: A* $(g, \sigma) \in G(\mathbf{A}^f) \times W(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})$ un élément de $\mathscr{E}_\mathfrak{p}$, on associe $(g', \sigma) \in \tilde{G} \times W(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})$ où g' est le produit de g par l'élément $\varphi([\sigma])$ de $T_E(\mathbf{Q}_\uparrow) = F_p^* \times F_p^*$. On vérifie que cet élément est donné par:

$$\varphi([\sigma]) = ([\sigma]N([\sigma]),\ N([\sigma]), \ldots, N([\sigma]);\ 1, 1, \ldots, 1)$$

où N désigne la norme de $F_\mathfrak{p}$ à $\mathbf{Q}_p$. Cette injection préserve la composante sur le facteur $GL_2(F_\mathfrak{p})$ dans chacun des deux groupes. D'autre part, elle passe au quotient en la bijection naturelle $\bar{\mathscr{E}}_\mathfrak{p} \simeq \bar{\mathscr{E}}'_\mathfrak{p}$. On en déduit la:

PROPOSITION: *Les $\bar{F}_\mathfrak{p}$ schémas $M^+ \otimes \bar{F}_\mathfrak{p}$ et $M'^+ \otimes \bar{F}_\mathfrak{p}$ sont isomorphes par un isomorphisme qui se relève en un isomorphisme des groupes p-divisibles (constants!) E_∞ et E'_∞. Ce dernier isomorphisme est compatible, via l'inclusion de $\mathscr{E}_\mathfrak{p}$ dans $\mathscr{E}'_\mathfrak{p}$ définie précédemment, aux actions sur $E^0_\infty \mid M^+ \otimes \bar{F}_\mathfrak{p}$ (resp. sur $E'^0_\infty \mid M'^+ \otimes \bar{F}_\mathfrak{p}$) de l'extension $\mathscr{E}_\mathfrak{p}$ (resp. $\mathscr{E}'_\mathfrak{p}$).*

Cette proposition contient toute l'information qui nous sera nécessaire pour ramener l'étude de la variété M à celle de la variété M'. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons en déduire, par descente galoisienne, quelques conséquences plus concrètes.

4.3. Sous-groupes remarquables des extensions $\mathscr{E}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathscr{E}'_{\mathfrak{p}}$

4.3.1. Soit J le sous-groupe de l'extension $\mathscr{E}_{\mathfrak{p}}$ constitué des couples $(g, \sigma) \in GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$ qui vérifient $\det(g)^{-1} \cdot [\sigma] = 1$. Soit d'autre part J' le sous-groupe de l'extension $\mathscr{E}'_{\mathfrak{p}}$ défini, en utilisant l'isomorphisme

$$G'(\mathbf{Q}_p) \simeq GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times (B \otimes F_{\mathfrak{p}_2})^* \times \cdots \times (B \otimes F_{\mathfrak{p}_r})^* \times \mathbf{Q}_p^*$$

(cf. (2.5)), comme l'ensemble des triples

$$(g, t, \sigma) \in GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times \mathbf{Q}_p^* \times W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$$

tels que $\det(g)^{-1}[\sigma] = 1$ et $t^{-1}N([\sigma]) = 1$.

L'injection (4.2.3) induit alors une *bijection entre J et J'*, laquelle associe à l'élément $(g, \sigma) \in J$ l'élément $(g, N([\sigma]), \sigma) \in J'$.

4.3.2. Soit Δ_0 le sous-groupe de Δ formé des éléments dont la composante sur le facteur $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ appartient au sous-groupe $GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$. On définit de même Δ'_0. L'injection de Δ dans Δ' induit une injection de Δ_0 dans Δ'_0 et une injection du quotient $\Delta_0/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ dans le quotient $\Delta'_0/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$. On notera que $\Delta_0/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ opère sur M_0 (il s'identifie d'ailleurs à un sous-groupe de Γ) en en respectant les composantes connexes géométriques. De même $\Delta'_0/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ opère sur M'_0 en en respectant les composantes connexes géométriques. Ces deux actions se relèvent naturellement en des actions sur les groupes p-divisibles E_∞ et E'_∞.

Nous noterons enfin $S\Gamma$ le sous-groupe de Γ formé des γ tels que $\nu(\gamma) = 1$. Le groupe $S\Gamma$ est aussi de façon évidente un sous-groupe de Γ', et il se plonge de manière naturelle dans $\Delta_0/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ et $\Delta'_0/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$.

4.4. Descente galoisienne

Adoptons les notations suivantes: Pour $K \subset G(\mathbf{A}^f)$ un sous-groupe (compact-ouvert), soit M_K^+ la composante connexe image de M^+ dans $M_K \underset{F}{\otimes} \bar{F}_{\mathfrak{p}}$. Même notation $M_{K'}^{\prime +}$ pour K' un sous-groupe de $G'(\mathbf{A}^f)$. On définit de façon identique $M_{n,H}^+$, $M_{n,H'}^{\prime +}$, M_n^+, $M_n^{\prime +}$.

4.4.1. La projection de M^+ sur M_0^+ constitue un *espace principal homogène de* groupe $SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$, et le groupe E_∞ sur M_0^+ s'obtient à partir de ce revêtement comme le quotient:

$$E_\infty \mid M_0^+ = \left[M^+ \times \left(F_\mathfrak{p}/\mathcal{O}_\mathfrak{p}\right)^2\right]/SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$$

(avec l'action de $SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ définie comme en (1.4.2)).

De la loi de réciprocité (1.3) il résulte que les composantes connexes absolues de $M_0 \underset{F}{\otimes} F_\mathfrak{p}$ sont *rationnelles sur* $F_\mathfrak{p}^{nr}$. Notons alors M_0^0 la composante connexe du $F_\mathfrak{p}^{nr}$-schéma $M_0 \underset{F}{\otimes} F_\mathfrak{p}^{nr}$ qui correspond à M^+. En termes du formalisme des variétés de Shimura connexes, la rationalité de M_0^+ se voit comme suit.

Notons J_0 le sous-groupe de J (défini en (4.3.1)) formé des couples $(g, \sigma) \in J$ tels que $g \in GL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ (et donc σ appartient au groupe d'inertie $\mathrm{Gal}(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p}^{nr})$). Ce groupe est une extension de $\mathrm{Gal}(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p}^{nr})$ par $SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$, et il opère sur M^+. Cette dernière action passe au quotient et définit une action sur M_0^+ du groupe quotient $J_0/SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$, isomorphe à $\mathrm{Gal}(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p}^{nr})$. On obtient alors M_0^0 par descente galoisienne à partir de M_0^+ et de l'action ainsi définie du groupe d'inertie. On voit de même que le groupe $(E_\infty \mid M_0^0)$ s'obtient par descente à partir de $(E_\infty \mid M_0^+)$. Enfin l'action sur M_0^0 du groupe $S\Gamma$ s'obtient à partir de l'action de Δ_0 (défini en 4.3.2) sur M^+, par passage au quotient, et en utilisant l'inclusion de $S\Gamma$ dans le quotient $\Delta_0/SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. On obtient de même l'action de $S\Gamma$ sur E_∞ qui relève la précédente.

4.4.2. De la même façon, $M_0'^+$ s'identifie au quotient $M'/SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ et le groupe $E'_\infty \mid M_0'^+$ s'obtient comme le quotient:

$$E'_\infty \mid M_0'^+ = \left[M'^+ \times \left(F_\mathfrak{p}/\mathcal{O}_\mathfrak{p}\right)^2\right]/Sl_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p}).$$

Il résulte de la loi de réciprocité (3.2.3) que les composantes connexes de $M_0' \underset{F}{\otimes} \bar{\mathrm{F}}_\mathfrak{p}$ sont rationnelles sur $F_\mathfrak{p}^{nr}$. Notons alors $M_0'^0$ la composante de $M_0' \underset{E}{\otimes} F_\mathfrak{p}^{nr}$ qui correspond à M'^+.

On obtient encore $M_0'^0$ par descente galoisienne via l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p}^{nr})$ définie comme suit: notons J_0' le sous-groupe de J' formé des triples $(g, t, \sigma) \in J'$ tels que $g \in GL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ (ce qui entraîne que $t \in \mathbf{Z}_p^*$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p}^{nr})$). Alors l'action de J_0' sur M'^+ passe au quotient et définit sur $M_0'^+$ une action du quotient $J_0'/SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{Gal}(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p}^{nr})$.

Cette action du groupe de Galois se relève de façon évidente en une action sur le groupe $E'_\infty \mid M_0'^+$, ce qui permet de définir par descente le groupe E'_∞ sur $M_0'^0$. Enfin l'action sur $M_0'^0$ du groupe $\Delta'_0/SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ s'obtient par passage au quotient à partir de l'action de Δ' sur M^+. On obtient de même l'action sur E'_∞ qui relève la précédente.

4.4.3. La comparaison de (4.3.2) et (4.3.3) et la comparaison fondamentale (4.2.3) entraînent alors aussitôt la proposition suivante:

PROPOSITION: *Les $F_{\mathfrak{p}}^{nr}$-schémas M_0^0 et $M_0'^0$ sont isomorphes par un isomorphisme qui se relève en un isomorphisme des groupes p-divisibles $E_\infty \mid M_0^0$ et $E'_\infty \mid M_0'^0$ (munis de leurs structures de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules), isomorphisme compatible aux actions des groupes $\Delta_0/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \subset \Delta'_0/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ (en particulier donc compatible à l'action du groupe $S\Gamma$).*

4.5. Conséquences

Voici quelques conséquences faciles de la proposition précédente. Elles nous seront utiles dans la suite.

4.5.1. Soit $M^{(0)}$ l'image réciproque dans $M \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ de la composante M_0^0 de $M_0 \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$. On définit de même $M'^{(0)}$. Il est clair que $M^{(0)}$ (resp. $M'^{(0)}$) est le schéma au-dessus de M_0^0 (resp. $M_0'^0$) qui classifie les isomorphismes entre E_∞ (resp. E'_∞) et le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module divisible constant $(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$. L'isomorphisme de la proposition précédente définit alors un isomorphisme de $F_{\mathfrak{p}}^{nr}$-schémas:

$$M^{(0)} \simeq M'^{(0)}.$$

Par construction, ce dernier isomorphisme envoie le sous-schéma M^+ de $M^{(0)}$ sur le sous-schéma M'^+ de $M'^{(0)}$ par l'isomorphisme (4.2.2). On en déduit ($M^{(0)}$ étant recouvert par les translatés de M^+ par l'action du groupe $GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$) que l'isomorphisme ainsi défini est compatible à l'action sur les deux membres du groupe $\Delta' \simeq \overline{\Delta}'$.

4.5.2. Soit $H \subset \Gamma$ un sous-groupe compact-ouvert. La composante connexe $M_{0,H}^0$ de $M_{0,H} \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ correspondant à $M_{0,H}^+$ s'obtient à partir de M_0^0 comme le quotient:

$$M_{0,H}^0 = M_0^0/H \cap \Gamma_1$$

où Γ_1 désigne le sous-groupe de Γ formé des éléments γ tels que $\nu(\gamma) \in (\mathbf{A}_F^{f,\mathfrak{p}})^*$ soit dans le groupe $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}^{+*}$ des $\mathfrak{p}$-unités totalement positives de F. Pour H assez petit, on voit que c'est encore le quotient:

$$M_{0,H}^0 = M_0^0/H \cdot \mathcal{O}_F^* \cap S\Gamma.$$

Du même, pour $H' \subset \Gamma'$ un sous-groupe compact ouvert assez petit, la composante $M_{0,H'}'^0$ de $M'_{0,H'} \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ s'obtient comme le quotient:

$$M_{0,H'}'^0 = M_0'^0/H' \cap S\Gamma.$$

On déduit alors de la proposition la:

CONSÉQUENCE: Soit $H \subset \Gamma$ un sous-groupe compact-ouvert assez petit. Il existe alors un sous-groupe compact-ouvert $H' \subset \Gamma'$ et un isomorphisme de $F_{\mathfrak{p}}^{nr}$-schémas:

$$M_{0,H}^{0} \simeq M_{0,H'}^{\prime 0}.$$

4.5.3. On voit facilement d'après (1.2) (resp. (3.2)) que les composantes connexes de $M_0 \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ (resp. $M_0' \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$) sont permutées transitivement par l'action du groupe Γ (resp. Γ'). Il résulte alors immédiatement de la proposition le:

COROLLAIRE: *Soit N une composante connexe de $M_0 \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ et N' une composante connexe de $M_0' \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$. Il existe alors entre les $F_{\mathfrak{p}}^{nr}$-schémas N et N' un isomorphisme qui se relève en un isomorphisme des groupes p-divisibles $E_\infty \mid N$ et $E_\infty' \mid N'$.* (Un tel isomorphisme n'est alors plus compatible à l'action des groupes $\Delta_0/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ et $\Delta_0'/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$).

4.5.4. Combinant (4.5.2) et (4.5.3), on prouve facilement le

COROLLAIRE: *Soit $H \subset \Gamma$ un sous-groupe compact-ouvert assez petit et soit N_H une composante connexe de $M_{0,H} \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$. Il existe alors un sous-groupe (compact-ouvert) $H' \subset \Gamma'$ et une composante connexe $N_{H'}'$ de $M_{0,H'}' \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ tels que les $F_{\mathfrak{p}}^{nr}$-schémas N_H et $N_{H'}'$ soient isomorphes.*

4.5.5. Les composantes connexes de $M_{n,H}$ (resp. $M_{n,H'}'$) sont rationnelles sur $F_{\mathfrak{p}}^{n}$. On laisse au lecteur le soin de déduire de (4.5.1) et (4.5.2) la (facile) proposition:

PROPOSITION: *Soit n un entier, et $H \subset \Gamma$ un sous-groupe compact ouvert assez petit. Il existe alors un sous-groupe compact-ouvert $H' \subset \Gamma'$ tel que les composantes neutres $M_{n,H}^{0}$ et $M_{n,H'}^{\prime 0}$ soient des $F_{\mathfrak{p}}^{n}$-schémas isomorphes.*

§5. Bonne réduction des courbes $M_{0,H'}'$

5.1. L'objet de ce paragraphe est de montrer que les courbes $M_{0,H'}'$ ont *bonne réduction* en la place $\mathfrak{p}$ de E (définie par le plongement $E \subset F_{\mathfrak{p}}$ de 2.1.1): il existe donc sur l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},E}$ des $\mathfrak{p}$-entiers de E un schéma en courbes $\boldsymbol{M}_{0,H'}'$ propre et lisse, de fibre générale $M_{0,H'}'$. Nous montrons aussi que le groupe p-divisible E_∞' se prolonge à $\boldsymbol{M}_{0,H'}'$. Nous établissons enfin un analogue du théorème de Serre-Tate ramenant la théorie des déformations d'un point de la fibre spéciale de $\boldsymbol{M}_{0,H'}'$ à celle du groupe E_∞'.

Quelques remarques faciles (qui seront développées plus en détail au paragraphe suivant, consacré à la réduction des courbes $M_{0,H}$):

(a) Un tel modèle propre et lisse $\boldsymbol{M}'_{0,H'}$ (pour H' assez petit) est *unique à isomorphisme unique près* (cela résulte du fait que les composantes connexes géométriques de $M'_{0,H'}$ sont de genre $\geqslant 2$).

(b) Un prolongement du groupe E'_∞, s'il existe, est aussi unique (théorème de Tate).

(c) Pour établir la bonne réduction de $M'_{0,H'}$ et le prolongement de E'_∞, il suffit de le faire pour la courbe $M'_{0,H'} \underset{E}{\otimes} F_{\mathfrak{p}}$. Dans la suite, nous nous contenterons donc de définir un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-schéma propre et lisse, noté encore (abusivement) $\boldsymbol{M}'_{0,H'}$, de fibre générale $M'_{0,H'} \otimes F_{\mathfrak{p}}$.

5.2. *Le problème de modules*

5.2.1. Soit R une $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-algèbre, et soit A un schéma abélien sur R, muni d'une action de l'anneau $\mathcal{O}_D$ (telle que 1 agisse par l'identité). Rappelons (cf. (2.6.1)) que l'action de $\mathcal{O}_{D_p}$ sur Lie A induit une décomposition:

$$\operatorname{Lie} A = \operatorname{Lie}_1^1 A \oplus \cdots \oplus \operatorname{Lie}_r^1 A \oplus \operatorname{Lie}_1^2 A \oplus \cdots \oplus \operatorname{Lie}_r^2 A$$

Avec $\operatorname{Lie}_i^k(A)$ un R-module projectif, muni d'une action de l'anneau $\mathcal{O}_{D_i^k}$. Le module $\operatorname{Lie}_1^2 A$ se décompose en la somme de deux R-modules projectifs $\operatorname{Lie}_1^{2,1} A$ et $\operatorname{Lie}_1^{2,2} A$, munis d'une action de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

Rappelons aussi que le groupe p-divisible associé à A admet une décomposition analogue, dont les facteurs sont des groupes p-divisibles.

5.2.2. On définit alors comme suit un foncteur $\mathfrak{M}^2_{0,H'}$ sur les $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-algèbres, lequel prolonge le foncteur $\mathfrak{M}^2_{0,H'}$ de (2.6.3), défini sur les $F_{\mathfrak{p}}$-algèbres: *soit donc R une $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-algèbre. Par définition, $\mathfrak{M}^2_{0,H'}(R)$ sera l'ensemble des classes d'isomorphie de quadruples $(A, \iota, \theta, \bar{k}^{\mathfrak{p}})$ où*:

(a) *A est un R-schéma abélien de dimension relative $4d$, muni d'une action ι de l'anneau $\mathcal{O}_D$ (telle que 1 agisse par l'identité) telle que soient satisfaites les deux conditions suivantes*:
  (i) *Le R-module projectif $\operatorname{Lie}_1^{2,1}(A)$ est de rang 1, et l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ y agit via le morphisme structural $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \to R$.*
  (ii) *Pour $i \geqslant 2$, le module $\operatorname{Lie}_i^2(A)$ est nul.*

(b) *θ est une polarisation de A, d'ordre premier à p, telle que l'involution de Rosati associée envoie $\iota(l)$ sur $\iota(l^*)$.*

(c) *$\bar{k}^{\mathfrak{p}}$ est une classe modulo H' d'isomorphismes*:

$$k^{\mathfrak{p}} = k_p^{\mathfrak{p}} \oplus k^p : T_p^{\mathfrak{p}}(A) \oplus \hat{T}^p(A) \xrightarrow{\sim} W_p^{\mathfrak{p}} \oplus \hat{W}^p,$$

avec $k_p^{\mathfrak{p}}$ linéaire et k^p symplectique.

5.2.3. *Remarques*

(i) Il résulte de la condition (a(ii)) que les groupes p-divisible $(A_{p^\infty})_i^2$ (pour $i \geqslant 2$) sont *ind-étales*. Cela donne un sens à $T_p^{\mathfrak{p}}(A)$ comme

"faisceau tordu sans torsion" en $\mathbf{Z}_p$-modules. On voit donc que le foncteur "oubli de la donnée (c)" est étale.
(ii) On peut d'ailleurs interpréter de façon plus rassurante la donnée (c) comme suit: pour $n \geqslant 1$ et $N \geqslant 1$ (premier à p) des entiers, soit $H'_{n,N}$ le sous-groupe de Γ' formé des éléments γ' tels que $\gamma' - 1$ envoie $W_p^{\mathfrak{p}}$ dans $p^n W_p^{\mathfrak{p}}$ et $\hat{W}^p$ dans $N\hat{W}^p$. Supposons que H' contienne $H'_{n,N}$. La donnée de $\bar{k}^{\mathfrak{p}}$ définit alors une classe modulo $H'/H'_{n,N}$ d'isomorphismes:

$$\dot{k}^{\mathfrak{p}} : (A_{p^n})_2^2 \oplus \cdots \oplus (A_{p^n})_r^2 \oplus A_N \xrightarrow{\sim} W_p^{\mathfrak{p}}/p^n W_p^{\mathfrak{p}} \oplus \hat{W}^p/N\hat{W}^p$$

compatibles aux accouplements définis sur A_N et $\hat{W}^p/N\hat{W}^p$. Il est facile de vérifier que, réciproquement, pour n et N assez grands, un tel $\dot{k}^{\mathfrak{p}}$ peut se relever en un isomorphisme $k^{\mathfrak{p}}$ comme en (c), bien défini modulo H'.
(iii) Supposons l'anneau R *local complet noetherien de caractéristique résiduelle* p. La condition (a,i) signifie alors que le groupe $(A_{p^\infty})_1^{2,1}$ constitue un "*$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module divisible sur* R" (cf. (App. 1)). On déduit facilement du fait que $\dim A = 4d$ et de la condition (c) que *la hauteur de ce $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module divisible est égale à* 2.
(iv) Du fait que l'involution $l \to l^*$ échange les facteurs $\mathcal{O}_{D_l^1}$ et $\mathcal{O}_{D_l^2}$ de l'anneau $\mathcal{O}_D \otimes \mathbf{Z}_p$, la condition (b) du problème de modules signifie que la polarisation θ induit une *dualité de Cartier* entre les groupes p-divisibles $(A_{p^\infty})_l^1$ et $(A_{p^\infty})_l^2$ (dualité compatible aux actions des anneaux $\mathcal{O}_{D_l^1}$ et $\mathcal{O}_{D_l^2}$).

5.3. Représentabilité

PROPOSITION: *Le foncteur* $\mathfrak{M}^2_{0,H'}$ *est représentable* (*si* H' *est assez petit*) *par un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-schéma quasiprojectif* $\mathbf{M}_{0,H'}$.

DÉMONSTRATION: On commence par remarquer qu'il résulte de la condition (c) du problème de modules que le degré de la polarisation θ est égal à l'indice $[V'_{\mathbf{Z}}: V_{\mathbf{Z}}]$. De plus, la donnée de $\bar{k}^p$ fournit (si H' est assez petit) une structure de niveau $N \geqslant 3$ sur A (N premier à p).

Soit alors $\mathscr{A}$ le schéma sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ qui classifie les triples constitués d'un schéma abélien A de dimension $4d$, d'une polarisation θ de degré $[V'_{\mathbf{Z}}: V_{\mathbf{Z}}]$, et d'une structure de niveau N sur A. L'existence d'un tel schéma résulte de la théorie de Mumford ([Mu], prop. (7.9)). Il est alors standard de déduire de la théorie des schémas de Hilbert l'existence d'un schéma $\mathscr{B}$ au-dessus de $\mathscr{A}$ qui classifie les schémas abéliens polarisés et munis d'une structure de niveau N, et de plus munis d'une action de l'anneau $\mathcal{O}_D$ vérifiant la condition (b).

Les conditions ((a)(i) et (ii)) définissent alors un sous-schéma $\mathscr{B}'$ fermé dans $\mathscr{B}$. On utilise enfin les remarques (i) et (ii) précédentes pour voir que $\mathfrak{M}^2_{0,H'}$ est représentable par un schéma quasi-fini et étale au-dessus de $\mathscr{B}'$.

5.4. *Déformations infinitesimales*

Soit κ' un corps extension du corps résiduel κ de $F_{\mathfrak{p}}$, et soit $(A_0, \iota_0, \theta_0, \bar{k}_0^{\mathfrak{p}})$ un point de $\mathfrak{M}^2_{0,H'}(\kappa')$. Nous voulons étudier le foncteur des *déformations* de ce point sur les $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-algèbres artiniennes de corps résiduel κ'. Soit donc R une telle algèbre.

D'après le théorème de Serre et Tate (cf. [Me]), déformer A_0 revient à déformer le groupe p-divisible $(A_0)_{p^\infty}$. L'action de $\mathcal{O}_D$ sur A_0 se prolongera à une telle déformation A pourvu qu'il en soit de même au niveau des groupes p-divisibles. On doit donc choisir une déformation A_{p^∞} de $(A_0)_{p^\infty}$ de la forme:

$$A_{p^\infty} = \left(A_{p^\infty}\right)_1^1 \oplus \cdots \oplus \left(A_{p^\infty}\right)_r^1 \oplus \left(A_{p^\infty}\right)_1^2 \oplus \cdots \oplus \left(A_{p^\infty}\right)_r^2.$$

avec $(A_{p^\infty})_i^k$ une déformation de $[(A_0)_{p^\infty}]_i^k$, munie d'une structure de $\mathcal{O}_{D_i^k}$-module.

La polarisation θ_0 se prolongera alors à A, d'après la remarque (iv) précédente, pourvu que $(A_{p^\infty})_i^1$ s'identifie au dual de Cartier de $(A_{p^\infty})_i^2$. Il nous suffit donc de définir des déformations des $((A_0)_{p^\infty})_i^2$.

Pour $i \geqslant 2$, les $((A_0)_{p^\infty})_i^2$ sont étales et donc se déforment de façon unique. Le problème de déformation du triple (A_0, ι_0, θ_0) se ramène donc au problème de déformer $((A_0)_{p^\infty})_1^2$, avec sa structure de $M_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$-module. Il revient évidemment au même de déformer $[(A_0)_{p^\infty}]_1^{2,1}$, avec sa structure de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module.

La condition (a,ii) est alors satisfaite, la condition (a,i) signifie que $(A_{p^\infty})_1^{2,1}$ est encore un "$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module divisible" sur R. Quant à la donnée (c), elle se prolonge uniquement à toute déformation.

On a donc prouvé que *le foncteur des déformations infinitésimales du point* $(A_0, \iota_0, \theta_0, \bar{k}_0^{\mathfrak{p}})$ *est isomorphe au foncteur des déformations* (*dans la catégorie des* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$*-modules divisibles*) *du* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$*-module divisible* $((A_0)_{p^\infty})_1^{2,1}$ *sur* κ'.

DÉFINITION: *Soit A le schéma abélien* (polarisé, muni d'une action de $\mathcal{O}_D$) *universel sur* $\mathbf{M}'_{0,H'}$. *Posons alors*

$$\boldsymbol{E}'_\infty = \left(A_{p^\infty}\right)_1^{2,1}$$

C'est un groupe de Barsotti-Tate sur $\boldsymbol{M}'_{0,H'}$, *muni d'une action de* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, *et il prolonge le groupe* E'_∞ (*sur* $M'_{0,H'}$). *On définit de même* $\boldsymbol{E}'_n$, *sous-groupe des points de* $\mathfrak{p}^n$*-torsion dans* $\boldsymbol{E}'_\infty$.

Compte tenu de (App. 3) on a donc prouvé la;

PROPOSITION: *Soit x un point géométrique algébrique de la fibre spéciale* $\boldsymbol{M}'_{0,H'} \underset{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \bar{\kappa}$. *Notons* $\left(\widehat{\boldsymbol{M}'_{0,H'}}\right)_{(x)}$ *le complété de l'hensélisé de* $\boldsymbol{M}'_{0,H'}$ *en* x.

Le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module $\boldsymbol{E}'_\infty \mid \widehat{(\boldsymbol{M}'_{0,H'})_{(x)}}$ est alors isomorphe à "la" déformation universelle du $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module divisible $\boldsymbol{E}'_\infty \mid x$. Il en résulte en particulier que le schéma $\boldsymbol{M}'_{0,H'}$ est lisse sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

5.5. Propreté

Il nous reste à montrer que le schéma $\boldsymbol{M}'_{0,H'}$ est *propre* sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Cela résultera, via le critère valuatif (cf. [D.M] 4.19), de la proposition suivante ("réduction semi-stable"):

PROPOSITION: *Soit V une $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-algèbre de valuation discrète de corps des fractions L, et soit $x = (A, \iota, \theta, \bar{k}^{\mathfrak{p}})$ un point de $\mathfrak{M}^2_{0,H'}(\underline{L})$. Alors il existe une extension finie L' de L, et un point $\tilde{x} = (\tilde{A}, \tilde{\iota}, \tilde{\theta}, \bar{\tilde{k}}^{\mathfrak{p}})$ de $\mathfrak{M}^2_{0,H'}$ à valeur dans la clôture intégrale V' de V dans L', tel que l'image de $\tilde{x}$ dans $\mathfrak{M}^2_{0,H'}(L')$ coïncide avec celle de x.*

DÉMONSTRATION: D'après le théorème de réduction semi-stable [SGA 7, I.9], il existe L', extension finie de L, telle que le modèle de Néron $\tilde{A}$ (sur V') de $A \underset{L}{\otimes} L'$ admette pour composante neutre de sa fibre spéciale une extension d'une variété abélienne par un tore T.

Montrons que T est *trivial*: soit $X_*(T)$ le $\mathbf{Z}$-module des sous-groupes à un paramètre de T. Par fonctorialité du modèle de Néron, les anneaux $\mathcal{O}_D$ et $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{O}_D$ opèrent sur T, donc sur $X_*(T)$. Notons t le rang du $\mathcal{O}_E$-module projectif $X_*(T)$. Du fait que l'action de $\mathcal{O}_E$ se prolonge à $\mathcal{O}_D$, on voit que t est ou bien nul, ou bien $\geqslant 2$. L'algèbre de Lie de T s'obtient comme le produit tensoriel:

$$\operatorname{Lie} T = X_*(T) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} k_{L'} \quad (k_{L'} \text{ étant le corps résiduel de } L').$$

Il en résulte que pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, le $k_{L'}$-vectoriel $\operatorname{Lie}_i^2 T$ est de rang $t[F_{\mathfrak{p}_i}: \mathbf{Q}_p]$. Si $t \geqslant 2$, on voit aussitôt (le cas $F = \mathbf{Q}$ étant exclu) que cela est contradictoire avec les conditions (a(i) et (ii)) – lesquelles, vérifiées par la fibre générale de $\tilde{A}$, doivent aussi l'être par la fibre spéciale (lisseté du modèle de Néron).

Donc t est nul, et T est bien *trivial*.

Le modèle de Néron $\tilde{A}$ est alors un schéma abélien sur V'. Par fonctorialité, on y définit une action $\tilde{\iota}$ de $\mathcal{O}_D$ et une polarisation $\tilde{\theta}$; la donnée $\bar{k}^{\mathfrak{p}}$ s'étend de façon unique. On vérifie aussitôt qu'on obtient ainsi un point de $\mathfrak{M}^2_{0,H'}(V')$ vérifiant la conclusion de la proposition. □

5.6. Pour H' de plus en plus petit, les $\boldsymbol{M}'_{0,H'}$ constituent un système projectif à morphismes de transition étales. Nous en noterons $\boldsymbol{M}'_0$ la limite projective. On voit sans peine que l'action du groupe Δ'_0 (cf. 4.3.2) sur $E'_\infty \mid M'_0$ se prolonge en une action sur $\boldsymbol{E}'_\infty \mid \boldsymbol{M}'_0$: ce prolongement se décrit facilement en termes modulaires à l'aide de (3.4.4) et (5.2.2).

§6. Bonne réduction des courbes $M_{0,H}$

6.1. Soit $H \subset \Gamma$ un sous-groupe compact ouvert. Lorsque H est assez petit – hypothèse que nous supposerons toujours satisfaite – les composantes connexes de $M_{0,H}(\mathbf{C})$ apparaissent comme des quotients du demi-plan de Poincaré par des groupes agissant librement, et donc *leur genre est au moins égal à* 2. Ces composantes sont rationnelles sur une extension finie de F non ramifiée en $\mathfrak{p}$.

Il résulte alors de la théorie de la réduction d'une courbe algébrique – pour laquelle on renvoie par exemple à ([D.M.], §1) – qu'il est équivalent:

(a) de prolonger le F-schéma $M_{0,H}$ en un $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$-schéma propre et lisse.
(b) de prolonger le $F_\mathfrak{p}$-schéma $M_{0,H} \otimes F_\mathfrak{p}$ en un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-schéma propre et lisse.
(c) de prolonger chacune des composantes connexes de $M_{0,H} \otimes F_\mathfrak{p}^{nr}$ en un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^{nr}$-schéma propre et lisse.

De plus, un tel prolongement, s'il existe, est *unique à isomorphisme unique près*.

Il résulte alors de (4.5.2) et de la bonne réduction des $\boldsymbol{M}'_{0,H'}$ la:

PROPOSITION: *Le F-schéma $M_{0,H}$ se prolonge en un $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$-schéma propre et lisse $\boldsymbol{M}_{0,H}$ bien défini à isomorphisme unique près.*

6.2. Soit H' un sous-groupe distingué d'indice fini dans H. Le groupe H agit sur $M_{0,H'}$ via son quotient $H_{H'} = H/H'(Z(\mathbf{Q}) \cap HK_\mathfrak{p}^0)$ lequel agit librement (même démonstration que (1.4.1.1)). Du caractère fonctoriel du prolongement $\boldsymbol{M}_{0,H'}$ il résulte que l'action de H sur $M_{0,H'}$ se prolonge en une action sur $\boldsymbol{M}_{0,H'}$. D'après la formule de Lefschetz-Weil, le quotient $H_{H'}$ agit encore librement sur $\boldsymbol{M}_{0,H'}$; le schéma quotient s'identifie alors à $\boldsymbol{M}_{0,H}$ (d'après l'unicité de $\boldsymbol{M}_{0,H}$). En particulier, la projection (étale finie) de $M_{0,H'}$ sur $M_{0,H}$ *se prolonge* (*uniquement*) *en un morphisme étale fini de $\boldsymbol{M}_{0,H'}$ sur $\boldsymbol{M}_{0,H}$.*

Ce dernier résultat *vaut même si H' n'est pas distingué dans H*. Pour cela, on applique ce qui précède aux couples (H'', H') et (H'', H) pour H'' un sous-groupe de H' distingué dans H, et on remarque que la question de prolongement considérée est de nature locale pour la topologie étale.

Les $\boldsymbol{M}_{0,H}$ constituent donc un *système projectif*, à morphismes de transition étales finis. Il est clair alors que l'action du groupe Γ sur le système projectif des $M_{0,H}$ *se prolonge en une action de* Γ *sur le système projectif des $\boldsymbol{M}_{0,H}$*. Pour γ un élément de Γ, on obtient ainsi une famille d'isomorphismes:

$$\gamma : \boldsymbol{M}_{0,H} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{M}_{0,\gamma^{-1}H\gamma}.$$

6.3. Nous noterons $\boldsymbol{M}_0$ la limite projective des $\boldsymbol{M}_{0,H}$. A chaque composante connexe du schéma $M_0 \underset{F}{\otimes} F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ correspond une composante du $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$-schéma $\boldsymbol{M}_0 \underset{\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$. La même chose est vraie pour le schéma $\boldsymbol{M}_0' \underset{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$.

On déduit alors de (4.5.3) le résultat suivant:

Soit N une composante connexe de $\boldsymbol{M}_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$ et N' une composante connexe de $\boldsymbol{M}_0' \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$. Les $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$-schémas N et N' sont alors isomorphes par un isomorphisme qui se relève en un isomorphisme de groupes p-divisibles:

$$E_\infty \mid N \underset{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}}{\otimes} F_{\mathfrak{p}}^{nr} \simeq E_\infty' \mid N' \underset{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}}{\otimes} F_{\mathfrak{p}}^{nr}.$$

De plus, d'après (4.4.3), si N et N' correspondent aux composantes *neutres* de $M_0 \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ et $M_0' \otimes F_{\mathfrak{p}}^{nr}$, alors un tel isomorphisme peut être choisi compatible aux actions des groupes $\Delta_0/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \subset \Delta_0'/SL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$.

6.4. Prolongement à $\boldsymbol{M}_0$ du groupe p-divisible E_∞

Bien que le schéma $\boldsymbol{M}_0$ ne soit pas noetherien, il l'est "localement pour la topologie étale": si x est un point géométrique de la fibre spéciale de $\boldsymbol{M}_0$, le localisé strict de $\boldsymbol{M}_0$ en x est un anneau *noetherien normal*. Il résulte alors du théorème de Tate qu'un éventuel prolongement du groupe E_∞ à ce localisé est *unique* (à isomorphisme unique près). On en déduit aussitôt l'unicité (à isomorphisme unique près) d'un éventuel prolongement de E_∞ en un groupe de Barsotti-Tate sur $\boldsymbol{M}_0$.

De (5.4) et (6.3), il résulte que le groupe $E_\infty \mid M_0 \underset{F}{\otimes} F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ se prolonge en un groupe de Barsotti-Tate sur $\boldsymbol{M}_0 \underset{\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$. Le caractère fonctoriel de ce dernier prolongement permet de *descendre* ce groupe de Barsotti-Tate en un groupe de Barsotti-Tate sur $\boldsymbol{M}_0$. On en déduit le résultat suivant:

PROPOSITION: *Le groupe E_∞ se prolonge en un groupe de Barsotti-Tate $\boldsymbol{E}_\infty$ sur $\boldsymbol{M}_0$, bien défini à isomorphisme unique près. L'action de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ sur E_∞ se relève en une action sur $\boldsymbol{E}_\infty$. De même, l'action de Γ sur $\boldsymbol{M}_0$ se relève en une action sur $\boldsymbol{E}_\infty$ qui prolonge l'action sur E_∞ définie en* (1.4.4).

De la construction de $\boldsymbol{E}_\infty$, il résulte qu'on a, avec les notations de (6.3), des isomorphismes:

$$\boldsymbol{E}_\infty \mid N \simeq \boldsymbol{E}_\infty' \mid N'.$$

6.5. Prolongements des groupes E_n

6.5.1. Soit x un point géométrique de la fibre spéciale $\boldsymbol{M}_{0,H} \underset{\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}}{\otimes} \kappa$, et soit y un point géométrique de $\boldsymbol{M}_0 \underset{\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}}{\otimes} \kappa$ qui relève x. La projection de $\boldsymbol{M}_0$ sur $\boldsymbol{M}_{0,H}$ induit alors un isomorphisme entre les localisés:

$$(\boldsymbol{M}_0)_{(y)} \xrightarrow{\sim} (\boldsymbol{M}_{0,H})_{(x)}.$$

Du fait que les y relevant x sont permutés transitivement par le groupe H, qui opère aussi sur $\boldsymbol{E}_\infty$, cela permet de définir à isomorphisme près un groupe de Barsotti-Tate (avec une structure de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module) sur $(\boldsymbol{M}_{0,H})_{(x)}$. Nous le noterons (abusivement) $\boldsymbol{E}_\infty \mid (\boldsymbol{M}_{0,H})_{(x)}$. On prendra garde qu'il n'est *pas* défini à isomorphisme *unique* près.

6.5.2. Soit $n \geqslant 1$ un entier, et supposons H assez petit (une condition qui dépend de n) pour que le groupe E_n soit défini sur $M_{0,H}$ (cf. (1.4)). On définit alors comme ci-dessus un prolongement $(\boldsymbol{E}_n)_{(x)}$ de E_n à l'hensélisé de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ en un point géométrique x de sa fibre spéciale. Il est clair que maintenant $(\boldsymbol{E}_n)_{(x)}$ est défini à isomorphisme *unique* près.

On voit alors qu'il existe au plus un prolongement $\boldsymbol{E}_{n,H}$ à $\boldsymbol{M}_{0,H}$ du groupe E_n tel que $\boldsymbol{E}_{n,H}$ soit isomorphe, sur l'hensélisé de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ en chaque point géométrique x de la fibre spéciale, au prolongement $(\boldsymbol{E}_n)_{(x)}$. L'existence d'un tel prolongement se voit par descente à partir du groupe $\boldsymbol{E}_n$ ($\mathfrak{p}^n$-torsion de $\boldsymbol{E}_\infty$) sur $\boldsymbol{M}_0$, en remarquant qu'un élément de H agissant trivialement sur $\boldsymbol{M}_0$ (à savoir un élément de $Z(\mathbf{Q}) \cap HK_\mathfrak{p}^0$) agit aussi trivialement sur E_n (car E_n provient d'un groupe $E_{n,H}$ sur $M_{0,H}$) et donc sur $\boldsymbol{E}_n$.

De de qui précède, il résulte aussitôt la:

Proposition: *Il existe une unique façon de prolonger simultanément les groupes $E_{n,H}$ (avec leurs structures de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules) en des groupes finis localement libres $\boldsymbol{E}_{n,H}$ (sur les $\boldsymbol{M}_{0,H}$ correspondants) de telle sorte que les compatibilités* (1.4.3)(i) *et* (ii) *restent staisfaites: pour $H' \subset H$, le groupe $\boldsymbol{E}_{n,H'}$ doit s'identifier au pull-back de $\boldsymbol{E}_{n,H}$ et, si H est assez petit, $\boldsymbol{E}_{n,H}$ doit s'identifier au sous-module de $\mathfrak{p}^n$-torsion de $\boldsymbol{E}_{n+1,H}$. L'action* ((1.4.3)(iii)) *du groupe Γ sur le système projectif des $E_{n,H}$ (n fixé) se prolonge alors au système des $\boldsymbol{E}_{n,H}$.*

Comme pour les groupes $E_{n,H}$, nous noterons le plus souvent $\boldsymbol{E}_n$ le groupe $\boldsymbol{E}_{n,H}$.

6.6. Théorème "de Serre-Tate"

Compte tenu de (6.5.1), de la remarque finale de (6.4), et du théorème "de Serre-Tate" (5.4) pour les courbes $\boldsymbol{M}'_{0,H'}$, on obtient aussitôt la

PROPOSITION: *Soit x un point géométrique algébrique de la fibre spéciale $M_{0,H} \underset{\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}}{\otimes} \kappa$, et notons $\widehat{(M_{0,H})_{(x)}}$ le complété de l'hensélisé de $M_{0,H}$ en x. Le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module $E_\infty \mid \widehat{(M_{0,H})_{(x)}}$ est alors isomorphe à "la" déformation universelle du $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module divisible $E_\infty \mid x$.*

6.7. *Points ordinaires et supersinguliers*

Soit x un point géométrique de $M_{0,H} \underset{\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}}{\otimes} \kappa$. Il résulte alors de (App. (2)) que deux cas peuvent se présenter pour le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module $E_\infty \mid x$:
– *Cas "ordinaire"*: $E_\infty \mid x$ est isomorphe au produit du $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module ind-étale $F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ par (l'unique) $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel de hauteur 1, Σ_1, sur x.
– *Cas "supersingulier"*: $E_\infty \mid x$ est isomorphe à (l'unique) $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel Σ_2, de hauteur 2, sur x.

De la proposition précédente et de (App. (7) et (8)), il résulte que l'ensemble des points supersinguliers de $M_{0,H}(\bar{\kappa})$ est *fini*. Nous montrerons plus loin que cet ensemble est *non vide*.

On définit de même la notion de point ordinaire ou supersingulier pour la fibre spéciale de $M'_{0,H'}$, avec les mêmes propriétés que précédemment.

Au paragraphe 11, nous décrirons l'ensemble des points supersinguliers de $M_0(\bar{\kappa})$ en utilisant le problème de modules $\mathfrak{M}_0^2$ et l'isomorphisme de (6.3). Nous retrouverons en particulier le fait que l'ensemble des points supersinguliers de $M_{0,H}(\bar{\kappa})$ (resp. $M'_{0,H'}(\bar{\kappa})$) est bien fini.

§7. Bases de Drinfel'd

7.1. Dans ce paragraphe, nous commençons à étudier la réduction des courbes $M_{n,H}$. Fixons donc un entier $n \geqslant 1$, et prenons $H \subset \Gamma$, un sous-groupe compact ouvert, que nous supposerons toujours assez petit pour que le groupe E_n soit défini sur $M_{0,H}$. Il découle de la définition de ce groupe E_n que le schéma $M_{n,H}$, vu comme schéma au-dessus de $M_{0,H}$, représente le foncteur $\mathfrak{M}_{n,H}$ qui à S un schéma au-dessus de $M_{0,H}$ (S est donc muni du pull-back $E_n \mid S$ de E_n) associe l'ensemble des *trivialisations* de E_n sur S, i.e. des isomorphismes entre $E_n \mid S$ et le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module constant $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2_S$. La donnée d'une telle trivialisation est encore équivalente à la donnée d'un couple de sections $(P, Q) \in E_n(S) \times E_n(S)$ tel qu'en tout point géométrique s de S les images $P(s)$ et $Q(s)$ engendrent le $(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$-module $E_n(s)$.

L'objet de ce paragraphe est d'étendre le foncteur $\mathfrak{M}_{n,H}$ en un foncteur $\mathfrak{M}_{n,H}$ défini sur les $M_{0,H}$-schémas, et de prouver que $\mathfrak{M}_{n,H}$ est représentable par un schéma $M_{n,H}$, lequel est régulier, fini et plat au-dessus de $M_{0,H}$.

Les mêmes résultats vaudront pour les courbes $M'_{n,H'}$: il est encore vrai que le $M'_{0,H'}$-schéma $M'_{n,H'}$ classifie les trivialisations du groupe E'_n. Dans tout ce qui va suivre, on n'utilisera que l'existence du groupe localement libre $\boldsymbol{E}_n$ et le théorème "de Serre-Tate" décrivant $\boldsymbol{E}_\infty$ (et donc $\boldsymbol{E}_n$) sur l'hensélisé de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ en un point géométrique de la fibre spéciale. Tout ce qui suit est donc aussi bien valide dans le cas des courbes $M'_{n,H'}$ qui se prolongent donc en des schémas $\boldsymbol{M}'_{n,H'}$, réguliers, finis et plats au-dessus de $\boldsymbol{M}'_{0,H'}$. Pour éviter des lourdeurs inutiles, nous n'avons écrit que les énoncés relatifs aux $M_{n,H}$.

7.2. *Définition d'une "base de Drinfel'd"*

Soit S un schéma au-dessus de $\boldsymbol{M}_{0,H}$. Il est donc muni d'un groupe $\boldsymbol{E}_n \mid S$, pull-back du groupe $\boldsymbol{E}_n$. C'est un groupe localement libre sur S, de rang q^{2n}. Il est muni d'une action de l'anneau $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$.

Pour P une section sur S du groupe $\boldsymbol{E}_n$, nous noterons [P] le sous S-schéma de $\boldsymbol{E}_n \mid S$ qu'elle définit (son image). Pour (P_i) une famille finie de telles sections, nous noterons $\Sigma[P_i]$ le sous S-schéma de $\boldsymbol{E}_n \mid S$ défini par le faisceau d'idéaux *produit* des faisceaux d'idéaux définissant les $[P_i]$.

DÉFINITION: Une "base de Drinfel'd" sur $\boldsymbol{E}_n \mid S$ (ou une base de Drinfel'd de niveau n sur S) est un homomorphisme de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules:

$$\varphi : (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})^2 \to \operatorname{Mor}(S, \boldsymbol{E}_n)$$

tel que le sous-schéma $\sum_{\alpha \in (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})^2} [\varphi(\alpha)]$ de $\boldsymbol{E}_n \mid S$ coïncide avec $\boldsymbol{E}_n \mid S$.

VARIANTE: Choisissant une base (e_1, e_2) du $(\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)$-module $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})^2$, et posant $P = \varphi(e_1)$, $Q = \varphi(e_2)$, on voit que la donnée d'une base de Drinfel'd de niveau n sur S est équivalente à *la donnée d'un couple* (P, Q) *de sections sur S du groupe* $\boldsymbol{E}_n$ *tel qu'on ait*:

$$\sum_{(\lambda,\mu) \in (\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)^2} [\lambda P + \mu Q] = \boldsymbol{E}_n \mid S.$$

7.3. *Représentabilité*

Considérons le foncteur $\mathfrak{M}_{n,H}$ qui associe à un $\boldsymbol{M}_{0,H}$-schéma S l'ensemble des bases de Drinfel'd de niveau n sur S. Il est clair que ce foncteur prolonge le foncteur $\mathfrak{M}_{n,H}$ défini en (7.1).

Proposition: *Le foncteur* $\mathfrak{M}_{n,H}$ *est représentable par un* $\boldsymbol{M}_{0,H}$*-schéma fini* $\boldsymbol{M}_{n,H}$*. La restriction* $(\boldsymbol{M}_{n,H} \mid M_{0,H})$ *s'identifie à* $M_{n,H}$.

Démonstration: Soit S un $\boldsymbol{M}_{0,H}$-schéma, et soient P et Q deux sections de $\boldsymbol{E}_n$. Le lemme suivant signifie que la condition "P et Q constituent une base de Drinfel'd" est une condition fermée.

Lemme: *Il existe un sous-schéma fermé* S_{Dr} *de* S *vérifiant la condition suivante: pour tout morphisme* $S' \to S$*, les restrictions* P' *et* Q' *de* P *et* Q *à* S' *constituent une base de Drinfel'd sur* S'*, si et seulement si le morphisme de* S' *dans* S *se factorise à travers* S_{Dr}.

Il résultera aussitôt du lemme que $\mathfrak{M}_{n,H}$ est représentable par un sous-schéma fermé du produit fibré $\boldsymbol{E}_n \underset{\boldsymbol{M}_{0,H}}{\times} \boldsymbol{E}_n$, d'où la proposition.

Preuve du lemme: On se ramène facilement à supposer que S est affine, que $\boldsymbol{E}_n$ est libre sur S, et à ne considérer que des S' affines. Soit donc $S = \operatorname{Spec} R$ et choisissons un isomorphisme $\mathcal{O}_{\boldsymbol{E}_n \mid S} \simeq R^{q^{2n}}$. Notons J l'idéal de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{E}_n \mid S}$ définissant le sous-schéma $\sum_{(\lambda,\mu) \in (\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)^2} [\lambda P + \mu Q]$ de $\boldsymbol{E}_n \mid S$. Choisissons un système fini de générateurs $(f') = (f'_1, \ldots, f'_{q^{2n}})$ du sous R-module de $R^{q^{2n}}$ correpondant à J.

Pour R' une R-algèbre, P' et Q' constituent une base de Drinfel'd sur $S' = \operatorname{Spec} R'$ si et seulement si l'idéal:

$$J \underset{R}{\otimes} R' \subset \mathcal{O}_{\boldsymbol{E}_n \mid S} \underset{R}{\otimes} R' = \mathcal{O}_{\boldsymbol{E}_n \mid R'}$$

est *nul*. Cela équivaut au fait que les f'_j aient tous une image nulle dans R'. La conclusion du lemme est donc satisfaite par le sous-schéma S_{Dr} de S défini par l'idéal engendré par les (f'_j). □

7.4. Propriétés locales de $\boldsymbol{M}_{n,H}$

Soit x un point de la fibre spéciale $\boldsymbol{M}_{0,H}(\bar{\kappa})$. Le complété $\widehat{(\boldsymbol{M}_{0,H})}_{(x)}$ de l'hensélisé de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ en x porte alors un groupe $\boldsymbol{E}_\infty$, déformation universelle de $\boldsymbol{E}_\infty \mid x$. Pour S un schéma local complet noetherien de caractéristique résiduelle p au-dessus de ce complété, la définition que nous avons donnée plus haut d'une base de Drinfel'd de niveau n sur S coïncide avec la définition dans (App. 4) d'une base de Drinfel'd de niveau n sur le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module divisible $\boldsymbol{E}_\infty \mid S$.

Soit alors y un point de la fibre spéciale $\boldsymbol{M}_{n,H}(\bar{\kappa})$ qui relève x, et notons encore $\widehat{(\boldsymbol{M}_{n,H})}_{(y)}$ le complété de l'hensélisé. Avec les notations de (App. 5) on obtient donc un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{(\boldsymbol{M}_{n,H})}_{(y)} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Spec}(D_n^{\boldsymbol{E}_\infty \mid x}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{(\boldsymbol{M}_{0,H})}_{(x)} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Spec}(D_0^{\boldsymbol{E}_\infty \mid x}) \end{array}$$

On en déduit la proposition suivante:

PROPOSITION: *Le schéma $\boldsymbol{M}_{n,H}$ est un schéma régulier. Le morphisme de projection de $\boldsymbol{M}_{n,H}$ sur $\boldsymbol{M}_{0,H}$ est fini et plat.*
Le schéma $\boldsymbol{M}_{n,H}$ s'identifie donc au normalisé de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ dans $M_{n,H}$.

Pour $n' \geqslant n$ et $H' \subset H$, la projection de $M_{n',H'}$ sur $M_{n,H}$ s'étend en un morphisme fini et plat de $\boldsymbol{M}_{n',H'}$ sur $\boldsymbol{M}_{n,H}$ (étale si $n = n'$).

Nous noterons $\boldsymbol{M}_n$ la limite projective des $\boldsymbol{M}_{n,H}$, et $\boldsymbol{M}$ la limite projective des $\boldsymbol{M}_n$.

7.5. Actions de groupes

Il est bien clair (d'après la proposition 6.4) que l'action du groupe Γ sur $(E_\infty \mid M)$ se prolonge en une action sur $(\boldsymbol{E}_\infty \mid \boldsymbol{M})$.

Nous allons montrer que l'action sur $(E_\infty^0 \mid M)$ du groupe $G(\mathbf{A}^f)$ s'étend en une action sur $(\boldsymbol{E}_\infty^0 \mid \boldsymbol{M})$. Parce que $G(\mathbf{A}^f)$ est engendré par ses sous-groupes Γ et Δ, il suffit de prolonger l'action de Δ. Notant $\boldsymbol{M}^{(0)}$ l'image réciproque dans $\boldsymbol{M} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$ de la composante $\boldsymbol{M}_0^0$ de $\boldsymbol{M}_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$, on voit qu'il suffit même (parce que Γ permute transitivement les composantes connexes de $\boldsymbol{M}_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$) de prolonger l'action de Δ sur $M^{(0)}$ en une action sur $\boldsymbol{M}^{(0)}$.

Or il résulte de (4.5.1) et des définitions des divers prolongements $\boldsymbol{M}_n$, $\boldsymbol{M}_n'$, $\boldsymbol{E}_\infty$, $\boldsymbol{E}_\infty'$, ... qu'il existe un isomorphisme entre $\boldsymbol{M}^{(0)}$ (muni de $\boldsymbol{E}_\infty$) et l'objet analogue $\boldsymbol{M}'^{(0)}$ (muni de $\boldsymbol{E}_\infty'$) défini en termes de la variété M', lequel isomorphisme se restreint en fibre générale en un isomorphisme:

$$M^{(0)} \simeq M'^{(0)}$$

compatible aux actions des groupes $\Delta \subset \Delta'$. On voit donc que l'assertion précédente se ramène à l'assertion analogue relative à M': *l'action sur $(E_\infty'^0 \mid M')$ du groupe $\tilde{G}$ se prolonge en une action sur $(\boldsymbol{E}_\infty'^0 \mid \boldsymbol{M}')$.*

Cette dernière action se voit en termes modulaires comme il suit (cf. (3.4.4)): soit $\gamma \in \tilde{G}$ tel que γ^{-1} envoie $V_{\hat{\mathbf{Z}}}$ dans $V_{\hat{\mathbf{Z}}}$, et soit $f \in F^{*+}$ (inverse d'un entier) tel que $\nu_1'(\gamma) \in f\hat{\mathbf{Z}}^*$. Soit enfin m (décomposé sous la forme $m'p^{\alpha}$ avec m' premier à p) un entier tel que $\gamma^{-1}V_{\hat{\mathbf{Z}}}$ contienne $mV_{\hat{\mathbf{Z}}}$.

Pour S un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-schéma, la donnée d'un S-point de $\boldsymbol{M}'$ équivaut à la donnée d'une classe d'isomorphie d'objets $(A, \iota, \theta, k^{\mathfrak{p}}, \varphi)$ où

(a) A est un schéma abélien de dimension relative $4d$, muni d'une action ι de l'anneau $\mathcal{O}_D$ (1 agissant par l'identité) tel que les conditions ((a) (i) et (ii)) de 5.2.2 soient vérifiées.

(b) θ est une polarisation de A, d'ordre premier à p, telle que l'involution de Rosati correspondante envoie $\iota(l)$ sur $\iota(l^*)$.

(c) $k^{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme:

$$k^{\mathfrak{p}} = k_p^{\mathfrak{p}} \oplus k^p : T_p^{\mathfrak{p}}(A) \oplus \hat{T}^p(A) \xrightarrow{\sim} W_p^{\mathfrak{p}} \oplus \hat{W}^p$$

(avec k^p symplectique)

(d) Enfin φ est une "base de Drinfel'd de niveau infini", i.e. un homomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules

$$\varphi : \left(F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\right)^2 \to \operatorname{Mor}\left(S, \left(A_{p^{\infty}}\right)_1^{2,1}\right)$$

tel que, pour tout n, la restriction

$$\varphi_n : \left(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\right)^2 \to \operatorname{Mor}\left(S, \left(A_{\mathfrak{p}^n}\right)_1^{2,1}\right)$$

constitue une base de Drinfel'd de niveau n.

Un tel point étant donné, on procède comme suit pour construire son image par l'action de γ.

(1) L'isomorphisme k^p induit un isomorphisme:

$$A_{m'} \simeq m'^{-1}\hat{T}^p(A)/\hat{T}^p(A) \overset{k^p}{\xrightarrow{\sim}} m^{-1}\hat{W}^p/\hat{W}^p$$

Notons alors Λ^p le sous-groupe de $A_{m'}$ image réciproque de $\gamma\hat{W}^p/\hat{W}^p$.

(2) L'isomorphisme $k_p^{\mathfrak{p}}$ induit un isomorphisme

$$\left(A_{p^{\alpha}}\right)_2^2 \oplus \left(A_{p^{\alpha}}\right)_3^2 \oplus \cdots \oplus \left(A_{p^{\alpha}}\right)_r^2 \simeq p^{-\alpha}T_p^{\mathfrak{p}}/T_p^{\mathfrak{p}} \overset{k_p^{\mathfrak{p}}}{\xrightarrow{\sim}} p^{-\alpha}W_p^{\mathfrak{p}}/W_p^{\mathfrak{p}}.$$

Notons $\Lambda_p^{\mathfrak{p},2}$ le sous-groupe image inverse de $\gamma W_p^{\mathfrak{p}}/W_p^{\mathfrak{p}}$.

(3) Le morphisme φ se restreint en un morphisme:

$$\left(p^{-\alpha}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\right)^2 \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Mor}\left(S, \left(A_{p^{\alpha}}\right)_1^{2,1}\right)$$

Notons $\Lambda_{\mathfrak{p}}^{2,1}$ le sous-groupe de $(A_{p^\alpha})_1^{2,1}$ défini par:

$$\Lambda_{\mathfrak{p}}^{2,1} = \sum_{x \in \gamma \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^2/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^2} [\varphi(x)].$$

Notons aussi $\Lambda_{\mathfrak{p}}^{2,2}$ le sous-groupe de $(A_{p^\alpha})_1^{2,2}$ déduit de $\Lambda_{\mathfrak{p}}^{2,1}$ par l'action de l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$.

(4) Soit Λ_p^2 le sous-groupe $\Lambda_{\mathfrak{p}}^{2,1} \oplus \Lambda_{\mathfrak{p}}^{2,2} \oplus \Lambda_p^{\mathfrak{p},2}$ de $(A_{p^\alpha})^2$ et soit Λ_p^1 le sous-groupe de $(A_{p^\alpha})^1$ "orthogonal" de Λ_p^2 pour la dualité de Cartier entre $(A_{p^\alpha})^1$ et $(A_{p^\alpha})^2$. Nous notons aussi $f\Lambda_p^1$ l'image réciproque de Λ_p^1 par le morphisme défini par l'entier f^{-1}.

(5) Nous considérons alors le sous-groupe de A_m:

$$\Lambda = f\Lambda_p^1 \oplus \Lambda_p^2 \oplus \Lambda^p$$

et le schéma abélien quotient $A' = A/\Lambda$. Il est muni d'une action ι' de l'anneau $\mathcal{O}_D$, et on vérifie que le produit $\theta' = f^{-1}\theta$ définit une polarisation θ' de A'.

(6) Il existe un unique isomorphisme $k'^{\mathfrak{p}}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} T_p^{\mathfrak{p}}(A) \oplus \hat{T}^p(A) & \hookrightarrow & T_p^{\mathfrak{p}}(A') \oplus \hat{T}^p(A') \\ \downarrow k^{\mathfrak{p}} & & \downarrow k'^{\mathfrak{p}} \\ W_p^{\mathfrak{p}} \oplus \hat{W}^p & \xhookrightarrow{\gamma^{-1}} & W_p^{\mathfrak{p}} \oplus \hat{W}^p \end{array}$$

(7) Il existe une unique "Base de Drinfel'd de niveau infini" φ' sur A' telle que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} (F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2 & \xrightarrow{\gamma^{-1}} & (F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ \mathrm{Mor}(S, (A_{p^\infty})_1^{2,1}) & \to & \mathrm{Mor}(S, (A'_{p^\infty})_1^{2,1}) \end{array}$$

On vérifie alors sans mal qu'on peut définir une action de $\tilde{G}$ sur $(\boldsymbol{E}'^0_\infty \mid \boldsymbol{M}')$ – prolongeant celle dont on dispose déjà sur $(E'^0_\infty \mid M')$ – telle qu'un élément γ comme ci-dessus envoie le point x représenté par $(A, \iota, \theta, k^{\mathfrak{p}}, \varphi)$ sur le point x' représenté par $(A', \iota', \theta', k'^{\mathfrak{p}}, \varphi')$ et induise au niveau du groupe p-divisible l'isogénie naturelle:

$$\boldsymbol{E}'_\infty \mid x \simeq \left(A_{p^\infty}\right)_1^{2,1} \to \left(A'_{p^\infty}\right)_1^{2,1} \simeq \boldsymbol{E}'_\infty \mid x'.$$

§8. Théorie de Lubin-Tate

Notons $\boldsymbol{\mathscr{M}}_{n,V}$ le normalisé de $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$ dans $\mathscr{M}_{n,V}$, et soit de même $\boldsymbol{\mathscr{M}}'_{n,V'}$ le normalisé dans $\mathscr{M}'_{n,V'}$ de l'anneau des $\mathfrak{p}$-entiers de E. Le but de ce paragraphe est de décrire $\boldsymbol{\mathscr{M}}_{n,V}$ et $\boldsymbol{\mathscr{M}}'_{n,V'}$ en termes modulaires, analogues à la description précédente des courbes $\boldsymbol{M}_{n,H}$.

Plus précisément, nous partons de $\boldsymbol{\mathscr{M}}_{0,V}$, un $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$-schéma fini étale. Nous montrons que les groupes L_n définis en (1.5) se prolongent de façon naturelle en des groupes $\boldsymbol{L}_n$ sur $\boldsymbol{\mathscr{M}}_{0,V}$. Nous décrivons ensuite le $\boldsymbol{\mathscr{M}}_{0,V}$-schéma $\boldsymbol{\mathscr{M}}_{n,V}$ en termes de bases de Drinfel'd sur $\boldsymbol{L}_n$. Des résultats analogues valent pour $\boldsymbol{\mathscr{M}}'_{n,V'}$. Tout ceci n'est d'ailleurs qu'une reformulation simple de la théorie de Lubin-Tate.

8.1. "Bonne réduction" de $\mathscr{M}_{0,V}$ et de $\mathscr{M}'_{0,V'}$

Il résulte de (1.3) que $\mathscr{M}_{0,V}$ est isomorphe au spectre d'une extension abélienne de F non ramifiée en $\mathfrak{p}$. L'anneau des $\mathfrak{p}$-entiers de cette extension constitue alors un $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$-schéma propre et étale qui prolonge $\mathscr{M}_{0,V}$, et c'est bien sûr le seul possible. La proposition qui suit est évidente:

PROPOSITION: *Le F-schéma $\mathscr{M}_{0,V}$ se prolonge en un $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$-schéma propre et étale $\boldsymbol{\mathscr{M}}_{0,V}$ bien défini à un unique isomorphisme près. Pour $V' \subset V$ un sous-groupe d'indice fini, la projection de $\mathscr{M}_{0,V'}$ sur $\mathscr{M}_{0,V}$ se prolonge en un morphisme (fini, étale) de $\boldsymbol{\mathscr{M}}_{0,V'}$ sur $\boldsymbol{\mathscr{M}}_{0,V}$. L'action du groupe $(\mathbf{A}_F^{f,\mathfrak{p}})^*$ sur $\mathscr{M}_0$ se prolonge en une action sur la limite projective $\boldsymbol{\mathscr{M}}_0$ des $\boldsymbol{\mathscr{M}}_{0,V}$.*

De même, il résulte de (3.2.4) que le schéma $\mathscr{M}'_{0,V'}$ se trivialise sur une extension abélienne de E non ramifiée en $\mathfrak{p}$. Il se prolonge donc (uniquement) en un schéma $\boldsymbol{\mathscr{M}}'_{0,V'}$ propre et étale sur l'anneau des $\mathfrak{p}$-entiers de E. On dispose de l'analogue pour les $\boldsymbol{\mathscr{M}}'_{0,V'}$ de la proposition précédente.

8.2. Le groupe L_∞ comme groupe de Lubin-Tate

8.2.1. Soit x un point de la fibre spéciale $\boldsymbol{\mathscr{M}}_0(\bar{\kappa})$. De ce qui précède, il résulte aussitôt que l'hensélisé strict $(\boldsymbol{\mathscr{M}}_0)_{(x)}$ de $\boldsymbol{\mathscr{M}}_0$ en x s'identifie au spectre de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^{nr}$. La fibre générique $(\boldsymbol{\mathscr{M}}_0)_{(x),\eta} = (\boldsymbol{\mathscr{M}}_0)_{(x)} \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} F_\mathfrak{p}$ de cet hensélisé s'identifie donc au spectre de $F_\mathfrak{p}^{nr}$, et la fibre de $\mathscr{M}$ au-dessus de $(\boldsymbol{\mathscr{M}}_0)_{(x),\eta}$ est isomorphe au spectre de $F_\mathfrak{p}^{ab}$. Par définition (1.5) le groupe L_∞ restreint à $(\boldsymbol{\mathscr{M}}_0)_{(x),\eta}$ est alors isomorphe au groupe:

$$L_\infty \,|\, \mathrm{Spec}\, F_\mathfrak{p}^{nr} = \left[\mathrm{Spec}\, F_\mathfrak{p}^{ab} \times \left(F_\mathfrak{p}/\mathcal{O}_\mathfrak{p}\right)\right] / \mathcal{O}_\mathfrak{p}^*$$

où $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*$ agit sur Spec $F_{\mathfrak{p}}^{ab}$ via l'inverse de l'isomorphisme entre $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*$ et $\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}}^{nr})$, et où $g \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*$ agit sur $F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ par multiplication par g^{-1}.

Il en résulte que la fibre générique géométrique $L_\infty \,|\, \mathrm{Spec}\, \overline{F}_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe au $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module constant $F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, où opère le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}^{nr})$ via l'inverse du composé:

$$\mathrm{Gal}\big(\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}^{nr}\big) \to \mathrm{Gal}\big(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}}^{nr}\big) \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*.$$

De (3.2) et (3.3), il résulte que des résultats identiques valent pour le groupe L'_∞.

8.2.2. On renvoie à [Se] pour un exposé de la théorie de Lubin-Tate. Notons LT un groupe de Lubin-Tate pour le corps local $F_{\mathfrak{p}}$: c'est un groupe de Barsotti-Tate, muni d'une action de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, sur Spec $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Le groupe LT dépend du choix d'une uniformisante, mais sa restriction à Spec $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$ n'en dépend pas. Le résultat essentiel de la théorie de Lubin-Tate peut s'exprimer de la façon suivante:

La fibre générique géométrique LT | Spec $\overline{F}_{\mathfrak{p}}$ *est isomorphe au $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module constant $F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, le groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}^{nr})$ *y agissant* ("à droite") *via l'inverse du composé*:

$$\mathrm{Gal}\big(\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}^{nr}\big) \to \mathrm{Gal}\big(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}}^{nr}\big) \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*.$$

8.2.3. Comparant (8.2.1) et (8.2.2) on obtient donc le fait suivant:

La restriction de L_∞ à la fibre générique de l'hensélisé strict de $\mathcal{M}_0$ en un point fermé de sa fibre spéciale est isomorphe à la restriction "du" groupe de Lubin-Tate à Spec $F_{\mathfrak{p}}^{nr}$. *Idem pour le groupe L'_∞.*

8.3. Prolongement des groupes L_n

De ce qui précède, il résulte aussitôt que le groupe L_∞ (resp. L'_∞) se prolonge de façon unique en un groupe de Barsotti-Tate $\boldsymbol{L}_\infty$ (resp. $\boldsymbol{L}'_\infty$) sur $\boldsymbol{\mathcal{M}}_0$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{M}}'_0$), muni d'une action de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

Par des arguments de descente, on obtient comme en (6.5) la:

PROPOSITION: *Il existe une unique façon de prolonger simultanément les groupes $L_{n,V}$ (avec leurs structures de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules) en des groupes finis localement libres $\boldsymbol{L}_{n,V}$ (sur les $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,V}$ correspondants) de telle sorte que restent satisfaites les compatibilités vérifiées par les $L_{n,V}$: pour $V' \subset V$, le groupe $\boldsymbol{L}_{n,V'}$ doit s'identifier au pull-back de $\boldsymbol{L}_{n,V}$ et si V est assez petit, $\boldsymbol{L}_{n,V}$ doit s'identifier au sous-module de $\mathfrak{p}^n$-torsion de $\boldsymbol{L}_{n+1,V}$. L'action du groupe $(\mathbf{A}_F^{f,\mathfrak{p}})^*$ sur le système projectif des $L_{n,V}$ (n fixé) se prolonge alors au système des $\boldsymbol{L}_{n,V}$. Enoncé analogue pour les $L'_{n,V'}$.*

Pour x un point de $\mathcal{M}_{0,V}(\bar{\kappa})$, on définit comme en (6.5) à isomorphisme près le groupe $\boldsymbol{L}_\infty$ sur l'hensélisé strict $(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,V})_{(x)}$. Il résulte alors de (App: 6) et de ce qui précède que:

PROPOSITION: *La restriction de* $\boldsymbol{L}_\infty$ *au complété* $\widehat{(\boldsymbol{M}_{0,V})}_{(x)}$ *est isomorphe à "la" déformation universelle du* $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$*-module divisble* $\boldsymbol{L}_\infty \mid x$. *Même énoncé pour les groupes* L'_∞.

8.4. Bases de Drinfel'd

Fixons un entier $n \geqslant 1$, et soit $V \subset (\mathbf{A}_F^{f,\mathfrak{p}})^*$ un sous-groupe compact ouvert assez petit pour que le groupe $L_{n,V}$ soit défini. Il découle de la définition du groupe $L_{n,V}$ que $\mathcal{M}_{n,V}$, vu comme schéma au-dessus de $\mathcal{M}_{0,V}$, classifie les *trivialisations* du groupe $L_{n,V}$, i.e. les isomorphismes entre $L_{n,V}$ et le $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module constant $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})$.

Soit S un schéma au-dessus de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,V}$. Il est donc muni d'un groupe $\boldsymbol{L}_n \mid S$, pull-back du groupe $\boldsymbol{L}_n = \boldsymbol{L}_{n,V}$ sur $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,V}$. Définissons de façon analogue à (7.2) une *base de Drinfel'd de niveau n sur S* comme la donnée d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules:

$$\varphi : (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p}) \to \operatorname{Mor}(S, \boldsymbol{L}_n)$$

tel que le sous-schéma $\sum_{\alpha \in (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})} [\varphi(\alpha)]$ de $(\boldsymbol{L}_n \mid S)$ coïncide avec $(\boldsymbol{L}_n \mid S)$. Cela équivaut encore à la donnée d'une section P de $\boldsymbol{L}_n$ sur S telle qu'on ait:

$$\sum_{\lambda \in (\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)} [\lambda P] = \boldsymbol{L}_n \mid S.$$

Considérons alors le foncteur $\Omega_{n,V}$ qui associe à un $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,V}$-schéma S l'ensemble des bases de Drinfel'd de niveau n sur S. On voit comme en (7.3) que $\Omega_{n,V}$ est *représentable* par un $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,V}$-schéma fini $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,V}$ (en fait, un sous-schéma fermé de $\boldsymbol{L}_{n,V}$). On voit comme en (7.4) que c'est un schéma régulier: il coïncide donc avec le *normalisé* de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,V}$ dans $\mathcal{M}_{n,V}$. C'est donc bien le schéma que nous avions noté $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,V}$ au début de ce paragraphe.

Tout cela vaut aussi pour les groupes $L'_{n,V'}$ et définit en termes modulaires le schéma $\boldsymbol{\mathcal{M}}'_{n,V'}$.

§9. Mauvaise réduction des courbes $M_{n,H}$: Suite

Parce que $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,\nu(H)}$ est étale au-dessus de $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$, le morphisme $\nu : M_{0,H} \to \mathcal{M}_{0,\nu(H)}$ défini en (1.3) s'étend (uniquement) en un morphisme $\boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{M}_{0,H} \to \boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,\nu(H)}$.

Du caractère fonctoriel de la normalisation, il résulte que le morphisme $\nu: M_{n,H} \to \mathcal{M}_{n,\nu(H)}$ s'étend aussi en un morphisme $\boldsymbol{\nu}: \boldsymbol{M}_{n,H} \to \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,\nu(H)}$. L'objet de ce paragraphe est d'étudier ce dernier morphisme. Pour cela, nous supposerons que H est assez petit pour que le groupe $\boldsymbol{E}_{n,H}$ soit défini, et nous décrivons $\boldsymbol{\nu}$ en termes modulaires. Si toutefois cette condition n'était pas remplie, on s'y ramènerait par des changements de base étales, et les résultats qui suivent seraient tout aussi valides.

On définit de même des morphismes $\boldsymbol{\nu}': \boldsymbol{M}'_{n,H'} \to \boldsymbol{\mathcal{M}}'_{n,\nu'(H')}$. Toute l'étude qui suit du morphisme $\boldsymbol{\nu}$ se répète mot pour mot pour le morphisme $\boldsymbol{\nu}'$. Nous nous dispenserons de le signaler à chaque pas.

9.1. Prolongement de l'accouplement e_n

En (1.6) nous avons défini un morphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-bilinéaire alterné de schémas en groupes sur $M_{0,H}$:

$$e_n: E_n \underset{M_{0,H}}{\times} E_n \to \nu^* L_n.$$

PROPOSITION: *Le morphisme $\boldsymbol{e}_n$ se prolonge (uniquement) en un morphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-bilinéaire alterné*:

$$\boldsymbol{e}_n: \boldsymbol{E}_n \underset{\boldsymbol{M}_{0,H}}{\times} \boldsymbol{E}_n \to \boldsymbol{\nu}^* \boldsymbol{L}_n.$$

DÉMONSTRATION: Parce que $\boldsymbol{M}_{0,H}$ est un schéma régulier et que les groupes considérés sont localement libres, il suffit de prouver l'existence d'un tel prolongement au-dessus d'un ouvert de codimension 2 de $\boldsymbol{M}_{0,H}$. Il nous suffit donc de vérifier qu'un prolongement existe sur l'hensélisé strict en chaque point *ordinaire* de la fibre spéciale $\boldsymbol{M}_{0,H}(\bar{\kappa})$, ou même seulement sur le *complété* de cet hensélisé strict. On est alors ramené, en vertu du "théorème de Serre-Tate" (6.6), à une situation étudiée dans (App. 7). Pour conclure, il suffit de remarquer que deux morphismes $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-bilinéaires alternés *non dégénérés*:

$$E_n \underset{(\boldsymbol{M}_{0,H})_{(x),\eta}}{\times} E_n \to \nu^* L_n \,|\, (\boldsymbol{M}_{0,H})_{(x),\eta}$$

diffèrent nécessairement par l'action sur L_n d'un élément de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*$.

9.2. Interprétation modulaire du morphisme $\boldsymbol{\nu}: \boldsymbol{M}_{n,H} \to \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,\nu(H)}$

Soit S un schéma au-dessus de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ et soit (P, Q) une base de Drinfel'd de niveau n sur S. On associe à une telle donnée le point $\boldsymbol{e}_n(P,$

$Q) \in \boldsymbol{L}_n(S)$, et cela définit un morphisme: $\boldsymbol{M}_{n,H} \to \boldsymbol{L}_{n,\nu(H)}$. Par restriction aux fibres générales, on en déduit un morphisme de $M_{n,H}$ dans $L_{n,\nu(H)}$, qui coïncide visiblement avec le composé du morphisme $\nu: M_{n,H} \to \mathcal{M}_{n,\nu(H)}$ et de l'inclusion de $\mathcal{M}_{n,\nu(H)}$ dans $L_{n,\nu(H)}$. On en déduit aussitôt la:

PROPOSITION: *Soit S un schéma au-dessus de $\boldsymbol{M}_{0,H}$, et soit (P, Q) une base de Drinfel'd de niveau n sur S. Alors $\boldsymbol{e}_n(P, Q)$ constitue une base de Drinfel'd sur $\boldsymbol{L}_n \mid S$. Le morphisme de foncteurs $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,H} \to \Omega_{n,\nu(H)}$ ainsi défini est représentable par le morphisme $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{M}_{n,H} \to \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,\nu(H)}$.*

9.3. Propriétés du morphisme $\boldsymbol{v}$

Ce morphisme est évidemment *propre*. Il est aussi évidemment *plat*.

PROPOSITION: *Le morphisme $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{M}_{n,H} \to \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,\nu(H)}$ est lisse en dehors des points supersinguliers.*

DÉMONSTRATION: Cela résulte de ce qui précède et de (App. 7). $\square$

9.4. Etude de la fibre du morphisme $\boldsymbol{v}$ au-dessus d'un point de la fibre spéciale de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,\nu(H)}$

9.4.1. Soit $x: \operatorname{Spec} \bar{\kappa} \to \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,\nu(H)}$ un tel point. Notons y son image dans $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,\nu(\mathrm{H})}$. Considérons alors les produits fibrés.

$$C = \boldsymbol{M}_{n,H} \underset{\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,\nu(H)} \swarrow x}{\times} \operatorname{Spec} \bar{\kappa}$$

$$C' = \boldsymbol{M}_{n,H} \underset{\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,\nu(H)} \swarrow y}{\times} \operatorname{Spec} \bar{\kappa}$$

$$C_0 = \boldsymbol{M}_{0,H} \underset{\boldsymbol{\mathcal{M}}_{0,\nu(H)} \swarrow y}{\times} \operatorname{Spec} \bar{\kappa}$$

On voit en utilisant ce qui précède (rappelons en particulier que les fibres géométriques du morphisme ν sont connexes) et en faisant usage du théorème de connexion de Zariski (cf. par ex. [D.M.]) que:
- le $\bar{\kappa}$-schéma C_0 est une courbe propre lisse et connexe.
- le $\bar{\kappa}$-schéma C est une courbe propre et connexe, et lisse en dehors des points supersinguliers (un ensemble fini). Elle est en particulier réduite.
- On dispose de morphismes de $\bar{\kappa}$-schémas:

$$C \to C' \to C_0$$

Et C s'identifie à la *réduction* C'_{red} de C' (via le premier morphisme).

Nous noterons aussi C^{ord} (resp. C'^{ord}, resp. C_0^{ord}) l'ouvert de C (resp. C', resp. C_0) obtenu en ôtant les points supersinguliers.

9.4.2. Soit S un $\bar{\kappa}$-schéma – il est donc muni, via x, d'un groupe $\boldsymbol{L}_n \mid S$ et d'une base de Drinfel'd universelle $t \in \operatorname{Mor}(S, \boldsymbol{L}_n)$, (laquelle n'est autre que la section *nulle*).

La donnée d'un S-point de C' (resp. de C) équivaut alors à la donnée:

(1) d'un S-point de C_0

(2) d'une base de Drinfel'd (P, Q) de $\boldsymbol{E}_n(S)$ (resp. telle qu'on ait: $\boldsymbol{e}_n(P, Q) = 0$).

Prenons en particulier $S = \operatorname{Spec} \bar{\kappa}$ et choisissons un S-point ordinaire dans C_0. Le groupe $\boldsymbol{E}_n(S)$ est alors isomorphe au groupe $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$, et la donnée d'un point de C (ou C') relevant le point considéré revient à la donnée d'un morphisme surjectif: $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2 \to (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$. Le noyau de ce morphisme est alors un facteur direct de rang 1 dans le $(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$-module $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$.

Pour un $\bar{\kappa}$-point supersingulier de C_0, le groupe $\boldsymbol{E}_n(\bar{\kappa})$ est nul. Le revêtement $C \to C_0$ est donc *complètement ramifié* en chaque point supersingulier.

9.4.3. Soit $A \in \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$ un facteur direct de rang 1 dans le $(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$-module $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$. *Nous définissons alors un sous-schéma fermé C_A de C par la condition* $\varphi \mid A = 0$ (où φ désigne la base de Drinfel'd universelle sur C).

Il est clair, d'après ce qui précède, que C *est la réunion des C_A*. Posant $C_A^{\text{ord}} = C_A \cap C^{\text{ord}}$, *on voit aussi que C^{ord} est la réunion disjointe des C_A^{ord}*. Les C_A sont des courbes permutées entre elles par l'action du groupe $GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$.

Il en résulte *l'existence de points supersinguliers*: sans quoi $C = \coprod C_A$ serait disconnexe.

9.4.4. Les C_A sont des courbes *connexes*. Dans le cas contraire, en effet, on en déduirait l'existence de plusieurs points supersinguliers de C au-dessus d'un même point supersingulier de C_0. Il résulte de (App. 8) qu'elles sont *lisses* en leurs points supersinguliers, donc partout. On a donc prouvé la

PROPOSITION: *Les C_A définies en* (9.4.3) *sont les composantes irréductibles de C. Elles sont lisses, ne se coupent qu'en les points supersinguliers, et se rencontrent toutes au-dessus de chaque point supersingulier de C_0.*

9.5. Remarque

Les composantes C_A définies ci-dessus ne sont *jamais des droites projectives*. Pour le voir, on considère un sous-groupe $H_1 \subset H$ assez petit et un point x_1 de $\mathscr{M}_{n,\nu(H_1)}$ qui relève x. La fibre C_1 de $\boldsymbol{M}_{n,H_1}$ au-dessus de x_1 constitue alors un revêtement étale non trivial de C. Pour $A \in \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)$, la courbe $C_{1,A}$ constitue alors un revêtement étale connexe non trivial de C_A.

On en déduit alors que $\boldsymbol{M}_{n,H}$ constitue le *modèle minimal* sur $\mathscr{M}_{n,\nu(H)}$ du $\mathscr{M}_{n,\nu(H)}$-schéma $M_{n,H}$. (cf. [L][S] et [D.M.]).

§10. Relation de congruence

10.1. Préliminaires

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la réduction $(\boldsymbol{M} \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} \bar{\kappa})_{\text{red}}$ de la fibre spéciale du $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-schéma $\boldsymbol{M}$. Nous considèrerons aussi, en utilisant la notation de Langlands (dans [La]) la fibre spéciale du $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-schéma $\boldsymbol{M}_{n,H} \overline{\otimes} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$, *normalisé de* $\boldsymbol{M}_{n,H} \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$, et nous la noterons $\boldsymbol{M}_{n,H} \overline{\otimes} \bar{\kappa}$. Soit aussi $\boldsymbol{M}_n \overline{\otimes} \bar{\kappa}$ la limite projective des $\boldsymbol{M}_{n,H} \overline{\otimes} \bar{\kappa}$ et $\boldsymbol{M} \overline{\otimes} \bar{\kappa}$ la limite projective des $\boldsymbol{M}_n \overline{\otimes} \bar{\kappa}$. Les schémas $\boldsymbol{M}_{n,H} \overline{\otimes} \bar{\kappa}$, $\boldsymbol{M}_n \overline{\otimes} \bar{\kappa}$ et $\boldsymbol{M} \overline{\otimes} \bar{\kappa}$ sont munis d'actions du groupe $W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p})$, et sur le dernier opère le groupe $G(\mathbf{A}^f)$, action qui se relève au groupe p-divisible à isogénie près $\boldsymbol{E}_\infty^0$. On a:

$$\boldsymbol{M}_{n,H} \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^n = \boldsymbol{M}_{n,H} \underset{\mathscr{M}_{n,\nu(H)}}{\times} \left(\mathscr{M}_{n,\nu(H)} \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^n\right).$$

Le schéma $\mathscr{M}_{n,\nu(H)} \underset{F_\mathfrak{p}}{\otimes} F_\mathfrak{p}^n$ est la réunion disjointe, indexée par l'ensemble des composantes connexes géométriques de $\mathscr{M}_{n,\nu(H)}$ (ou, ce qui revient au même, de $M_{n,H}$) de copies de Spec $F_\mathfrak{p}^n$. A chacune de ces composantes correspond un morphisme s: Spec $F_\mathfrak{p}^n \to \mathscr{M}_{n,\nu(H)}$, lequel se prolonge en un morphisme, encore noté s, de Spec $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$ vers $\boldsymbol{M}_{n,\nu(H)}$. Il est clair que le normalisé de $\mathscr{M}_{n,\nu(H)} \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$ s'identifie à la réunion disjointe, indexée par les composantes connexes géométrique de $\mathscr{M}_{n,\nu(H)}$, de copies de Spec $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$.

La réunion disjointe:

$$\coprod_s \boldsymbol{M}_{n,H} \underset{\mathscr{M}_{n,\nu(H)} \swarrow s}{\times} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$$

est, d'après (7.4), un schéma *régulier*, et elle coïncide donc avec $\boldsymbol{M}_{n,H} \overline{\otimes} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$. Ce dernier est donc une réunion disjointe de composantes qui prolongent les composantes connexes de $M_{n,H} \otimes F_\mathfrak{p}^n$, et dont chacune constitue d'après (9.5) le *modèle minimal* de la composante correspondante.

On obtient alors la fibre spéciale $M_{n,H}\overline{\otimes}\bar{\kappa}$ comme la réunion disjointe:

$$\coprod_s M_{n,H} \underset{\mathscr{M}_{n,\nu(H)} \swarrow}{\times} \operatorname{Spec}\bar{\kappa}$$

et c'est, d'après (9.3), un schéma réduit, et lisse en dehors des points supersinguliers.

La fibre spéciale réduite $(\mathscr{M}_n \underset{\mathscr{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} \bar{\kappa})_{\text{red}}$ s'obtient à partir de celle du normalisé de $\mathscr{M}_n \underset{\mathscr{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} \mathscr{O}_\mathfrak{p}^n$ en identifiant les points tels que les s correspondants aient même restriction à Spec $\mathscr{O}_\mathfrak{p}^{nr}$. On voit donc que $M_n\overline{\otimes}\bar{\kappa}$ apparaît comme un produit fibré:

$$\begin{array}{ccc} M_n\overline{\otimes}\bar{\kappa} & \to & \pi_0(M_n\overline{\otimes}\bar{\kappa}) \simeq \pi_0(M_n \otimes F_\mathfrak{p}^{ab}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M_n \otimes \bar{\kappa})_{\text{red}} & \to & \pi_0(M_n \otimes \bar{\kappa}) \simeq \pi_0(M_0 \otimes \bar{\kappa}) \simeq \pi_0(M_0 \otimes F_\mathfrak{p}^{ab}) \end{array}$$

On retiendra de cela que, pour qu'un élément du groupe produit $G(\mathbf{A}^f) \times W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p})$ agisse trivialement sur une composante de $M\overline{\otimes}\bar{\kappa}$, il faut et il suffit qu'il agisse trivialement sur la projection de ladite composante sur $(M \otimes \bar{\kappa})_{\text{red}}$ et qu'il respecte la composante correspondante de $M \otimes F_\mathfrak{p}^{ab}$.

10.2. Comparaison

Tout ce qui vient d'être dit pour M vaut mot pour mot pour M': on définit de même $M'_{n,H'}\overline{\otimes}\mathscr{O}_\mathfrak{p}^n$, $M'_{n,H'}\overline{\otimes}\bar{\kappa}$, $M'_n\overline{\otimes}\bar{\kappa}$, $M'\overline{\otimes}\bar{\kappa}$.

Notons $(M\overline{\otimes}\mathscr{O}_\mathfrak{p}^{ab})^0$ la composante de $M\overline{\otimes}\mathscr{O}_\mathfrak{p}^{ab}$ (limite projective des $(M_{n,H}\overline{\otimes}\mathscr{O}_\mathfrak{p}^n)$) qui correspond à la composante neutre de $M \otimes F_\mathfrak{p}^{ab}$. Cette composante est munie d'une action de l'extension $\mathscr{E}_\mathfrak{p}$, et il en est donc de même pour sa réduction $(M\overline{\otimes}\bar{\kappa})^0 \subset M\overline{\otimes}\bar{\kappa}$. On définit de même $(M'\overline{\otimes}\mathscr{O}_\mathfrak{p}^{ab})^0$ et $(M'\overline{\otimes}\bar{\kappa})^0$, avec une action de l'extension $\mathscr{E}'_\mathfrak{p}$. Utilisant la comparaison fondamentale (4.2.3) et l'unicité des modèles minimaux et des prolongements de groupes p-divisibles, on construit alors un isomorphisme entre $(M\overline{\otimes}\mathscr{O}_\mathfrak{p}^{ab})^0$ et $(M'\overline{\otimes}\mathscr{O}_\mathfrak{p}^{ab})^0$ qui se relève aux groupes p-divisibles et qui est compatible à l'action des groupes $\mathscr{E}_\mathfrak{p} \subset \mathscr{E}'_\mathfrak{p}$. D'où la:

PROPOSITION: *Il existe un isomorphisme entre les systèmes* $(E_\infty \mid (M\overline{\otimes}\bar{\kappa})^0)$ *et* $(E'_\infty \mid (M'\overline{\otimes}\bar{\kappa})^0)$, *compatible à l'action des extensions* $\mathscr{E}_\mathfrak{p} \subset \mathscr{E}'_\mathfrak{p}$.

10.3. Relation de congruence

Soit A un sous-espace de rang 1 dans $F_\mathfrak{p}^2$. Pour tout entier n, nous notons alors $A_n = (A \cap (\mathfrak{p}^{-n})^2)/\mathscr{O}_\mathfrak{p}^2$. C'est un facteur direct de rang 1 dans le $(\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)$-module $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})^2$. Nous lui associons comme en (9.4.3) le sous-schéma fermé $(\boldsymbol{M}_n \otimes \bar{\kappa})_A$ de $(\boldsymbol{M}_n \otimes \bar{\kappa})_{\mathrm{red}}$ défini par l'équation:

$$\varphi_n \mid A_n = 0,$$

où φ_n désigne la base de Drinfel'd universelle sur $\boldsymbol{M}_n \otimes \bar{\kappa}$. Il est clair (cf. 9.4.3) que ces sous-schémas recouvrent $(\boldsymbol{M}_n \otimes \bar{\kappa})_{\mathrm{red}}$, et ne se recontrent deux à deux qu'en leurs points supersinguliers. La projection de $\boldsymbol{M}_{n+1} \otimes \bar{\kappa}$ sur $\boldsymbol{M}_n \otimes \bar{\kappa}$ envoie $(\boldsymbol{M}_{n+1} \otimes \bar{\kappa})_A$ sur $(\boldsymbol{M}_n \otimes \bar{\kappa})_A$; nous notons $(\boldsymbol{M} \otimes \bar{\kappa})_A$ le sous-schéma fermé de $(\boldsymbol{M} \otimes \bar{\kappa})_{\mathrm{red}}$ limite projective des $(\boldsymbol{M}_n \otimes \bar{\kappa})_A$.

Nous notons de même $(\boldsymbol{M}_n \overline{\otimes} \bar{\kappa})_A$ l'image réciproque dans $\boldsymbol{M}_n \overline{\otimes} \bar{\kappa}$ de $(\boldsymbol{M}_n \otimes \bar{\kappa})_A$, et $(\boldsymbol{M} \overline{\otimes} \bar{\kappa})_A$ la limite projective des $(\boldsymbol{M}_n \overline{\otimes} \bar{\kappa})_A$.

Pour fixer les idées, supposons que A est le premier facteur $F_\mathfrak{p}$ dans $F_\mathfrak{p}^2$ $\left(\text{formé des vecteurs de la forme } \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, et notons alors U le sous-groupe du produit $GL_2(F_\mathfrak{p}) \times W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p})$ formé des éléments de la forme $\left(\begin{pmatrix} [\sigma] & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma\right)$ (c'est un sous-groupe du groupe J de (4.3.1)). Nous énonçons alors sous deux formes – équivalentes d'après (10.1) – notre relation de congruence.

Proposition: *Soit* $u = \left(\begin{pmatrix} [\sigma] & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma\right)$ *un élément de U et soit $n(u)$ la valuation de $[\sigma]^{-1}$ dans $F_\mathfrak{p}^*$. Alors l'action de u stabilise chaque point x de $(\boldsymbol{M} \overline{\otimes} \bar{\kappa})_A$ et induit sur $\boldsymbol{E}_\infty^0 \mid x$ la puissance $n(u)$-ième du Frobenius absolu F_q.*

Variante: *u stabilise chaque point x de $(\boldsymbol{M} \otimes \bar{\kappa})_A$ et induit sur $\boldsymbol{E}_\infty^0 \mid x$ la puissance $n(u)$-ième du Frobenius absolu F_q.*

Remarque: Pour $u = \left(\begin{pmatrix} [\sigma] & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma\right)$ avec $\sigma \in W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p}^{nr})$ et $x \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$, la proposition précédente est évidente. Tout revient donc à la prouver pour un élément de la forme:

$$u = \left(\begin{pmatrix} \mathfrak{p}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^{-1}\right)$$

avec σ un élément de Frobenius géométrique.

10.4. Démonstration: On définit de même des sous-schémas fermés $(\boldsymbol{M}' \otimes \bar{\kappa})_A$ (resp. $(\boldsymbol{M}' \overline{\otimes} \bar{\kappa})_A$) de $(\boldsymbol{M}' \otimes \kappa)_{\mathrm{red}}$ (resp. $\boldsymbol{M}' \overline{\otimes} \bar{\kappa}$), et on énonce de façon évidente la "relation de congruence" correspondante, où U apparaît maintenant comme le sous-groupe de J' formé des triples $(g, t, \sigma) \in GL_2(F_\mathfrak{p}) \times \mathbf{Q}_p^* \times W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p})$ avec $g = \begin{pmatrix} [\sigma] & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $t = N_{F_\mathfrak{p}/\mathbf{Q}_p}([\sigma])$. Il résulte alors de la comparaison (10.2), et du fait que le groupe Γ, qui commute à U, permute transitivement les composantes connexes de $M \otimes F_{\mathfrak{p}}^{ab}$, qu'il suffit de prouver la relation de congruence pour M'. En vertu de la remarque (10.3), il suffit de montrer qu'un élément de J' de la forme:

$$u' = \left(\begin{pmatrix} \mathfrak{p}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, q^{-1}, \sigma^{-1} \right)$$

avec σ un élément de Frobenius géométrique, stabilise chaque point x de $(\boldsymbol{M}' \otimes \bar{\kappa})_A$ et induit sur $\boldsymbol{E}'_\infty \mid x$ le Frobenius absolu F_q. Par densité, on peut même supposer que x est un point fermé ordinaire.

La donnée d'un tel point x équivaut à la donnée d'une classe d'isomorphie d'objets $(A, \iota, \theta, k^{\mathfrak{p}}, \varphi)$ comme en (7.5). Le groupe $\boldsymbol{E}'_\infty \mid x \simeq (A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1}$ est alors extension d'un groupe ind-étale isomorphe à $F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ par un groupe formel isomorphe au groupe de Lubin-Tate $\mathrm{LT} \mid \bar{\kappa}$. La structure de niveau infini φ est une surjection:

$$\varphi : (F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2 \to (A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1}(\bar{\kappa}) \simeq F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$$

de restriction triviale au premier facteur $F_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, et bijective sur le second facteur.

On calcule alors l'image de x par l'action de $\begin{pmatrix} \mathfrak{p}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ au moyen de (7.5): les groupes Λ^p et $\Lambda_p^{\mathfrak{p},2}$ sont nuls, et le groupe $\Lambda_{\mathfrak{p}}^{2,1}$ est alors le sous-groupe radiciel $q[0]$ de $(A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1}$. Ce dernier groupe est aussi le noyau du Frobenius relatif

$$F_{q/\bar{\kappa}} : (A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1} \to \left[(A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1} \right] \cdot \sigma.$$

On déduit alors de (7.5) que le point x' image de x est le point $x' = (A', \iota', \theta', k'^{\mathfrak{p}}, \varphi')$ déduit de x par l'action de σ et que le morphisme de $\boldsymbol{E}'_\infty \mid x$ dans $\boldsymbol{E}'_\infty \mid x'$ déduit de l'action de $\begin{pmatrix} \mathfrak{p}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donné par le Frobenius relatif $F_{q/\bar{\kappa}}$. Par l'action de σ^{-1}, on retrouve ensuite le point x initial, et l'action sur $\boldsymbol{E}'^0_\infty \mid x$ est donnée par le Frobenius absolu F_q.

§11. L'orbite supersingulière

11.1. Préliminaires

11.1.1. Notons $\underline{S}$ l'ensemble des points géométriques algébriques supersinguliers de $\boldsymbol{M} \otimes \bar{\kappa}$. Cet ensemble est muni d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel de hauteur 2, restriction de $\boldsymbol{E}_\infty$, et du $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel à isogénie près correspondant $\boldsymbol{E}^0_\infty$.

L'ensemble S est muni d'une action du groupe $G(\mathbf{A}^f)$, laquelle action se relève en une action sur $\boldsymbol{E}_\infty^0 \mid S$. Il est clair que l'action du facteur $GL_2(F_\mathfrak{p})$ de $G(\mathbf{A}^f)$ est triviale en restriction au sous-groupe $SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. Elle est donc aussi triviale sur le sous-groupe distingué de $GL_2(F_\mathfrak{p})$ engendré par $SL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$, à savoir $SL_2(F_\mathfrak{p})$. On voit donc que l'action de $GL_2(F_\mathfrak{p})$ sur $(\boldsymbol{E}_\infty^0 \mid S)$ se factorise via $\det : GL_2(F_\mathfrak{p}) \to F_\mathfrak{p}^*$. *L'action du groupe $G(\mathbf{A}^f)$ se factorise donc à travers son quotient* $\Gamma \times F_\mathfrak{p}^*$.

11.1.2. Soit $\bar{B}$ l'algèbre de quaternions de centre F qu'on obtient à partir de B en changeant les invariants à la place $\mathfrak{p}$ et à la place τ_1 ($\bar{B}$ est donc ramifiée à ces deux places). Nous désignons par $\bar{G}$ (une forme tordue intérieure de G) le groupe $\mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(\bar{B}^*)$. Le centre de $\bar{G}$ s'identifie naturellement au centre Z de G.

Notons $\bar{B}_\mathfrak{p} \underset{\text{def}}{=} \bar{B} \underset{F}{\otimes} F_\mathfrak{p}$ (le corps de quaternions de centre $F_\mathfrak{p}$). Fixons un isomorphisme $\bar{B} \otimes \mathbf{A}_F^{f,\mathfrak{p}} \simeq B \otimes \mathbf{A}_F^{f,\mathfrak{p}}$ (un tel isomorphisme est bien défini à conjugaison près et les résultats qui suivent ne dépendent pas du choix effectué). Le groupe $\bar{G}(\mathbf{A}^f)$ s'identifie alors au produit $\Gamma \times \bar{B}_\mathfrak{p}^*$, et il se projette donc, via la norme réduite $\bar{\nu} : \bar{B}_\mathfrak{p}^* \to F_\mathfrak{p}^*$, sur le groupe $\Gamma \times F_\mathfrak{p}^*$. Cette projection envoie isomorphiquement le sous-groupe $Z(\mathbf{Q})^\wedge \bar{G}(\mathbf{Q})$ sur un sous-groupe de $\Gamma \times F_\mathfrak{p}^*$.

11.1.3. Rappelons enfin (cf. App. 2) que tous les $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules formels à isogénie près de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$ sont isomorphes entre eux. L'algèbre des endomorphismes d'un tel $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module est isomorphe à l'algèbre $\bar{B}_\mathfrak{p}$ (isomorphisme bien défini à un automorphisme intérieur de $\bar{B}_\mathfrak{p}$ près). Le groupe des automorphismes d'un tel objet est donc isomorphe à $\bar{B}_\mathfrak{p}^*$. *Nous considérons l'action à droite correspondante*: un élément $z \in F_\mathfrak{p}^*$ du centre agit donc par z^{-1}.

11.2. Description de l'orbite supersingulière

PROPOSITION: *L'action sur S du groupe $\Gamma \times F_\mathfrak{p}^*$ est transitive. Le stabilisateur d'un point $s \in S$ est conjugué dans $\Gamma \times F_\mathfrak{p}^*$ au sous-groupe $Z(\mathbf{Q})^\wedge \bar{G}(\mathbf{Q})$ (plongé dans $\Gamma \times F_\mathfrak{p}^*$ comme en* (11.1.2)). *Ce stabilisateur opère sur $\boldsymbol{E}_\infty^0$ via le composé de la projection de $Z(\mathbf{Q})^\wedge \bar{G}(\mathbf{Q}) \subset \bar{G}(\mathbf{A}^f) = \bar{B}_\mathfrak{p}^* \times \Gamma$ sur $\bar{B}_\mathfrak{p}^*$ et d'une action à droite de $\bar{B}_\mathfrak{p}^*$ sur $\boldsymbol{E}_\infty^0$ comme en* (11.1.3).

REMARQUES:
(1) Il est clair que la proposition précédente détermine à isomorphisme près le système $(\boldsymbol{E}_\infty^0 \mid S)$, muni de l'action du groupe $G(\mathbf{A}^f)$.
(2) Le système $(\boldsymbol{E}_\infty^0 \mid S)$ est aussi muni d'une action du groupe $W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p})$, et cette dernière est entièrement déterminée par ce qui précède et par la "relation de congruence" (10.3): l'élément $([\sigma], \sigma) \in F_\mathfrak{p}^* \times W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p})$ agit trivialement sur S et induit sur $\boldsymbol{E}_\infty^0 \mid S$ la puissance $n(\sigma)$-ième du Frobenius absolu (avec $n(\sigma)$ la valuation de $[\sigma]^{-1}$).

(3) Il résulte de la proposition que l'ensemble des points supersinguliers de $\boldsymbol{M}_{0,H}$ est en bijection avec l'ensemble des doubles classes:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{0,H}^{SS} &\simeq \overline{G}(\mathbf{Q})\backslash\Gamma \times F_{\mathfrak{p}}^{*}/H \times \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{*}\\ &\simeq \overline{G}(\mathbf{Q})\backslash\overline{G}(\mathbf{A}^{f})/H \times \mathcal{O}_{\overline{B}_{\mathfrak{p}}}^{*}.\end{aligned}$$

Du fait que $\overline{G}_{\mathbf{R}}^{\mathrm{der}}$ est anisotrope, on retrouve donc que cet ensemble est bien fini.

(4) *Variante*: Au lieu de S, on peut considérer S_0, ensemble des points supersinguliers (géométriques algébriques) de $\boldsymbol{M} \otimes \bar{\kappa}$ (ou, ce qui revient au même, de $\boldsymbol{M}_0 \otimes \bar{\kappa}$). Le groupe $G(\mathbf{A}^f)$ agit encore sur S_0, maintenant à travers le quotient $\Gamma \times \mathbf{Z}$ (où la flèche de $\overline{B}_{\mathfrak{p}}^{*}$ sur $\mathbf{Z}$ est la valuation de la norme réduite). La proposition précédente est alors visiblement équivalente à la

PROPOSITION: *L'action sur S_0 du groupe $\Gamma \times \mathbf{Z}$ est transitive. Le stabilisateur d'un point $s_0 \in S_0$ est conjugué dans $\Gamma \times \mathbf{Z}$ au sous-groupe $Z(\mathbf{Q})^{\wedge}\overline{G}(\mathbf{Q})$, et ce dernier opère comme précédemment sur $\boldsymbol{E}_{\infty}^{0} \mid s_0$.*

11.3. Où l'on se ramène à M'

Il résulte de ce que le groupe Γ permute transitivement les composantes connexes de $\boldsymbol{M}_0 \otimes \bar{\kappa}$ et de la comparaison (10.2) qu'il suffit pour prouver la proposition précédente (ou sa variante) de montrer que:

(i) Le groupe $\tilde{G}$ agit transitivement sur l'ensemble S_0' des points supersinguliers de $\boldsymbol{M}' \otimes \bar{\kappa}$.

(ii) Soit $s \in S_0'$. Le stabilisateur Δ_s de s dans le groupe $\Delta \subset \Delta' \subset \tilde{G}$ est alors conjugué par un élément de $G''(\mathbf{A}^f)$ au sous-groupe de Δ, image réciproque du sous-groupe $\overline{G}(\mathbf{Q})$ de $\Gamma \times \mathbf{Z}$.

(iii) Ce stabilisateur opère sur $\boldsymbol{E}_{\infty}^{\prime 0} \mid s$, via son quotient $\overline{G}(\mathbf{Q})$, comme prédit dans la proposition (11.2).

Les points de S_0' correspondent bijectivement aux classes d'isomorphie de systèmes $(A, \iota, \theta, k^{\mathfrak{p}})$ où

a) A une variété abélienne de dimension $4d$ sur $\bar{\kappa}$, munie d'une action ι de l'anneau $\mathcal{O}_D$ (1 agissant par l'identité), telle que $(A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel de hauteur 2 et telle que les $(A_{\mathfrak{p}^\infty})_i^2$ soient étales.

b) θ est une polarisation de A, d'ordre premier à p, telle que l'involution de Rosati correspondante envoie $\iota(l)$ sur $\iota(l^*)$.

c) $k^{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme:

$$k^{\mathfrak{p}} = k_p^{\mathfrak{p}} \oplus k^p : T_p^{\mathfrak{p}}(A) \oplus \hat{T}^p(A) \to W_p^{\mathfrak{p}} \oplus \hat{W}^p$$

avec $k_p^{\mathfrak{p}}$ linéaire et k^p symplectique.

Il sera en fait plus commode d'inverser la procédure de (2.6) et de décrire S_0' en termes de variétés abéliennes à isogénie près. Pour cela, on procède comme suit. Fixons pour commencer un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel Σ de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$ (il est unique à isomorphisme près). A un point $(A, \iota, \theta, k^{\mathfrak{p}})$ comme ci-dessus, on associe $(A^0, \iota^0, \bar{\theta}^0, k^{0\mathfrak{p}}, \bar{\varphi})$ où A^0 est la variété abélienne à isogénie près déduite de A, ι^0 est l'action de D^* sur A^0 déduite de ι, $\bar{\theta}^0$ est la polarisation *homogène* de A^0 déduite de θ, et $k^{0\mathfrak{p}}$ est l'isomorphisme

$$V_p^{\mathfrak{p}}(A) \oplus \hat{V}^p(A) \xrightarrow{\sim} V_p^{\mathfrak{p}} \oplus \hat{V}^p$$

déduit de $k^{\mathfrak{p}}$. Enfin, $\bar{\varphi}$ est la classe modulo Aut Σ d'isomorphismes: $(A^0_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1} \xrightarrow[\sim]{\varphi} \Sigma^0$ déduite d'un quelconque isomorphisme entre $(A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1}$ et Σ. On laisse au lecteur le soin de vérifier, par des arguments habituels analogues à (2.6), que réciproquement, la donnée de $(A^0, \iota^0, \bar{\theta}^0, k^{0\mathfrak{p}}, \bar{\varphi})$ permet de reconstituer uniquement le point $(A, \iota, \theta, k^{\mathfrak{p}})$.

Changeant de notations, et notant maintenant A au lieu de A^0, etc., il en résulte facilement que *les points de S_0' correspondent bijectivement aux classes d'isomorphie de systèmes* $(A, \iota, \bar{\theta}, k^{\mathfrak{p}}, \bar{\varphi})$ où:

(a) A est une variété abélienne à isogénie près de dimension $4d$ sur $\bar{\kappa}$, munie d'une action ι de D (1 agissant par l'identité), telle que $(A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel de hauteur 2 à isogénie près et telle que les $(A_{\mathfrak{p}^\infty})_i^2$ (pour $i \geqslant 2$) soient ind-étales.

(b) $\bar{\theta}$ est une polarisation homogène de A, telle que l'involution associée envoie $\iota(l)$ sur $\iota(l^*)$.

(c) $k^{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme linéaire

$$k^{\mathfrak{p}} = k_p^{\mathfrak{p}} \oplus k^p : V_p^{\mathfrak{p}}(A) \oplus \hat{V}^p(A) \xrightarrow{\sim} V_p^{\mathfrak{p}} \oplus \hat{V}^p$$

avec k^p une similitude symplectique (de rapport dans $\mathbf{A}^{f,p}(1)$).

(d) $\bar{\varphi}$ est une classe modulo Aut Σ d'isomorphismes

$$\varphi : \left(A_{\mathfrak{p}^\infty}\right)_1^{2,1} \xrightarrow{\sim} \Sigma^0.$$

Il est alors facile de décrire en ces termes l'action du groupe $\tilde{G}$: soit $\gamma \in \tilde{G}$, et soit $f \in F^{*+}$ tel que $\nu_1'(\gamma) \in f(\mathbf{A}^f)^*$. Soit d'autre part Π_Σ une $\bar{\kappa}$-isogénie de Σ de hauteur q (bien définie modulo Aut Σ). En termes de l'action de $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$ sur Σ^0 (bien définie à un automorphisme près), on peut prendre pour Π_Σ une uniformisante de $\bar{B}_{\mathfrak{p}}$. Notons enfin $\gamma_{\mathfrak{p}}$ la composante de γ sur le facteur $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ – définie par l'action de γ sur $(V_p)_1^{2,1}$. *Alors l'action de γ envoie le point $x = (A, \iota, \bar{\theta}, k^{\mathfrak{p}}, \bar{\varphi})$ sur le point $x' = (A, \iota, f^{-1}\bar{\theta}, \gamma^{-1} \circ k^{\mathfrak{p}}, \Pi_\Sigma^{-\mathrm{val}\det\gamma_{\mathfrak{p}}}\bar{\varphi})$. Le relèvement de cette action au groupe $\boldsymbol{E}_\infty'^0$ est donnée par l'isomorphisme évident*:

$$\boldsymbol{E}_\infty'^0 \mid x \simeq \left(A_{\mathfrak{p}^\infty}\right)_1^{2,1} \simeq \boldsymbol{E}_\infty'^0 \mid x'.$$

11.4. Application du théorème de Tate-Honda

11.4.1. La transitivité de l'action sur S_0' du groupe $\tilde{G}$ (et même du groupe plus petit $G'(\mathbf{A}^f)$) résultera, d'après ce qui précède, de l'unicité à isomorphisme près d'un triple $(A, \iota, \bar{\theta})$ vérifiant les conditions (a), (b), (c) précédentes. Nous allons maintenant prouver cette unicité en faisant usage du théorème de Tate-Honda (cf. [Br]). Remarquons que l'existence d'un tel triple résulte de (9.4.3); on pourrait aussi le construire directement, en utilisant Tate-Honda.

11.4.2. Soit donc $(A, \iota, \bar{\theta})$ comme plus haut, et fixons une extension finie $\kappa' \subset \bar{\kappa}$ de κ assez grosse pour que le triple $(A, \iota, \bar{\theta})$ y soit défini, ainsi que tous les $\bar{\kappa}$-endomorphismes de A.

Notons $q' = q^{\alpha}$ le cardinal de κ', et soit $\pi \in \operatorname{End} A$ l'endomorphisme de Frobenius relatif à κ'. Il résulte du théorème de Tate-Honda que l'algèbre $\mathbf{Q}[\pi]$ est le centre de l'algèbre (semi-simple) End A. Désignant par $\operatorname{End}_D A$ le commutant de D dans End A, nous avons le diagramme d'inclusions:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Q}[\pi] \subset \operatorname{End}_D A \subset & \operatorname{End} A \\
E \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & D \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

L'algèbre $\operatorname{End} A \otimes \mathbf{Q}_p$ s'identifie à l'algèbre $\operatorname{End}_{\kappa'}(A_{p^\infty})$ des endomorphismes définis sur κ' du groupe p-divisible à isogénie près A_{p^∞}. L'algèbre $\operatorname{End}_D A \otimes \mathbf{Q}_p$ s'identifie donc à l'algèbre:

$$\operatorname{End}_{\kappa', D_p}(A_{p^\infty}) = \prod_{i,j} \operatorname{End}_{\kappa', D_i^j}\left((A_{p^\infty})_i^j\right) \quad (i \in [\![1, r]\!],\ j \in \{1, 2\}).$$

Nous obtenons donc des isomorphismes:

$$\operatorname{End}_D A \underset{E}{\otimes} E_i^j \simeq \operatorname{End}_{\kappa', D_i^j}\left((A_{p^\infty})_i^j\right).$$

Notons aussi que $\operatorname{End}_{\kappa', D_1^2}((A_{p^\infty})_1^2)$ est isomorphe à $\operatorname{End}_{\kappa', F_{\mathfrak{p}}}((A_{p^\infty})_1^{2,1})$ et que l'involution de Rosati induit des anti-isomorphismes $F_{\mathfrak{p}_i}$-linéaires:

$$\operatorname{End}_{\kappa', D_i^1}\left((A_{p^\infty})_i^1\right) \simeq \operatorname{End}_{\kappa', D_i^2}\left((A_{p^\infty})_i^2\right).$$

11.4.3. L'algèbre $\operatorname{End}_{\kappa', D_i^j}((A_\infty)_i^j)$ est la sous-algèbre centralisatrice de l'image de π dans l'algèbre $\operatorname{End}_{\bar{\kappa}, D_i^j}((A_{p^\infty})_i^j)$ des D_i^j-automorphismes absolus de $(A_{p^\infty})_i^j$. De la structure des groupes $(A_{p^\infty})_i^2$, on déduit des isomorphismes:

$$\operatorname{End}_{\bar{\kappa}, D_1^2}\left(\left(A_{p^\infty}\right)_1^2\right) \simeq \bar{B}_{\mathfrak{p}}$$

et (pour $i \geqslant 2$)

$$\operatorname{End}_{\bar{\kappa}, D_i^2}\left(\left(A_{p^\infty}\right)_i^2\right) \simeq \operatorname{End}_{D_i^2}\left(V_i^2\right) \simeq D_i^2.$$

On voit donc apparaître deux possibilités:
(i) *Premier cas*: $\pi \in E$. L'algèbre $\operatorname{End}_D A$ est alors une algèbre de quaternions de centre E (ramifiée en $\mathfrak{p}^1$, $\mathfrak{p}^2$):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbf{Q}[\pi] \subset & E & \subset \operatorname{End}_D A & \subset \operatorname{End} A \\
& & D \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

(ii) *Deuxième cas*: π engendre une extension quadratique E' de E, non décomposée en $\mathfrak{p}^1$, $\mathfrak{p}^2$, et nous avons:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbf{Q}[\pi] \subset E' = \operatorname{End}_D A & \subset \operatorname{End} A \\
E \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & D \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Nous allons en fait *exclure* ce second cas (plus précisément, montrer qu'en agrandissant éventuellement κ' on est toujours dans le premier cas).

11.4.4. Quelques remarques

(i) On voit que dans les deux cas considérés, l'algèbre $\mathbf{Q}[\pi]$ est un *corps*. La variété abélienne à isogénie près A est donc *isotypique*, et l'algèbre $\operatorname{End} A$ est une $\mathbf{Q}[\pi]$-algèbre simple.
(ii) Parce que π respecte la polarisation $\bar{\theta}$ on a la relation:

$$\pi\pi^* = q'$$

(iii) On peut calculer les valeurs absolues de π aux différentes places du corps $E(\pi)$ $(= E$ ou $E')$.

(a) Soit $i \geqslant 2$, et relevons $\mathfrak{p}_i^2$ en une place $\tilde{\mathfrak{p}}_i^2$ de $E(\pi)$ (une ou deux possibilités). Parce que les groupes $(A_{p^\infty})_i^2$ sont ind-étales, on a donc:

$$|\pi|_{\tilde{\mathfrak{p}}_i^2} = 1.$$

Il résulte alors de (ii) que pour un relèvement $\tilde{\mathfrak{p}}_i^1$ de $\mathfrak{p}_i^1$ on a:

$$|\pi|_{\tilde{\mathfrak{p}}_i^1} = |q'|_{\tilde{\mathfrak{p}}_i^1}.$$

(b) Soit $i = 1$. La place $\mathfrak{p}^1$ (resp. $\mathfrak{p}^2$) de E se relève en une unique place $\tilde{\mathfrak{p}}^1$ (resp. $\tilde{\mathfrak{p}}^2$) de $E(\pi)$. Parce que les endomorphismes de $(A_{p^\infty})_1^2$ définis par $\mathfrak{p}^\alpha$ et par π^2 ont la même hauteur, on trouve que

$$|\pi|_{\tilde{\mathfrak{p}}^2} = |\mathfrak{p}|_{\tilde{\mathfrak{p}}^2}^{\alpha/2} = (q')^{-1}$$

et donc

$$|\pi|_{\tilde{\mathfrak{p}}^1} = |q'|_{\tilde{\mathfrak{p}}^1} |\pi|_{\tilde{\mathfrak{p}}^2}^{-1} = (q')^{1-2[F_{\mathfrak{p}}:\mathbf{Q}_p]}.$$

(c) Aux places finies v de caractéristique résiduelle différente de p, on a:

$$|\pi|_v = 1.$$

(d) Enfin, en toute place complexe v de $E(\pi)$, on a:

$$|\pi|_v = q' \quad \text{(valeur absolue normalisée!)}.$$

11.4.5. Unicité de A

Supposons (cas (ii) de (11.4.3)) que $E(\pi)$ soit une extension quadratique de E, et notons alors $\hat{\pi}$ le conjugué de π par l'élément non trivial du groupe de Galois de $E(\pi)$ sur E. Il résulte alors de (11.4.4, iii) que π et $\hat{\pi}$ ont même valuation à chaque place de $E(\pi)$. Le quotient $\pi/\hat{\pi}$ est alors *une racine de l'unité*. Quitte à étendre éventuellement le corps κ' – ce qui a pour effet d'élever π à la puissance $[\kappa'' : \kappa']$ – on peut donc supposer que $\pi \in E$. On est donc ramené au premier cas.

Les valuations de $\pi \in E$ étant entièrement déterminés par (11.4.4, iii), on voit donc que π est bien déterminé modulo une racine l'unité. Du théorème de Tate-Honda, il résulte alors *que la variété abélienne à isogénie près A sur $\bar{\kappa}$ est uniquement déterminée à isomorphisme près. Du théorème de Skolem-Noether*, il résulte aussitôt que *le couple (A, ι) est bien déterminé à isomorphisme près.*

11.5. Fin de la démonstration de la proposition (11.2)

11.5.1. De (11.4.3), il résulte que $\mathrm{End}_D A$ est l'algèbre de quaternions de centre E déduite de D en changeant les invariants aux places $\mathfrak{p}^1$ et $\mathfrak{p}^2$. Il existe donc un isomorphisme:

$$\mathrm{End}_D A \simeq \bar{D} = \bar{B} \underset{F}{\otimes} E.$$

La polarisation homogène $\bar{\theta}$ induit une involution positive, notée $d \to d^*$, de l'algèbre $\mathrm{End}_D A$. Une polarisation θ_1 de A, telle que l'involution de

Rosati associée envoie $\iota(l)$ sur $\iota(l^*)$, s'obtient à partir de $\theta \in \bar{\theta}$ par composition avec un élément d de $\mathrm{End}_D A$, symétrique et positif à l'infini. Il résulte alors du principe de Hasse pour les groupes unitaires – (cf. [Kn]) – qu'un tel élément d est de la forme bb^* pour un $b \in \mathrm{End}_D A$.

On voit donc que le *triple* $(A, \iota, \bar{\theta})$ *est bien défini à isomorphisme près.* Du même principe de Hasse, il résulte l'unicité, à conjugaison près par un élément symétrique, d'une involution positive sur $\bar{D}$. On peut donc supposer que $d \to d^*$ est l'involution produit tensoriel de l'involution canonique de $\bar{B}$ et de la conjugaison de E par rapport à F.

Notons alors $\bar{G}'$ le groupe construit à partir de $\bar{B}$ comme le groupe G' a été construit à partir de B; les points rationnels de $\bar{G}'$ sont donnés par:

$$\bar{G}'(\mathbf{Q}) = \left\{ (g, z) \in \bar{B}^* \underset{F^*}{\times} E^* / \bar{\nu}(g) z\bar{z} \in \mathbf{Q}^* \right\}.$$

On voit sans peine que le groupe $\bar{G}'(\mathbf{Q})$ est *le groupe des automorphismes du triple* $(A, \iota, \bar{\theta})$ (cf. 2.2.3).

11.5.2. De ce qui précède, il résulte déjà que l'action de $\tilde{G}$ est *transitive* sur S_0'.

Soit maintenant $s \in S_0'$ représenté par $(A, \iota, \theta, k^{\mathfrak{p}}, \bar{\varphi})$. Un élément $\gamma \in \Delta$ stabilise s si et seulement si il existe $\alpha \in \bar{G}'(\mathbf{Q}) \simeq \mathrm{Aut}(A, \iota, \bar{\theta})$ rendant cummutatif le triangle:

$$\begin{array}{ccc} V_p^{\mathfrak{p}}(A) \oplus \hat{V}^p(A) & \xrightarrow{\alpha} & V_p^{\mathfrak{p}}(A) \oplus \hat{V}^p(A) \\ k^{\mathfrak{p}} \searrow & & \swarrow \gamma^{-1} k^{\mathfrak{p}} \\ & V_p^{\mathfrak{p}} \oplus \hat{V}^p & \end{array}$$

ainsi que le triangle:

$$\begin{array}{ccc} (A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1} & \xrightarrow{\alpha} & (A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1} \\ \bar{\varphi} \searrow & & \swarrow \Pi_\Sigma^{-\mathrm{val}\det\gamma_{\mathfrak{p}}} \cdot \bar{\varphi} \\ & \Sigma^0 & \end{array}$$

Autrement dit, nous devons avoir les relations

$$\begin{cases} \text{(i)} & (k^{\mathfrak{p}})^{-1} \gamma k^{\mathfrak{p}} = \alpha \quad (\text{dans le groupe } \Gamma') \\ \text{(ii)} & \mathrm{val}\det \gamma_{\mathfrak{p}} = \mathrm{val}\det \alpha_{\mathfrak{p}} \end{cases}$$

Cela équivaut visiblement à ce que l'image de γ dans le produit $\Gamma \times \mathbf{Z}$ appartienne au conjugué par $k^{\mathfrak{p}}$ du groupe $\overline{G}(\mathbf{Q})$. Alors l'action de γ sur $\boldsymbol{E}_{\infty}^{\prime 0} \mid s$ est donnée par l'action de α^{-1} sur $(A_{\mathfrak{p}^\infty})_1^{2,1}$, et la proposition (11.2) en résulte. □

Appendice: Modules divisibles d'après Drinfel'd [Dr]

Dans cet appendice, nous exposons les résultats de [Dr] sur les "$\mathcal{O}$-modules divisibles", avec quelques compléments. Pour les démonstrations, on renvoie le plus souvent à [Dr].

NOTATIONS: Nous désignons par F un corps p-adique $^{(*)}$, extension finie de $\mathbf{Q}_p$, (conflit de notation avec le texte précédent: le F ici considéré correspond au corps $F_{\mathfrak{p}}$), par $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers, et par $\mathfrak{p}$ une uniformisante (le choix de $\mathfrak{p}$ n'intervient pas dans les résultats obtenus). La même notation $\mathfrak{p}$ désigne aussi l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. Notons F^{nr} l'extension non ramifiée maximale de F et $\mathcal{O}^{nr}$ son anneau d'entiers, de complété $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$.

Enfin κ désigne le corps résiduel de F, et $\bar{\kappa}$ celui de F^{nr}. Le cardinal de κ est noté q.

$(*)$ REMARQUE: Les définitions et propriétés des "modules divisibles" valent aussi pour F un corps local d'égale caractéristique p (en fait, dans l'article [Dr], seul ce dernier cas est utilisé). Nous préférons nous limiter ici au cas d'un corps p-adique, ce qui permet de raccrocher la théorie ici développée à celle, plus familière, des groupes de Barsotti-Tate.

1. Définition d'un "$\mathcal{O}$-module divisible" sur un $\mathcal{O}$-schéma local complet noetherien de caractéristique résiduelle p

Soit $S = \operatorname{Spec} R$ un tel $\mathcal{O}$-schéma. Commençons par rappeler (cf. [Ta]) que tout groupe de Barsotti-Tate G sur S apparaît de manière fonctorielle comme une extension:

$$0 \to G^0 \to G \to G^{et} \to 0$$

où G^{et} est un groupe de Barsotti-Tate *ind-étale* et où G^0 est un groupe de Barsotti-Tate *formel*.

Nous poserons alors Lie G = Lie G^0; c'est un R-module libre de rang fini (égal à la dimension du groupe formel G^0).

DÉFINITION: *Un "$\mathcal{O}$-module divisible sur S" est un couple (G, f) constitué d'un groupe de Barsotti-Tate G sur S et d'une action sur G de l'anneau $\mathcal{O}$*:

$$f: \mathcal{O} \to \operatorname{End} G$$

de sorte que soient satisfaites les conditions suivantes;

(a) $f(1)$ *est l'identité*

(b) G^0 *est de dimension* 1

(c) *L'action dérivée de* f:

$$f' : \mathcal{O} \to \text{End Lie } G = R$$

coïncide avec le morphisme structural $i : \mathcal{O} \to R$.

Si G est un $\mathcal{O}$-module divisible sur S, il en est alors de même de G^0 (nous dirons que G^0 est un "$\mathcal{O}$-module formel"). Un $\mathcal{O}$-module formel admet une description explicite en termes de séries formelles F (la loi d'addition) et f_a pour $a \in \mathcal{O}$ (la structure de $\mathcal{O}$-module):

$$F = X + Y + \dots \in R[[X, Y]]$$

$$f_a = i(a)X + \dots \in R[[X]]$$

les F et f_a étant liées par un certain nombre de relations évidentes (qui traduisent la commutativité, l'associativité, la distributivité, ...)

Quant au groupe G^{et}, il devient isomorphe sur l'hensélisé strict de S (et donc sur S lui-même si le corps résiduel de R est algébriquement clos) à un $\mathcal{O}$-module constant $(F/\mathcal{O})^j$, pour j entier $\geqslant 0$.

Hauteur d'un $\mathcal{O}$-module divisible. Soit G un $\mathcal{O}$-module divsible sur S. Il existe un entier $H \geqslant 1$, par définition la *hauteur* de G, tel que la propriété suivante soit satisfaite: pour tout entier $n \geqslant 0$, le rang du groupe (fini libre) de $\mathfrak{p}^n$-torsion dans G:

$$G_n \subset G$$

est donné par

$$\text{rang } G_n = q^{nH}.$$

Si h désigne alors la hauteur de la composante formelle G^0, on a la relation

$$H = h + j \quad (\text{où } j \text{ a été défini plus haut}).$$

La hauteur h d'un $\mathcal{O}$-module formel G^0 se voit en termes de la série formelle $f_{\mathfrak{p}}$ de la façon suivante: on considère la réduction

$$\bar{f}_{\mathfrak{p}} \in r[[X]], \quad \text{où } r \text{ désigne le corps résiduel de } R.$$

L'entier h est alors le plus grand entier tel que $\bar{f}_{\mathfrak{p}}$ "soit une série formelle en X^{q^h}". Il existe donc une série formelle

$$\psi \in r[[X]] \quad \psi'(0) \neq 0$$

vérifiant la relation: $f_{\mathfrak{p}}(X) = \psi(X^{q^h})$.

REMARQUE: On ne confondra pas la hauteur de G, vu comme $\mathcal{O}$-module formel, avec la hauteur du groupe de Barsotti-Tate G. On vérifie facilement que cette dernière est égale au produit $H \cdot \deg(F : \mathbf{Q}_p)$.

2. Classification des $\mathcal{O}$-modules divisibles sur le spectre d'un corps séparablement clos extension de κ

Soit R un tel corps. On renvoie à ([Dr], (1.6) et (1.7)) pour la démonstration de la:

PROPOSITION: *Pour tout entier $h \geqslant 1$, il existe un $\mathcal{O}$-module formel Σ_h de hauteur h sur R, unique à isomorphisme près. L'anneau des endomorphismes de Σ_h est isomorphe à l'ordre maximal du corps gauche de centre F et d'invariant* $(1/h)$.

On en déduit aussitôt que tout $\mathcal{O}$-module divisible de hauteur H sur R est isomorphe à un produit:

$$\Sigma_h \times (F/\mathcal{O})^j \quad (h + j = H).$$

3. Déformation universelle d'un $\mathcal{O}$-module divisible

Notons $\mathscr{C}$ la catégorie des $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$-algèbres locales complètes noetheriennes de corps résiduel $\bar{\kappa}$.

THÉORÈME: *Soit G un $\mathcal{O}$-module divisible de hauteur H sur $\bar{\kappa}$. Le foncteur qui à $A \in \mathscr{C}$ associe l'ensemble des déformations de G sur A est représentable par un anneau $D_0^G \in \mathscr{C}$, isomorphe à l'anneau des séries formelles en $H - 1$ variables sur $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$.*

Pour prouver ce théorème, on procède comme suit:

(a) On considère tout d'abord le cas particulier où G est un $\mathcal{O}$-module *formel*. Pour $G = \Sigma_h$, Drinfel'd construit "explicitement" (prop. 4.2 de [Dr]) une déformation universelle de G sur l'anneau $D_0^h = \hat{\mathcal{O}}^{nr}[[t_2, \ldots, t_h]]$.

(b) *Cas général*: $G = G^0 \times (F/\mathcal{O})^j$. Une déformation $\tilde{G}$ de G s'obtient alors comme une extension:

$$0 \to \tilde{G}^0 \to \tilde{G} \to (F/\mathcal{O})^j \to 0$$

où $\tilde{G}^0$ est une déformation de G^0.

Sur D_0^h, on dispose d'une déformation universelle $\tilde{G}^0$. Si R est une D_0^h-algèbre, les extensions de $(F/\mathcal{O})^j$ par $\tilde{G}_R^0$ sont classifiées par le groupe $\mathrm{Ext}_R^1((F/\mathcal{O})^j, \tilde{G}_R^0)$.

Par un calcul analogue à ([Mes], Appendix, prop. 2.5) on montre que

$$\mathrm{Ext}_R^1\big((F/\mathcal{O})^j, \tilde{G}_R^0\big) = \tilde{G}^0(R)^j = \mathrm{Mor}(\mathrm{Spf}\ R, \tilde{G}^0)^j$$

(cf. [Dr], prop. 4.5).

On en déduit que Ext^1_R, et donc le foncteur des déformations de G, est représentable par l'anneau $D_0^h[[d_1, \ldots, d_j]]$ □

4. Bases de Drinfel'd

Soit toujours R une $\mathcal{O}$-algèbre locale complète noetherienne de caractéristique résiduelle p, et soit G un $\mathcal{O}$-module divisible de hauteur $H = h + j$ sur R. Le groupe G_n des points de $\mathfrak{p}^n$-torsion est alors fini et libre sur R, de rang q^{nH}.

Si P est un point de $G_n(R)$, nous notons [P] le sous-R-schéma de G_n qu'il définit. Pour (P_ι) une famille finie de tels points, nous notons $\Sigma[P_\iota]$ le sous-schéma de G_n défini par l'idéal *produit* des idéaux définissant les $[P_\iota]$.

DÉFINITION: *Une "Base de Drinfel'd de niveau n" sur G est un homomorphisme de $\mathcal{O}$-modules*:

$$\varphi : (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^H \to G_n(R)$$

tel que le sous-schéma $\displaystyle\sum_{\alpha \in (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^H} [\varphi(\alpha)]$ *de G_n coïncide avec G_n.*

Variante: Une base de Drinfel'd de niveau n est la donnée de H points $P_1, \ldots, P_H$ de $G_n(R)$, tels qu'on ait:

$$\sum_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_H) \in (\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)^H} [\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_H P_H] = G_n.$$

Il est possible d'expliciter quelque peu la notion de base de Drinfel'd:

(a) *Cas d'un $\mathcal{O}$-module formel G^0 de hauteur h.* La donnée d'une base de Drinfel'd de niveau n sur G^0 est alors la donnée d'un homomorphisme:

$$\varphi : (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^h \to \mathcal{M} = G^0(R)$$

(où $\mathcal{M}$ est l'idéal maximal de R, muni de la structure de $\mathcal{O}$-module déduite de G), tel que les séries formelles

$$f_{\mathfrak{p}^n}(X) \quad \text{et} \quad \prod_{\alpha \in (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^h} (X - \varphi(\alpha))$$

se déduisent l'une de l'autre par multiplication par une unité de $R[[X]]$.

En particulier, si R est un corps, il existe une et une seule base de Drinfel'd sur G^0 ($\varphi = 0$).

(b) *Cas général.* Supposons pour simplifier que R est strictement hensélien. Le groupe G est alors une extension de $(F/G)^J$ par G^0. On en déduit que $G_n(R)$ s'insère dans une suite exacte:

$$0 \to G_n^0(R) \to G_n(R) \to (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^J$$

On vérifie alors sans peine qu'un homomorphisme:

$$\varphi : (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^{J+h} \to G_n(R)$$

est une base de Drinfel'd si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(i) Le composé $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^{J+h} \xrightarrow{\varphi} G_n(R) \to (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^J$ est *surjectif*. Son noyau N est alors un facteur direct dans $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^{J+h}$, isomorphe à $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^h$.

(ii) La restriction de φ à N est une base de Drinfel'd sur G^0.

En particulier, si R est un corps séparablement clos, G est isomorphe au produit $\Sigma_h \times (F/\mathcal{O})^J$, et $G_n(R)$ est égal à $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^J$; l'homomorphisme φ est une base de Drinfel'd si et seulement si il est surjectif.

Pour terminer ces généralités sur les bases de Drinfel'd, remarquons le fait suivant: si φ est une base de Drinfel'd de niveau n sur G, alors la restriction de φ à

$$(\mathfrak{p}^{-m}/\mathcal{O})^H \subset (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^H$$

constitue, pour $m \leqslant n$, une base de Drinfel'd de niveau m.

5. Déformation universelle d'un $\mathcal{O}$-module divisible muni d'une base de Drinfel'd

THÉORÈME: *Soit G un $\mathcal{O}$-module divisible sur $\bar{\kappa}$ muni d'une base de Drinfel'd φ de niveau n. Le foncteur qui à $A \in \mathscr{C}$ associe l'ensemble des déformations sur A du couple (G, φ) est représentable par une algèbre $D_n^G \in \mathscr{C}$. L'anneau D_n^G est régulier. Pour $m \leqslant n$, le morphisme naturel $D_m^G \to D_n^G$ (correspondant à la restriction de la base de Drinfel'd) est fini et plat.*

Donnons quelques précisions qui nous seront utiles sur la façon dont Drinfel'd prouve ce théorème.

(a) On commence par envisager le cas où $G = G^0$ *est un $\mathcal{O}$-module formel*. On montre dans ce cas que pour $G^0 = \Sigma_h$, le foncteur des déformations est représentable par une algèbre D_n^h, que l'anneau D_n^h est régulier, et que les morphismes $D_m^h \to D_n^h$ sont finis et plats (cf. [Dr], prop. 4.3). L'anneau D_n^h porte un groupe $\tilde{G}^0$, déformation universelle de G^0, muni d'une base de Drinfel'd:

$$P_1, \ldots, P_h \in \mathcal{M} \quad \left(\text{idéal maximal de } D_n^h\right).$$

On obtient aussi la précision importante suivante:

Proposition: *Les éléments $P_1, P_2, \ldots, P_h$ de l'idéal maximal $\mathcal{M}$ constituent un système local régulier de paramètres pour l'anneau D_n^h.*

(b) *Cas général* (cf. [Dr], Prop. (4.5)): $G = G^0 \times (F/\mathcal{O})^J$. Il existe une décomposition $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^H = (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^h \oplus (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^J$ telle que la base de Drinfel'd sur G soit donnée par le composé:

$$(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^H \xrightarrow{pr} (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^J = G_n(\bar{\kappa}).$$

Soit $\tilde{G}$ un relèvement de G sur $R \in \mathcal{C}$: il apparaît comme une extension:

$$0 \to \tilde{G}^0 \to \tilde{G} \to (F/\mathcal{O})^J \to 0$$

(où $\tilde{G}^0$ est un relèvement de G^0). D'où une suite exacte:

$$0 \to \tilde{G}_n^0(R) \to \tilde{G}_n(R) \to (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^J.$$

La donnée d'un relèvement de la base de Drinfel'd de G équivaut à la donnée d'un diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \tilde{G}_n^0(R) & \to & \tilde{G}_n(R) & \to & (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^J \\ & \uparrow \tilde{\varphi}^0 & & \uparrow \tilde{\varphi} & & \| \\ 0 \to & (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^h & \hookrightarrow & (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^H & \to & (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^J \end{array}$$

tel que $\tilde{\varphi}^0$ soit une base de Drinfel'd sur $\tilde{G}^0$.

Au-dessus de D_n^h, on dispose d'un couple $(\tilde{G}^0, \tilde{\varphi}^0)$ universel. Pour R une D_n^h-algèbre, les extensions sur R de $(F/\mathcal{O})^J$ par $\tilde{G}^0$, munies de $\tilde{\varphi}$ comme ci-dessus, correspondent bijectivement aux extensions "nues":

$$0 \to \tilde{G}^0 \to \tilde{G}' \to (F/\mathcal{O})^J \to 0$$

où $\tilde{G}'$ s'obtient à partir de $\tilde{G}$ comme quotient par le sous-groupe:

$$\sum_{\alpha \in (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^J} [\tilde{\varphi}(\alpha)] \subset \tilde{G}_n.$$

On montre alors comme en (3) que le foncteur des déformations de (G, φ) est représenté par l'anneau de séries formelles:

$$D_n^{h,j} = D_n^h\left[\left[d_1^{(n)}, \ldots, d_j^{(n)}\right]\right]$$

où les $d_i^{(n)}$ sont des indéterminées. Cet anneau est évidemment *régulier*.

Le morphisme $D_m^{h,j} \to D_n^{h,j}$ s'obtient à partir du morphisme $D_m^h \to D_n^h$ en envoyant $d_i^{(m)}$ sur $f_{\mathfrak{p}^{n-m}}(d_i^{(n)})$ (où $f_{\mathfrak{p}^{n-m}} \in D_0^h[[X]]$ décrit la multiplication par $\mathfrak{p}^{n-m}$ dans le $\mathcal{O}$-module formel $\tilde{G}^0$). On en déduit que ce morphisme est *fini et plat*. □

Nous allons maintenant étudier les cas particuliers des $\mathcal{O}$-modules divisibles de hauteur $H \leqslant 2$:

6. *$\mathcal{O}$-modules divisibles de hauteur 1 (théorie de Lubin-Tate)*

On renvoie à ([Se]) pour un exposé de la théorie de Lubin-Tate.

Notons L un groupe de Lubin-Tate pour le corps local F. Le groupe L est construit à l'aide d'une série formelle $f_{\mathfrak{p}}$ à coefficients dans $\mathcal{O}$ qui vérifie:

$$\begin{cases} f_{\mathfrak{p}}(x) = \mathfrak{p}x & (\text{mod deg } 2) \\ f_{\mathfrak{p}}(x) = x^q & (\text{mod } \mathfrak{p}). \end{cases}$$

Par définition, L est un $\mathcal{O}$-module formel de hauteur 1 sur l'anneau $\mathcal{O}$. Il est bien connu que le $\mathcal{O}$-module formel sur $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$ qu'on en déduit par extension des scalaires ne dépend pas du choix de $f_{\mathfrak{p}}$ ni du choix de $\mathfrak{p}$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la théorie de Lubin-Tate et des résultats précédents:

PROPOSITION: *L'anneau D_0^1 est isomorphe à $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$, par un isomorphisme qui envoie le $\mathcal{O}$-module de hauteur* 1 *universel sur L. L'anneau D_n^1 est isomorphe au complété de l'anneau des entiers de l'extension de F^{nr} correspondant par la théorie du corps de classes au sous-groupe $U^n \subset \mathcal{O}^*$ des unités congrues à* 1 *modulo $\mathfrak{p}^n$.*

7. *$\mathcal{O}$-modules divisibles de hauteur 2 "ordinaires" (i.e. les $\mathcal{O}$-modules pour lesquels $h = j = 1$)*

L'anneau $D_0^{1,1}$ est alors isomorphe à $\hat{\mathcal{O}}^{nr}[[t]]$, et il porte une extension universelle E:

$$0 \to L \to E \to (F/\mathcal{O}) \to 0$$

et donc E_n est une extension:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to L_n \to E_n \to (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}) \to 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad {\scriptstyle \pi} \searrow \wr| \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad (\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n) \end{array}$$

Il est commode d'introduire un *accouplement $\mathcal{O}$-bilinéaire alterné*:

$$\langle\ \rangle : E_n \underset{D_0^{1,1}}{\times} E_n \to L_n,$$

en remarquant que $\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n$ opère sur E_n, par la formule:

$$\langle x, y\rangle = \pi(x)\cdot y - \pi(y)\cdot x.$$

Soit alors R une $D_0^{1,1}$-algèbre, et $(P, Q) \in E_n(R)^2$ une base de Drinfel'd. On vérifie sans peine (cf. (4) b) qu'alors $\langle P, Q\rangle \in L_n(R)$ constitue aussi une base de Drinfel'd pour L. Cela définit un morphisme:

$$D_n^{1,1} \leftarrow D_n^1.$$

D'autre part, en (5, b) nous avons exprimé $D_n^{1,1}$ comme un anneau de séries formelles $D_n^1[[d]]$, et il est facile de voir que le morphisme $D_n^1 \to D_n^{1,1}$ qui en résulte ne diffère du précédent que par un automorphisme de D_n^1. Cela prouve la

PROPOSITION: *Soit (P, Q) la base de Drinfel'd universelle sur E (au-dessus de $D_n^{1,1}$). Alors $\langle P, Q\rangle$ constitue une base de Drinfel'd de L au-dessus de $D_n^{1,1}$. On obtient donc un morphisme*:

$$D_n^{1,1} \leftarrow D_n^1.$$

Ce morphisme est lisse.

8. $\mathcal{O}$-modules divisibles de hauteur 2 "supersinguliers" (i.e. $h = 2$, $j = 0$)

Notons S_n^2 le spectre de $D_n^2 \underset{\hat{\mathcal{O}}^{nr}}{\otimes} \bar{\kappa}$, et $(S_n^2)_{\mathrm{red}}$ sa réduction.

(a) D'après ((3)a), l'anneau D_0^2 est isomorphe à $\hat{\mathcal{O}}^{nr}[[t]]$. Il est muni d'une déformation universelle E de Σ_2. Il résulte des constructions explicites de [Dr] (cf. Prop. (1.3) et la démonstration de Prop. (4.5)) que l'endomorphisme "multiplication par $\mathfrak{p}$" de E est donné par une série formelle de la forme:

$$f_{\mathfrak{p}}(X) = \mathfrak{p}X + \frac{\mathfrak{p}^q - \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}} tX^q + \dots$$

L'anneau $D_0^2 \underset{\hat{\mathcal{O}}^{nr}}{\otimes} \bar{\kappa}$ est donc isomorphe à $\bar{\kappa}[[t]]$ et porte un groupe E

pour lequel la multiplication par $\mathfrak{p}$ est donnée par une série formelle de la forme:

$$f_{\mathfrak{p}}(X) = \alpha t X^q + \beta X^{q^2} + \ldots$$

où α et β sont des unités de $\bar{\kappa}[[t]]$.

Il en résulte qu'au-dessus du point générique de S_0^2 le groupe E apparaît comme une extension:

$$0 \to E^0 \to E \to E^{et} \to 0$$

avec E^{et} étale et E^0 un $\mathcal{O}$-module formel de hauteur 1.

(b) Le schéma S_n^2 est muni du $\mathcal{O}$-module universel E et d'une base de Drinfel'd universelle (u, v). Soit C une composante irréductible de $(S_n^2)_{\mathrm{red}}$, soit η le point générique de C, et $\bar{\eta}$ sa clôture algébrique. Parce que le groupe E_n^0 est radiciel, la $\mathfrak{p}^n$-torsion E_n de E est donnée par:

$$E_n(\bar{\eta}) = E_n^{et}(\bar{\eta}) \simeq (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}).$$

La base de Drinfel'd (u, v) définit un morphisme surjectif:

$$(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^2 \overset{\varphi}{\to} (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}).$$

Le noyau A de φ est alors un sous $(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$-module facteur direct de rang 1 dans $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O})^2$, i.e. un élément $A \in \mathrm{P}^1(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$.

(c) Soit réciproquement $A \in \mathbf{P}^1(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$, et soit C_A le sous-schéma de $(S_n^2)_{\mathrm{red}}$ défini par la condition (fermée):

$$\varphi \mid A = 0.$$

Il résulte alors de (b) que $(S_n^2)_{\mathrm{red}}$ est la *réunion* des C_A. Le groupe $GL_2(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ opère de façon évidente sur $(S_n^2)_{\mathrm{red}}$ en permutant transitivement les C_A.

(d) Parce que le couple (u, v) constitue un système local régulier de paramètres pour l'anneau D_n^2, le morphisme évident:

$$\bar{\kappa}[[u, v]] \to \left(D_n^2 \otimes \bar{\kappa}\right)$$

est *surjectif*. Les C_A sont donc naturellement des sous-schémas fermés réduits de dimension 1 dans Spec($\bar{\kappa}$[[u, v]]).

(e) Supposons que $A \in \mathbf{P}^1(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ soit défini par l'équation $\lambda u + \mu v = 0$ (avec λ, μ des éléments de $\mathcal{O}$ premiers entre eux). Alors le sous-schéma $C_A \subset \mathrm{Spec}(\bar{\kappa}[[u, v]])$ satisfait l'équation:

$$F\left(f_\lambda(u), f_\mu(v)\right) = 0$$

où F et f_λ sont comme en (1) des séries formelles définissant le $\mathcal{O}$-module formel E.

La série formelle $F(f_\lambda(u), f_\mu(v)) \in \bar{\kappa}[[u, v]]$ a un terme de degré 1 non nul:

$$F\big(f_\lambda(u), f_\mu(v)\big) = \bar{\lambda}u + \bar{\mu}v + \dots$$

(où $\bar{\lambda}$ (resp. $\bar{\mu}$) désigne la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de λ (resp. μ)). Il en résulte que C_A est isomorphe à $\mathrm{Spec}(\bar{\kappa}[[w]])$. On a donc prouvé en définitive la:

PROPOSITION: *Les sous-schémas C_A $(A \in \mathbf{P}^1(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n))$ de $(S_n^2)_{\mathrm{red}}$, définis en (c), sont lisses et constituent les composantes irréductibles de $(S_n^2)_{\mathrm{red}}$.*

Bibliographie

[Br] L. Breen et J.P. Labesse: Variétés de Shimura et fonctions L. *Publications Mathématiques de l'Université de Paris VII*, No. 6.

[Ca.1] H. Carayol: Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 296, Série I (1983) p. 557.

[Ca.2] H. Carayol: Sur les représentations l-adiques attachées aux formes modulaires de Hilbert. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 296, Série I (1983) p. 629. (Les deux notes précitées contiennent quelques erreurs de signes, dont j'espère qu'elles sont corrigées dans le présent article).

[Ch] C. Chevalley: Deux théorèmes d'arithmétique. *J. Math. Soc. Japan* 3 (1951) p. 36.

[D.0] P. Deligne: Travaux de Shimura. Séminiare Bourbaki, février 1971 (première version).

[D.1] P. Deligne: Travaux de Shimura. Séminaire Bourbaki, février 1971 (seconde version). In: *Lecture Notes in Mathematics*, No. 244, p. 123, Springer-Verlag (1971).

[D.2] P. Deligne: Variétés de Shimura: Interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 33 (1979), Part 2, pp. 247–290, *Amer. Math. Soc.*, Providence (1979).

[D.M] P. Deligne et D. Mumford: On the irreducibility of the space of curves of a given genus. *Publ. Math., IHES*, No. 36 (1968).

[Dr] V.G. Drinfel'd: Elliptic Modules Math., URSS, Sbornik, Vol. 23, No. 4 (1974).

[Gi] J. Giraud: Modules de variétés abéliennes et variétés de Shimura, exposé dans [Br].

[K.M] N.M. Katz et B. Mazur: *Arithmetic Moduli of Elliptic Curves*. Princeton Univ. Press: Princeton (1985).

[Kn] M. Knesser: Hasse principle for H^1 of simply connected group, in Algebraic Groups and Discontinuous subgroups. *Proc. Symp. in Pure Math.* Vol. IX, *Amer. Math. Soc.*, Providence R.I. (1966) pp. 159–163.

[Li] M. Lichtenbaum: Curves over discrete valuation rings. *Amer. J. of Maths.* 90 (1968) 380.

[La] R.P. Langlands: Modular forms and l-adic representations, Modular forms of one variable II. *Lecture Notes Math.*, No. 349, Springer-Verlag (1973) 361–500.

[Me] W. Messing: The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes. *Lecture Notes in Math.* No. 264, Springer-Verlag (1972).

[Mo] Y. Morita: Reduction mod $\mathfrak{p}$ of Shimura curves. *Hokkaido Math. J.*, 10 (1981) 209–238.

[Mu] D. Mumford: *Geometric Invariant Theory*. Springer-Verlag (1965).

[Sa] I. Šafarevich: Lectures on minimal models. *Tata Inst. Lecture Notes*, Bombay (1966).

[Se] J.P. SERRE: Local class field theory. In: Cassels-Fröhlich; *Algebraic Number Theory*. Washington, Thomson Book Co. (1967).

[Sh] G. SHIMURA: On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. *Annals of Math.* 91 (1970) 144–222.

[Ta] J. TATE: *p*-divisible groups. In: *Proceedings of a Conference on Local Fields*, Nuffic summer School at Driebergen, Springer-Verlag (1967).

(Oblatum 20-VII-1984)

Université Louis Pasteur
Départment de mathématique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg
France