

# COMPOSITIO MATHEMATICA

G. XIAO

## **L'irrégularité des surfaces de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau**

*Compositio Mathematica*, tome 56, n° 2 (1985), p. 251-257

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1985\\_\\_56\\_2\\_251\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__56_2_251_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## L'IRRÉGULARITÉ DES SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL DONT LE SYSTÈME CANONIQUE EST COMPOSÉ D'UN PINCEAU

G. Xiao

Soit  $S$  une surface lisse et projective de type général sur le corps complexe  $\mathbb{C}$ . Nous avons l'application canonique  $\Phi_K: S \rightarrow \mathbb{P}^{p_g(S)-1}$  qui est définie par la partie mobile du système canonique  $|K_S|$ . Quitte à éclater quelques points de  $S$ , on peut supposer que  $\Phi_K$  soit un morphisme. Nous disons que  $|K_S|$  est composé d'un pinceau si l'image de  $\Phi_K$  est une courbe, dans ce cas  $\Phi_K$  se factorise par une fibration de  $S$ :

$$\Phi_K: S \xrightarrow{f} C \rightarrow \mathbb{P}^{p_g(S)-1},$$

où  $C$  est une courbe lisse, et les fibres de  $f$  sont connexes. Notons par  $F$  une fibre générale de  $f$ , et soient  $g = g(F)$ ,  $b = g(C)$  les genres de  $F$  et  $C$ . On a  $g \geq 2$  puisque  $S$  est de type général, et il est bien connu que  $q(S) < b + g$  (voir [1]).

Pour les surfaces de type général, on sait que sauf quelques rares exceptions, les applications pluricanoniques  $\Phi_{nK}$  définies par  $|nK_S|$  sont génériquement finies pour  $n \geq 2$ , et sont birationnelles pour  $n \geq 3$  ([2] et [3]). Le cas où le système canonique est composé d'un pinceau constitue un cas très particulier des surfaces de type général. Dans [4], Beauville a démontré qu'il y a des familles illimitées de telles surfaces, et qu'il y a une limite supérieure pour  $g$ . La question naturelle que l'on peut alors poser est: si  $|K_S|$  est composé d'un pinceau, l'irrégularité  $q(S)$  est-elle bornée? ou de façon équivalente,  $b$  est-il borné? Le but de cette note est de répondre positivement à cette question en montrant le théorème suivant:

**THÉORÈME:** *Soit  $S$  une surface de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau. Alors  $S$  est dans l'un des cas suivants:*

- 1)  $q(S) = b = 1$ ;
- 2)  $b = 0$ ,  $q(S) \leq 2$ .

### §1. Le cas où $b > 0$

Nous regardons le faisceau  $f_*\omega_S = f_*\omega_{S/C} \otimes \omega_C$  qui est localement libre de rang  $g$  sur  $C$ . d'après [5], pour tout quotient localement libre  $E$  de  $f_*\omega_S$ , on a  $\lambda(E) \geq 2b - 2$ , où  $\lambda(E) = \text{deg}(E)/\text{rang}(E)$ . Remarquons aussi qu'il y a un isomorphisme canonique  $H^0(S, \omega_S) = H^0(C, f_*\omega_S)$ , et

la condition que  $\Phi_K$  se factorise par  $f$  se traduit par le fait que le sous-fibré  $E_1$  de  $f_*\omega_S$  engendré par les sections globales est inversible. Soit donc  $E_2$  le quotient de  $f_*\omega_S$  par  $E_1$ , nous avons alors une filtration

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow f_*\omega_S \rightarrow E_2 \rightarrow 0,$$

avec

$$h^0(E_1) = h^0(f_*\omega_S) = p_g(S) \geq 2.$$

Puisque  $\lambda(E_2) \geq 2b - 2$ ,  $\text{rang}(E_2) = g - 1$ , Riemann-Roch donne  $h^0(E_2) \geq (b - 1)(g - 1)$ . Donc la suite exacte de cohomologie

$$H^0(E_1) \rightarrow H^0(f_*\omega_S) \rightarrow H^0(E_2) \rightarrow H^1(E_1)$$

dit que nous devons avoir  $h^1(E_1) \geq h^0(E_2) \geq (b - 1)(g - 1)$ . Or il est évident que  $\text{deg}(E_1) > 0$ , donc  $h^1(E_1) \leq b - 1$  parce que  $h^0(E_1) \leq \text{deg}(E_1)$ , ce qui nous laisse deux possibilités: soit  $b = 1$ , soit  $g = 2$ .

Si  $b = 1$ , on a  $h^0(E_2) \leq h^1(E_1) = 0$ , et  $h^1(E_2) = 0$  par Riemann-Roch. Comme  $h^1(f_*\omega_S) \leq h^1(E_1) + h^1(E_2) = 0$ , on obtient  $q(S) = 1$  puisque

$$q(S) = h^1(\omega_S) = h^1(f_*\omega_S) + h^0(\omega_C) \tag{1}$$

d'après la suite spectrale de Leray. Donc  $S$  est dans le cas 1) du théorème.

Supposons  $g = 2$ ,  $b \geq 2$ . Alors  $E_2$  est inversible, et  $h^1(E_1) = h^0(E_2) = b - 1$  donne  $\text{deg}(E_1) \leq 2$  (par le lemme de Clifford),  $\text{deg}(E_2) \leq 2b - 2$  (par Riemann-Roch). Comme  $\text{deg}(E) \geq 4b - 4$  par le résultat de [5], on doit avoir  $\text{deg}(E_1) = \text{deg}(E_2) = b = 2$ ,  $E_1 \cong \omega_C$  (parce que  $h^1(E_1) > 0$ ), donc  $p_g(S) = h^0(E_1) = 2$ . De plus, on a  $q(S) \leq p_g(S) = 2$  car  $S$  est de type général, donc par (1),  $q(S) = 2$ . Maintenant par [1], on voit que  $f$  est isotriviale et lisse. Nous devons montrer que ce cas n'existe pas.

En effet, regardons la suite exacte

$$0 \rightarrow f^*\omega_C \rightarrow \Omega_S^1 \rightarrow \omega_{S/C} \rightarrow 0. \tag{2}$$

Puisque  $h^0(f^*\omega_C) = 2$ ,  $h^0(\omega_{S/C}) = h^0(f_*\omega_S \otimes \omega_C^{\otimes -1}) = 1$ , il suffit de montrer que la suite (2) est scindée, parce que dans ce cas

$$q(S) = h^0(\Omega_S^1) = h^0(f^*\omega_C) + h^0(\omega_{S/C}) = 3,$$

contradiction.

Comme  $f$  est isotriviale et lisse, il y a un changement de base étale  $\pi: C_1 \rightarrow C$  tel que le pull-back  $f_1: S' \rightarrow C_1$  soit une fibration triviale:

$$\begin{array}{ccc} S' \cong & C_1 \times & C_2 \\ f_1 = p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ & C_1 & C_2 \end{array}$$

Le pull-back de (2) devient

$$0 \rightarrow f_1^* \omega_{C_1} \rightarrow \Omega_{S'}^1 \rightarrow \omega_{S'/C_1} \rightarrow 0 \quad (2')$$

qui est scindée parce que  $\omega_{S'/C_1} \cong p_2^* \omega_{C_2}$ . Comme  $\pi$  est galoisien, il y a un groupe  $G$  d'automorphismes de  $S'$  tel que  $S$  soit le quotient de  $S'$  par l'action de  $G$ . Il est clair que  $G$  respecte la décomposition de  $S'$ :  $g(x, y) = (gx, gy)$ , où  $g \in G$ ,  $x \in C_1$ ,  $y \in C_2$ , donc les sous-fibrés  $f_i^* \omega_{C_i}$  ( $i = 1, 2$ ) de  $\Omega_{S'}^1$ , sont stable sous l'action induite de  $G$  sur  $\Omega_{S'}^1$ . Par conséquent l'image de  $p_2^* \omega_{C_2}$  dans  $\Omega_S^1$  est un sous-fibré inversible qui se projette surjectivement sur  $\omega_{S/C}$ , d'où (2) est scindée.

Le théorème est démontré dans le cas  $b > 0$ .

## §2. Le cas où $b = 0$

Nous raisonnons par absurde, en supposant  $q(S) \geq 3$ .

LEMME: *Soit  $S$  une surface de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau, et supposons  $q(S) \geq 3$ . Alors l'image de l'application d'Albanese de  $S$  est une courbe.*

DÉMONSTRATION: Par le §1, la base de la fibration  $f: S \rightarrow C$  induite par  $\Phi_K$  est rationnelle.

Supposons d'abord qu'il y a deux 1-formes holomorphes de  $S$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , linéairement indépendantes dans  $H^0(\Omega_S^1)$ , telles que  $\alpha \wedge \beta = 0$ . Dans ce cas il est bien connu [6, Proposition X.9] qu'il y a une fibration  $\phi: S \rightarrow E$ , où  $E$  est une courbe de genre supérieur ou égal à 2, telle que  $\alpha$  et  $\beta$  soient les images réciproques de deux 1-formes holomorphes sur  $E$ . Le diviseur  $D$  des zéros de  $\alpha$  est donc contenu dans un nombre fini de fibres de  $\phi$ . Nous pouvons supposer que  $\alpha$  soit l'image réciproque d'une forme holomorphe assez générale sur  $E$ , de sorte que  $D$  contienne une fibre  $V$  assez générale de  $\phi$ , qui n'est pas dans la partie fixe de  $|K_S|$ . De plus  $f$  et  $\phi$  sont deux fibrations différentes de  $S$ , ce qui entraîne qu'aucun diviseur dans la partie mobile de  $|K_S|$  ne contient  $V$ . Maintenant si l'image d'Albanese de  $S$  est une surface, on peut trouver une autre 1-forme  $\gamma$  telle que  $\alpha \wedge \gamma \neq 0$ . Mais dans ce cas  $\text{div}(\alpha \wedge \gamma)$  contient  $V$ , contradiction. Cette image est donc une courbe.

Nous pouvons maintenant supposer que pour toutes formes  $\alpha$  et  $\beta$  linéairement indépendantes dans  $H^0(\Omega_S^1)$ ,  $\alpha \wedge \beta \neq 0$ . Soient  $F$  une fibre assez générale de  $f$ , et  $x$  un point de  $F$  qui n'est pas contenu dans la partie fixe de  $|K_S|$ . Parce que  $h^0(\Omega_S^1) = q(S) \geq 3$ , il existe une forme  $\alpha \in H^0(\Omega_S^1)$  qui s'annule sur  $x$ . Montrons que  $\alpha$  s'annule sur la fibre  $F$  entière:

En effet, sinon il y a un autre point général  $y$  sur  $F$  tel que  $\alpha$  n'est pas nulle sur  $y$ . Par la généralité de  $F$ , on peut trouver une autre forme  $\beta$

telle que  $\alpha \wedge \beta$  ne s'annule pas sur  $y$ . Le diviseur  $D$  des zéros de  $\alpha \wedge \beta$  est donc un diviseur dans  $|K_S|$  qui passe par  $x$  mais pas par  $y$ , ce qui n'est pas possible parce que  $x$  n'est pas contenu dans la partie fixe de  $|K_S|$ , et la partie mobile de  $|K_S|$  est composée de fibres de la fibration  $f$ .

Maintenant comme la base  $C$  de  $f$  est isomorphe à  $\mathbf{P}^1$ , on peut trouver une fonction  $s$  sur  $C$ , avec un pôle simple sur l'image de  $F$ , et holomorphe ailleurs.  $f^*s$  est alors une fonction sur  $S$  telle que  $(f^*s)\alpha$  soit aussi une forme holomorphe. Mais ceci contredit notre hypothèse, puisque  $(f^*s)\alpha$  et  $\alpha$  sont deux formes linéairement indépendantes dans  $H^0(\Omega_S^1)$  avec  $\alpha \wedge (f^*s)\alpha = 0$ . CQFD

Maintenant soit  $\rho: S \rightarrow S'$  la contraction des courbes exceptionnelles de  $S$  ( $S'$  est donc le modèle minimal de  $S$ ),  $K'$  un diviseur canonique effectif de  $S'$ ,  $F' = \rho(F)$ .  $K'$  est linéairement équivalent à  $(p_g(S) - 1)F'$  plus une partie fixe  $Z$ . On a

$$9p_g(S) - 18 \geq 9\chi(\mathcal{O}_S) \geq K'^2 \geq (p_g(S) - 1)F'K',$$

$$K'F' \geq (p_g(S) - 1)F'^2,$$

donc

$$K'F' \leq 9\left(1 - \frac{1}{p_g - 1}\right),$$

et

$$K'F' + F'^2 \leq \left(1 + \frac{1}{p_g - 1}\right)K'F' \leq 9\left(1 - \frac{1}{(p_g - 1)^2}\right) < 9,$$

ce qui donne par la formule d'adjonction

$$g = g(F') \leq p_a(F') = \frac{1}{2}(K'F' + F'^2) + 1 \leq 5.$$

Par [1], on a  $q(S) \leq g$ ; de plus si  $q(S) = g$ , la fibration  $f$  sera triviale, ce qui n'est évidemment pas notre cas (par exemple parce que  $S$  n'est pas réglée), donc  $q(S) < g$ , ce qui nous laisse 3 possibilités à exclure: i)  $q(S) = 4, g = 5$ ; ii)  $q(S) = 3, g = 4$ ; iii)  $q(S) = 3, g = 5$ .

Le lemme nous donne une fibration  $\phi: S \rightarrow E$  induite par l'application d'Albanese de  $S$ , où  $E$  est l'image de  $S$  dans  $\text{Alb}(S)$ , qui est donc une courbe lisse avec  $g(E) = q(S)$  [6, V. 15].  $\phi$  induit un morphisme surjectif de  $F$  sur la courbe  $E$ :

$$\psi: F \rightarrow E.$$

Puisque  $\psi$  n'est pas un isomorphisme, la formule de Riemann-Hurwitz

donne  $g \geq 2g(E) - 1 = 2q(S) - 1$ , ce qui élimine les deux premières possibilités. Pour la troisième,  $\psi$  est un morphisme étale de degré 2. On en déduit donc un morphisme  $\tau$  au-dessus de  $C$  qui est génériquement de degré 2:

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{\tau} & T = E \times C \\
 f \searrow & & \swarrow p_2 \\
 & C \cong \mathbf{P}^1 &
 \end{array}$$

où  $\tau$  restreint à  $F$  est le morphisme  $\psi$ . (Remarquons que  $\tau$  est partout défini parce que  $p_1 \circ \tau$  et  $p_2 \circ \tau$  le sont.)

Par construction, le diviseur de branchement  $D$  de  $\tau$  dans la surface  $T$  est composé d'un nombre fini de fibres de  $p_2$ . Comme  $D$  est lisse, on peut factoriser  $\tau$  comme suit:

$$\tau: S \xrightarrow{\rho} S' \xrightarrow{\tau'} T,$$

où  $\rho$  est un morphisme birationnel,  $\tau'$  un revêtement double. D'après les formules bien connues sur les revêtement doubles des surfaces (cf. [7]), et compte tenu de  $p_g(T) = 0$ , nous avons  $|K_{S'}| = \tau'^*|K_T + \delta|$ , où  $\delta$  est un élément dans  $\text{Pic}(T)$  tel que  $2\delta \equiv D$ . Puisque  $D$  est une somme de fibres de  $p_2$ , il y a un élément  $\nu$  dans  $\text{Pic}(C)$  et un élément  $\eta$  dans  $\text{Pic}^0(E)$  tels que

$$\delta \equiv p_1^*(\eta) + p_2^*(\nu).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 |K_T + \delta| &= |p_1^*(K_E + \eta) + p_2^*(\nu - 2p)| \\
 &\supset |p_1^*(K_E + \eta)| + p_2^*(\nu - 2p),
 \end{aligned}$$

où  $p$  est un point sur  $C$ . Mais  $h^0(K_E + \eta) \geq 2$ , donc  $|p_1^*(K_E + \eta)|$  restreint à une fibre de  $p_2$  est un système linéaire à dimension positive, ce qui entraîne que  $|K_{S'}|$  bouge sur les fibres générales de la fibration  $S' \rightarrow C$  induite par  $f$ , ou  $|K_S|$  bouge sur les fibres générales de  $f$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $\Phi_K$  se factorise par  $f$ . Ce dernier cas est donc éliminé.

Le théorème est entièrement démontré.

Les bornes données dans le théorème sont les meilleures possibles dans leur sens. Dans [4], Beauville a construit une famille illimitée de surfaces pour chaque paire de  $b$  et  $q$  vérifiant le théorème: son exemple 1 a  $b = q = 0$  ( $g = 2$ ); exemple 2 a  $b = 0, q = 2$  ( $g = 3$ ); la variante de l'exemple 2 a  $b = 0, q = 1$  ( $g = 2$ ); exemple 3 a  $b = q = 1$  ( $g = 2$ ). Nous finissons cette note par un autre exemple:

EXEMPLE: Une famille de surfaces de type général avec  $q(S) = 1$ , dont le système canonique est composé d'un pinceau de courbes de genre 3 à base elliptique.

Soient  $E$  une courbe elliptique,  $\eta$  un élément d'ordre 2 dans  $\text{Pic}^0(E)$ . Dans le produit  $E \times \mathbf{P}^1$ , prenons un diviseur  $D$  composé de 6 fibres distinctes de la deuxième projection  $p_2$ . Alors la classe du diviseur

$$\delta' = p_1^*(\eta) + p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3))$$

est un élément dans  $\text{Pic}(E \times \mathbf{P}^1)$  tel que  $2\delta' \equiv D$ . On peut donc construire un revêtement double

$$r: T \rightarrow E \times \mathbf{P}^1$$

ramifié le long de  $D$ , tel que  $K_T \equiv r^*(K_{E \times \mathbf{P}^1} + \delta')$ , et

$$p_g(T) = p_g(E \times \mathbf{P}^1) + h^0(E \times \mathbf{P}^1, \mathcal{O}(K_{E \times \mathbf{P}^1} + \delta')) = 0$$

(voir [7]).  $T$  a une fibration en courbes de genre 2 sur  $E$ :

$$\phi: T \rightarrow E,$$

qui est induite par  $p_1: E \times \mathbf{P}^1 \rightarrow E$ . La fibration  $\phi$  est isotriviale et lisse, mais pas triviale. Le lieu de ramification de  $r$  dans  $T$  est composé de 6 sections de  $\phi$ ; soient  $C_1$  et  $C_2$  deux d'entre elles. On a  $2C_1 \equiv 2C_2$ .

Maintenant soient  $a$  un entier  $\geq 2$ ,  $B$  un diviseur (réduit) dans  $E$  composé de  $2a$  points distincts. Il y a un diviseur  $A$  de degré  $a$  dans  $E$  tel que  $2A \equiv B$ . Soient  $\delta = \phi^*A + C_1 - C_2$ ,  $R = \phi^*B$ . Comme  $2\delta \equiv R$  dans  $T$ , il y a un revêtement double ramifié le long de  $R$ :

$$s: S \rightarrow T,$$

tel que  $K_S \equiv s^*(K_T + \delta)$ . La fibration  $\phi$  induit une fibration isotriviale

$$f: S \rightarrow E$$

dont les fibres générales sont des courbes de genre 3. Les formules des revêtements doubles donnent

$$p_g(S) = a, \quad q(S) = 1, \quad K_S^2 = 8a.$$

De plus  $p_g(T) = 0$  dit que  $|K_S| = s^*|K_T + \delta|$ , mais  $|K_T + \delta|$  restreint à une fibre de  $\phi$  ne bouge pas, donc  $|K_S|$  restreint à une fibre de  $f$  ne bouge pas, ce qui veut dire que  $\Phi_{K_S}$  se factorise par  $f$ .

### Bibliographie

- [1] A. Beauville: L'inégalité  $p_g \geq 2q - 4$  pour les surfaces de type général. Appendice à O. Debarre: "Inégalités numériques pour les surfaces de type général". *Bull. Soc. Math. France* 110 (1982) 319–346.
- [2] E. Bombieri: Canonical models of surfaces of general type, *Publ. Math. IHES* 42 (1973) 171–219.
- [3] G. Xiao: Finitude de l'application bicanonique des surfaces de type général, à paraître.
- [4] A. Beauville: L'application canonique pour les surfaces de type général, *Inv. Math.* 55 (1979) 121–140.
- [5] T. Fujita: On Kähler fiber spaces over curves, *J. Math. Soc. Japan* 30 (1978) 779–794.
- [6] A. Beauville: *Surfaces Algébriques Complexes*, *Astérisque* 54, SMF (1978).
- [7] U. Persson: Double coverings and surfaces of general type. In: *Algebraic Geometry, Springer Lecture Notes in Math.* 687 (1978).

(Oblatum 1-XI-1983)

Département de Mathématiques  
Université de Paris-Sud  
Bâtiment 425, 91405 Orsay  
France

*Current address:*  
Department of mathematics  
East China normal University  
3663 Zhongsan Road (Northern)  
Shanghai 200062  
China