COMPOSITIO MATHEMATICA

FRANÇOIS LAUBIE

Sur la ramification des extensions de Lie

Compositio Mathematica, tome 55, nº 2 (1985), p. 253-262

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__55_2_253_0>

Compositio Mathematica 55 (1985) 253-262.

SUR LA RAMIFICATION DES EXTENSIONS DE LIE

François Laubie

Abstract

Soit K un corps local de caractéristique résiduelle $p > 0$; une extension galoisienne infinie de K dont l'extension résiduelle est finie et dont le groupe de Galois est un groupe de Lie p-adique s'appelle une extension de Lie. Les extensions de Lie ont été étudiées par S. Sen [6] dans le cas où $\mathrm{car}(K) = 0$ et par J.-P. Wintenberger [8] dans le cas où $\mathrm{car}(K) = p$.

Soit G le groupe de Galois d'une extension galoisienne, éventuellement infinie, d'un corps local; la suite des groupes de ramification en numérotation supérieure qu'on note habituellement $(G^x)_{x \geqslant -1}$ sera notée ici $(G(x))_{x \geqslant -1}$, comme dans [6]. On dit que deux extensions galoisiennes de corps locaux de groupes de Galois respectifs G et G' sont identiquement ramifiées s'il existe un isomorphisme f de G sur G' tel que $f(G(x)) = G'(x)$ pour tout réel $x \geqslant 0$; un tel f s'appelle un isomorphisme de ramification.

Soit p un nombre premier; dorénavant, tous les corps locaux que l'on considère sont de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle p.

Soit K un corps local d'indice de ramification absolu e. On sait [2] que toute extension galoisienne finie totalement ramifiée de K est identiquement ramifiée à une extension galoisienne d'une extension finie d'indice de ramification e sur $\mathbb{Q}_p$.

L'objet de cet article est de généraliser ce résultat aux extensions de Lie dont le groupe de Galois est un pro-p-groupe (voir le théorème 1 du §4). Les trois premiers § établissent des résultats intermédiaires nécessaires à la démonstration qui est achevée au §4.

Je remercie J.-P. Serre pour son aide et ses conseils pendant la préparation de ce travail.

§1 Stabilisation de la ramification dans les extensions de lie

Si G est un groupe et m un entier $\geqslant 1$, la notation G^m est réservée à l'ensemble des puissances $m^{\text{ème}}$ des éléments de G.

Soit K un corps local d'indice de ramification absolu e et soit L une extension de Lie totalement ramifiée de K de groupe de Galois G.

Considérons d'abord le cas où l'extension L/K est abélienne; alors G est un produit direct fini de groupes isomorphes à $\mathbb{Z}_p$ et d'un groupe fini.

PROPOSITION 1: *Supposons que l'extension de Lie L/K soit abélienne; alors $G(x)^p = G(x+e)$ pour tout réel $x > e/p - 1$.*

DÉMONSTRATION: Il s'agit d'un résultat bien connu de la théorie du corps de classe local lorsque G est fini et lorsque le corps résiduel de K est quasi-fini (voir par exemple [4]); cela reste vrai lorsque le corps résiduel de K est quelconque ([2], th. 1). Enfin, si G est infini, soit $x > e/p - 1$ et soit $y > x + e$; $G(y)$ est un sous-groupe d'indice fini de G (cf. [4] ou [6]); d'après le théorème de Herbrand ([7], ch. IV, §3), on a donc $[G(x)/G(y)]^p = G(x+e)/G(y)$; donc, pour tout $y > x + e$, $G(x+e) = G(x)^p G(y)$; mais $G(x)^p$ est un sous-groupe fermé de G et $(G(y))_{y > x+e}$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 1; il s'ensuit que $G(x+e) = G(x)^p$. □

Passons maintenant au cas général où L/K est une extensions de Lie totalement ramifiée dont le groupe de Galois G n'est pas nécessairement abélien. Les propriétés suivantes sont conservées:

- Pour tout réel $x \geqslant 0$, $G(x)$ est un sous-groupe ouvert de G ([6], lemme 4.4); autrement dit: L/K est une extension arithmétiquement profinie (en abrégé APF) dans la terminologie de Fontaine [1]; en particulier, l'ensemble des sauts de ramification supérieurs de L/K est discret dans $\mathbb{R}$;
- Il existe un réel x_0 tel que $G(x)^p = G(x+e)$ dès que $x \geqslant x_0$ ([6], prop. 4.5); on ignore, malheureusement, s'il est possible de choisir un tel x_0 ne dépendant que de e et du groupe "abstrait" G.

Ces résultats permettent de décrire avec précision la filtration de ramification d'un sous-groupe ouvert de G. On peut résumer la proposition suivante en disant que la ramification de L/K "se stabilise"; ce phénomène fut découvert par Tate [8] et étudié par Wyman [10] pour les $\mathbb{Z}_p$-extensions.

PROPOSITION 2: *Il existe un réel x_1 vérifiant les conditions suivantes*:

(i) *Pour tout $x \geqslant x_1$ et tout $\epsilon > 0$ assez petit, l'élévation à la puissance p induit un isomorphisme de $G(x)/G(x+\epsilon)$ sur $G(x+e)/G(x+e+\epsilon)$;*

(ii) *Pour tout $x \geqslant x_1$, $G(x) = \{\sigma \in G(x_1) \mid \sigma^p \in G(x+e)\}$;*

(iii) *Si u désigne la fonction d'ordre de la filtration $(G(x))_{x \geqslant 0}$, i.e. si $u(\sigma) \geqslant x \Leftrightarrow \sigma \in G(x)$, alors pour tout $\sigma \in G(x_1)$, $u(\sigma^p) = u(\sigma) + e$;*

(iv) *Si, parmi les sauts de ramification supérieurs $u_1 < u_2 < \dots < u_n < \dots$ de L/K, $u_s, u_{s+1}, \dots, u_{s+t-1}$ désignent ceux qui sont dans l'intervalle $[x_1, x_1 + e[$, alors pour tout entier $k \geqslant 0$, on a $u_{s+k} = u_{s+r} + me$ avec $r \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ et $k = mt + r$.*

DÉMONSTRATION: Soit $x \geqslant x_0$ de sorte que $G(x)^p = G(x+e)$; l'élévation à la puissance p induit une surjection de $G(x)/G(x+\epsilon)$ sur $G(x+e)/G(x+e+\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$; en particulier si $v \geqslant x_0 + e$ est un saut de ramification alors $v - e$ en est aussi un; on en déduit qu'en notant $v_1, v_2, \dots, v_t$ les sauts de ramification qui sont dans l'intervalle

$[x_0, x_0 + e[$, tout saut de ramification $v \geqslant x_0$ s'écrit $v = v_r + me$ avec $r \in \{1, 2, \ldots, t\}$ et $m \in \mathbb{N}$.

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \min\{v_2 - v_1, \ldots, v_t - v_{t-1}, v_1 + e - v_t\}$; alors $\epsilon < |v - v'|$ quels que soient les sauts de ramification v et $v' \geqslant x_0$. Pour $x \geqslant x_0$, les quotients $G(x)/G(x+\epsilon)$ étant des groupes abéliens finis, il existe un réel $x_1 \geqslant x_0$ tel que, pour tout $x \geqslant x_1$, l'élévation à la puissance p induise un isomorphisme de $G(x)/G(x+\epsilon)$ sur $G(x+e)/G(x+e+\epsilon)$; les autres assertions de la proposition 2 sont alors faciles à vérifier. □

Remarque: Il serait intéressant de savoir si l'on peut choisir pour x_1 une constante ne dépendant que de e et de G.

§2 Filtrations de lie et filtrations de ramification

On conserve les notations du § précédent et on rappelle que la notation G^m (m entier $\geqslant 1$) est réservé à l'ensemble des puissances $m^{\text{ème}}$ des éléments de G.

On appelle filtration de Lie de G une filtration $(G_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant les axiomes suivants:

(L 1) les G_n forment une suite décroissante de sous-groupes ouverts de G, distingués dans G_1 et tels que $\bigcap_{n \geqslant 1} G_n = \{1\}$;

(L 2) pour tout $n \geqslant 1$, $G_n = \{\sigma \in G_1 \mid \sigma^p \in G_{n+1}\}$;

(L 3) pour tout $n \geqslant 2$, $G_{n+1} = G_n^p$;

(L 4) si $\sigma \in G_n$, $\tau \in G_m$ alors $\sigma\tau\sigma^{-1}\sigma^{-1} \in G_{n+m}$;

(en particulier les quotients G_n/G_{2n} sont abéliens).

Un groupe de Lie p-adique G possède toujours une filtration de Lie $(G_n)_{n \geqslant 1}$, G_1 est alors un pro-p-groupe, il est dit p-saturé dans la terminologie de Lazard ([3], ch. III, §3) et pour tout $n \geqslant 2$, on a $(G_n : G_{n+1}) = p^d$ où d est la dimension de G en tant que groupe analytique sur $\mathbb{Q}_p$ ([3], Loc. cit.).

Si $(G_n)_{n \geqslant 1}$ est une filtration de Lie de G, S. Sen a montré [6] l'existence d'une constante c telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $G(ne + c) \subset G_n \subset G(ne - c)$; c'était une conjecture de J.-P. Serre. On ignore s'il est possible de choisir un tel c ne dépendant que de p, de e et de la filtration $(G_n)_{n \geqslant 1}$. Par contre il est possible de choisir de cette façon une constante c' telle que $G(ne + c') \subset G_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et cela, pour des filtrations $(G_n)_{n \geqslant 1}$ plus générales que les filtrations de Lie.

Définition: On appelle pseudo-filtration de Lie de G, une filtration $(G_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant les axiomes (L 1), (L 2), (L 3) et l'axiome (L′4) suivant:

(L′4) il existe un entier ν tel que, pour tout $n \geqslant \nu$, le quotient $G_n/G_{2n-\nu}$ est abélien.

Lemme 1: *Soit H un p-sous-groupe ouvert de G (i.e.: un sous-groupe ouvert qui est un pro-p-groupe). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit H_k le sous-groupe de G*

engendré par les $(p^k)^{\text{ème}}$ *puissances des éléments de* H. *Il existe un entier* $N = N(H)$ *tel que* $(H_{N+n})_{n \geqslant 1}$ *soit une pseudo-filtration de Lie.*

DÉMONSTRATION: Soit $(G_n)_{n \geqslant 1}$ une filtration de Lie de G. Comme les H_k forment un système fondamental de voisinages ouverts de 1 ([3], ch. III, §3), on a $H_k \subset G_1$ pour tout k assez grand. La conclusion du lemme demeure inchangée si l'on remplace H_n par H_{n+k} pour tout $n \geqslant 0$; on peut donc supposer que $H_1 \subset G_1$. Il existe alors un entier $\nu \geqslant 1$ tel que $G_{n+\nu} \subset H_n \subset G_n$ pour tout $n \geqslant 1$ ([3], loc. cit.). On a alors $G_{2n} \subset H_{2n-\nu} \subset H_n \subset G_n$ pour tout $n \geqslant \nu$. Le quotient G_n/G_{2n} étant abélien, $H_{2n-\nu}$ est un sous-groupe distingué de H_n et $H_n/H_{2n-\nu}$ est abélien.

Pour tout $n \geqslant \nu$, H_n/G_{2n} est abélien; l'élévation à la puissance p est donc un homomorphisme surjectif de groupes de H_n sur H_{n+1}/G_{2n+1} et on a: $H_{n+1} = H_n^p G_{2n+1} = H_n^p$ car $G_{2n+1} = G_{2n}^p \subset H_n^p$, pour $n \geqslant \nu$. On en déduit que pour tout $k \geqslant 0$, $H_{\nu+k} = H_\nu^{p^k}$ est distingué dans H_ν.

Pour tout $n \geqslant \nu$, G_n/H_n est abélien et $G_{n+1} = G_n^p$; par suite l'élévation à la puissance p induit un homomorphisme de groupes surjectif de G_n/H_n sur G_{n+1}/H_{n+1}; mais G_n/H_n étant fini, il existe un entier $N \geqslant \nu$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, ces surjections deviennent des isomorphismes; on a, en particulier, $H_n = \{\sigma \in G_n \mid \sigma^p \in H_{n+1}\}$. Plus précisément, si $\sigma \in G_1$ avec $\sigma^p \in H_{n+1}$ alors $\sigma \in G_n$ et, d'après ce qui précède, $\sigma \in H_n$; donc $H_n = \{\sigma \in G_1 \mid \sigma^p \in H_{n+1}\}$ pour $n \geqslant N$.

Par suite l'entier N satisfait à la conclusion du lemme. □

REMARQUES:

1. Les pseudo-filtrations de Lie de G sont toutes fournies par le lemme 1.
2. Pour tout réel x assez grand, $(G(x+ne))_{n \geqslant 1}$ est une pseudo-filtration de Lie.
3. Soit E un corps local d'indice de ramification absolu e et soit F une extension galoisienne infinie de E de groupe de Galois $\mathscr{G}$. Pour que F/E soit une extension de Lie, il faut et il suffit qu'il existe un réel $x > 0$ vérifiant: $\mathscr{G}(x)$ est ouvert dans $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}(x)^{p^2} = \mathscr{G}(x+2e)$ et $\mathscr{G}(x)/\mathscr{G}(x+2e)$ est abélien; de plus, si $p > 2$, ces deux dernières conditions se simplifient en: $\mathscr{G}(x)^p = \mathscr{G}(x+e)$ et $\mathscr{G}(x)/\mathscr{G}(x+e)$ est abélien. Cela résulte immédiatement des critères d'analyticité de Lazard ([3], loc. cit.).

LEMME 2: *Soient* I *et* J *deux p-sous-groupes ouverts de* G *tels que* $I \subset J$. *Pour toute partie* A *de* G, *on note* A_n *le sous-groupe de* G *engendré par les* $(p^n)^{\text{ème}}$ *puissances des éléments de* A. *Il existe un entier* $N = N(I, J)$ *vérifiant les propriétés suivantes*:

- *pour tout sous-groupe* H *de* J_N *contenant* I_N, $(H_n)_{n \geqslant 1}$ *est une pseudo-filtration de Lie de* G;
- *pour tout entier* $m \geqslant 0$ *et pour tout sous-groupe* H' *de* G *tel que*

$I_{N+m} \subset H' \subsetneqq J_{N+m}$, il existe un sous-groupe H de G tel que $I_N \subset H \subsetneqq J_N$ et $H' = H^{p^m}$.

DÉMONSTRATION: Soit $(G_n)_{n \geqslant 1}$ une filtration de Lie de G. Comme dans la démonstration du lemme 1, on peut supposer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait: $G_{2n} \subset I_n \subset J_n \subset G_n$. Quitte à translater leur numérotations, on peut aussi supposer que $(I_n)_{n \geqslant 1}$ et $(J_n)_{n \geqslant 1}$ sont des pseudo-filtrations de Lie.

Soit $n_1 \geqslant n_0$ un entier tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, l'élévation à la puissance p induise un isomorphisme de groupes abéliens de J_{n-1}/I_{n-1} sur J_n/I_n. Soient n et n' deux entiers tels que $n' \geqslant n \geqslant n_1$ et soit H' un sous-groupe de $J_{n'}$ contenant $I_{n'}$; appellons H le sous-groupe de J_n contenant I_n tel que H/I_n soit l'image réciproque de $H'/I_{n'}$ par l'élévation à la puissance $p^{n'-n}$; on a: $H' = H^{p^{n'-n}} I_{n'} = H^{p^{n'-n}} I_n^{p^{n'-n}} = H^{p^{n'-n}} = H_{n'-n}$. On en déduit que l'application $H \mapsto H_{n'-n}$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes de J_n contenant I_n sur l'ensemble des sous-groupes de $J_{n'}$ contenant $I_{n'}$. Or, d'après le lemme 1, il existe un entier $n_H \geqslant n_1$ tel que $(H_{n_H+k})_{k \geqslant 1}$ soit une pseudo-filtration de Lie de G. Dans ces conditions, il est clair que l'entier $N = \max n_H$, H parcourant l'ensemble fini des sous-groupes de J_{n_1} contenant I_{n_1}, vérifie les conclusions de l'énoncé. □

Précisons maintenant les rapports existant entre les pseudo-filtrations de Lie et les filtrations de ramification.

Pour tout sous-groupe ouvert H de G, on note $v_H = \inf\{ v \geqslant 0 \mid \forall \epsilon > 0, G(v+\epsilon) \subset H\}$. Si $H \neq G$, v_H est le réel vérifiant $G(v_H + \epsilon) \subset H$ pour tout $\epsilon > 0$ mais $G(v_H) \not\subset H$; en outre, si H est distingué dans G, le théorème de Herbrand ([7], ch. IV, §3) montre que v_H est le plus grand saut de ramification de l'extension de K de groupe de Galois G/H.

Soit $(H_n)_{n \geqslant 1}$ une pseudo-filtration de Lie de G. Il existe un entier δ tel que, pour tout $n \geqslant \delta$, H_n/H_{n+d+3} soit un groupe abélien, d désignant la dimension de G. Dans ces conditions, S. Sen a montré ([6], §3) l'existence d'un entier n_H tel que, pour tout $n \geqslant n_H$, on ait $v_{H_{n+1}} = v_{H_n} + e$. Un calcul simple, fondé sur la démonstration de Sen, montre qu'on peut choisir $n_H = (2+d)(1+d+[\log_p(e(G\colon H_\delta))])$ où $\log_p$ désigne le logarithme en base p. Cette valeur ne dépend pas de la ramification de L/K.

En combinant ce résultat avec le lemme 2, on obtient immédiatement la:

PROPOSITION 3: *Soient G un groupe de Lie p-adique et e un entier $\geqslant 1$. Pour tout couple (I, J) de p-sous-groupes ouverts de G tels que $I \subset J$, il existe un entier $\nu(I, J)$ vérifiant la propriété suivante: pour tout corps local K d'indice de ramification absolu e, pour toute extension de Lie L de K de groupe de Galois G, pour tous entiers $n' \geqslant n \geqslant \nu(I, J)$ et pour tout sous-groupe H' de G tel que $I^{p^{n'}} \subset H' \subsetneqq J^{p^{n'}}$, il existe un sous-groupe H de G tel que $H' = H^{p^{n'-n}}$, $I^{p^n} \subset H \subsetneqq J^{p^n}$ et $v_{H'} = v_H + (n'-n)e$.*

§3 Extensions de lie identiquement ramifiées

Soient K et K' deux corps locaux de même caractéristique résiduelle p et de même indice de ramification absolue e. Comme dans les § précédents, L désigne une extension de Lie de K de groupe de Galois G. Soit L′ une extension galoisienne de K' de groupe de Galois G' isomorphe à G.

On rappelle qu'un isomorphisme de ramification est un isomorphisme de groupes de Galois qui respecte les filtrations de ramification.

Lemme 3: *Supposons que L/K est totalement ramifiée. Alors il existe un sous-groupe ouvert G_0 de G tel que tous les sous-groupes ouverts H de G_0 distingués dans G vérifient la propriété $(T\,R)$ suivante:*

$(T\,R)$: *s'il existe un isomorphisme de groupes f de G sur G' induisant un isomorphisme de ramification de G/H sur $G'/f(H)$, alors L'/K' est totalement ramifiée.*

Démonstration: Comme $G = \varprojlim G/H$, H parcourant l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de G, il existe un sous-groupe ouvert distingué G_0 de G tel que, pour tout sous-groupe ouvert H de G_0 distingué dans G, le nombre minimal de générateurs de G/H soit égal au nombre minimal de générateurs topologiques de G. Montrons qu'un tel sous-groupe H satisfait à la condition $(T\,R)$. Soit f un isomorphisme de groupes de G sur G'; on note $H' = f(H)$ et $f_{G/H}$ l'isomorphisme de G/H sur G'/H' induit par f. Supposons que $f_{G/H}$ soit un isomorphisme de ramification. Soit I' le sous-groupe d'inertie de G'; on note M' (resp. L'_0) le sous-corps des invariants de L' sous l'action de H' (resp. de I'). Comme M'/K' est totalement ramifiée, M' et L'_0 sont des extensions linéairement disjointes sur K'; il s'ensuit que $G'/H' \cap I' \simeq G'/H' \times G'/I'$; pour que les nombres de générateurs topologiques minimaux de G' et G'/H' coïncident, il faut donc que $I' = G'$. □

On se donne maintenant un isomorphisme de groupes f de G sur G'. Pour tout sous-groupe H de G, on note $H' = f(H)$, f_H la restriction de f à H et, si H est distingué dans G, $f_{G/H}$ l'isomorphisme de G/H sur G'/H' induit par f.

Si H est un sous-groupe de ramification de G, il est facile de montrer, à l'aide du théorème de Herband ([7], ch. IV, §3) que, pour que f soit un isomorphisme de ramification, il faut et il suffit que f_H et $f_{G/H}$ en soient aussi.

Lemme 4: *Soit $H = G(v)$ un groupe de ramification supérieur (i.e. $v > 0$) de L/K. On suppose que H vérifie la propriété $(T\,R)$ du lemme 3 et qu'il existe $u \in]0, v[$ tel que $H \subset G(u)^p$. Alors, si $f_{G/H}$ est un isomorphisme de ramification, on a $f(G(x)) = G'(x)$ pour tout $x \leqslant u$.*

Démonstration: Comme $f_{G/H}$ est un isomorphisme de ramification, le théorème de Herband déjà cité nous dit que, pour tout x, $f(HG(x)) =$

$H'G'(x)$; en particulier, pour $x \leqslant v$, on a $f(G(x)) = H'G'(x)$; il s'ensuit que $H' = f(H) \subset f(G(u)^p) = [H'G'(u)]^p$.

Montrons que $H' \subset G'(u)$. Soit v_0 la borne supérieure des réels $x \geqslant -1$ tels que $H' \subset G'(x)$; comme $H' \subset G'(v_0)$, il suffit de voir que $v_0 \geqslant u$. Puisque H vérifie la propriété (TR), on a $v_0 \geqslant 0$. En fait $v_0 > 0$; en effet: soit w (resp. w') le plus petit saut de ramification > 0 de L/K (resp. de L'/K'); $G'(w')$ est le p-sous-groupe maximal de G', donc $f^{-1}(G'(w'))$ est le p-sous-groupe maximal de G et $f^{-1}(G'(w')) = G(w)$; par suite comme $H \subset G(w)$, on a $H' \subset G'(w')$. Supposons que $v_0 \in]0, u[$; on a alors:

$$H' \subset [H'G'(u)]^p \subset [H'G'(v_0)]^p = G'(v_0)^p;$$

comme la ramification de $G'(v_0)$ est totalement sauvage, il existe $v_1 > v_0$ tel que $G'(v_0)^p \subset G'(v_1)$, c'est-à-dire tel que $H' \subset G'(v_1)$ ce qui contredit l'hypothèse de maximalité faite sur v_0.

On a donc $H' \subset G'(u)$ et, pour $x \leqslant u$, les égalités $f(G(x)) = H'G'(x)$ deviennent $f(G(x)) = G'(x)$. □

On rappelle qu'au §2, on a posé $v_H = \inf\{v \geqslant 0 \mid \forall \epsilon > 0,\ G(v+\epsilon) \subset H\}$ pour tout sous-groupe ouvert H de G. On définit de même $v'_{H'}$ pour tout sous-groupe ouvert H' de G'.

LEMME 5: *Soit $r_0 < r_1 < \ldots < r_n < \ldots$ une suite de réels $\geqslant 0$ et soit $G = H_0 \supsetneqq H_1 \neq \ldots \supsetneqq H_n \supsetneqq \ldots$ une suite de sous-groupes ouverts de G telle que $\bigcap_{n \geqslant 0} H_n = \{1\}$. On suppose que pour tout sous-groupe H de G tel que $H_n \supsetneqq H \supset H_{n+1}$, on a $v_H = r_n$. Alors pour tout $n \geqslant 0$, $H_n = G(r_n)$ et les H_n sont tous les sous-groupes de ramification de G.*

DÉMONSTRATION: Soit $n \geqslant 1$; on a $v_{H_n} = r_{n-1}$ donc pour tout $\epsilon > 0$, $G(r_{n-1} + \epsilon) \subset H_n$; mais pour ϵ assez petit $G(r_n) \subset G(r_{n-1} + \epsilon)$ donc $G(r_n) \subset H_n$. Montrons que $H_{n+1}G(r_n) = H_n$. Comme $G(r_n) \subset H_{n+1}G(r_n)$, on a $v_{H_{n+1}G(r_n)} < r_n$; mais on a aussi $H_{n+1} \subset H_{n+1}G(r_n) \subset H_n$ donc $H_{n+1}G(r_n) = H_n$. On en déduit que $G(r_n) = H_n$; en effet: pour tous $n > m \geqslant 1$, on a $H_m = H_{m+1}G(r_m) = H_{m+2}G(r_m) = \ldots H_nG(r_m)$; or $G(r_m)$ est fermé et les H_n constituent un système fondamental de voisinages ouverts de 1; il s'ensuit que $H_m = \bigcap_{n \geqslant m} H_nG(r_m) = G(r_m)$, pour tout $m \geqslant 1$ et comme l'unique saut de ramification de l'extension de groupe de Galois $G/G(r_1)$ est r_0, on a aussi $G = G(r_0)$. Enfin, soient $u_n < u_{n+1}$ deux sauts de ramification consécutifs de L/K; il existe un entier k tel que $G(r_{k+1}) \subset G(u_{n+1}) \subsetneqq G(r_k)$ donc $u_n = v_{G(u_{n+1})} = r_k$. □

En combinant les résultats des §1, 2 *et* 3, *on obtient la*:

PROPOSITION 4: *Soit K un corps local d'indice de ramification absolu e et soit L/K une extension de Lie totalement ramifiée de groupe de Galois G. Il existe un réel x_2 vérifiant la propriété suivante*:

pour tout corps local K′ d'indice de ramification absolu e pour toute extension galoisienne L′ de K′ de groupe de Galois G′ isomorphe à G, tout *isomorphisme de groupes f de G sur G' qui induit un isomorphisme de ramification de $G/G(x_2)$ sur $G'/f(G(x_2))$ est un isomorphisme de ramification.*

DÉMONSTRATION: On suppose que l'extension de Lie L/K est totalement ramifiée. Soit x_1 le réel de la proposition 2; quitte à augmenter x_1 on peut supposer que le sous-groupe $G(x_1)$ satisfait à la condition (TR) du lemme 3.

Soit $u_1 < u_2 < \ldots < u_n < \ldots$ la suite des sauts de ramification supérieurs de L/K. On note $u_s, u_{s+1}, \ldots, u_{s+t-1}$ les sauts de ramification de L/K qui sont dans l'intervalle $[x_1, x_1 + e[$. Pour tout $n \geqslant 1$, posons $H_n = G(u_n)$. Enfin, avec les notations de la proposition 3, on pose:

$$\nu = \max_{0 \leqslant r \leqslant t-1} \nu(H_{s+r+1}, H_{s+r}) \quad \text{et} \quad x_2 = u_s + e(\nu + 2).$$

Montrons que x_2 satisfait à la conclusion de notre proposition 4.

Soit K' un corps local d'indice de ramification absolu e et soit L' une extension galoisienne de K' de groupe de Galois G' isomorphe à G. On se donne un isomorphisme de groupes f de G sur G' induisant un isomorphisme de ramification de $G/G(x_2)$ sur $G'/f(G(x_2))$. D'après le lemme 4, on a $f(G(x)) = G'(x)$ pour tout $x \leqslant x_2 - e$ et il s'agit de montrer que $f(G(x)) = G'(x)$ pour tout x.

Pour tout $n \geqslant 1$, posons $H'_n = f(G(u_n))$ et montrons que la filtration $(H'_n)_{n \geqslant 1}$ de G' associée à la suite de réels $(u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie les hypothèses du lemme 5.

Il est clair que pour $n \geqslant 1$, H'_n est un sous-groupe ouvert G', que pour $n \geqslant s$, on a $H'_{n+1} = H'^p_n$ et que $\bigcap_{n \geqslant 1} H'_n = \{1\}$. Soit H' un sous-groupe de G' tel que $H'_{n+1} \subset H' \subset H'_n$. Si $n \leqslant s + t(\nu + 1)$ alors, d'après la proposition 2, $u_n \leqslant u_s + e(\nu + 1) = x_2 - e$ et on a $G'(u_{n+1}) \subset H'_n \subsetneqq G'(u_n)$ donc $v_{H'} = u_n$. Si $n \geqslant s = t\nu$ alors on écrit $n - s - t\nu = r + mt$ avec $m \geqslant 0$ et $0 \leqslant r < t$ et, d'après la proposition 2, on a $u_n = u_{s+r+t\nu} + me$. D'après la proposition 3, il existe alors un sous-groupe H'' de G' tel que: $H'_{s+t\nu+r+1} \subset H'' \subsetneqq H'_{s+t\nu+r}$, $H' = H''^{p^m}$ et $v_{H'} = v_{H''} + me$; mais $s + t\nu + r \leqslant s + t(\nu + 1)$ donc $v_{H''} = u_{s+t\nu+r}$ *et* $v_{H'} = n$.

D'après le lemme 5, *pour tout* $n \geqslant 1$, *on a* $H'_n = G'(u_n)$ donc $f(H_n) = H'_n$ *et comme les* H'_n *sont tous les sous-groupes de ramification de* G', *pour tout* $x \geqslant 0$, *on a* $f(G(x)) = G'(x)$. □

§4 Problèmes de plongement et conclusion de la preuve

On appelle p-extension de Lie d'un corps local de caractéristique résiduelle p, une extension de Lie de ce corps local, dont le groupe de Galois est un pro-p-groupe.

Le résultat principal de cet article est le suivant:

THÉORÈME 1: *Soit K un corps local d'indice de ramification absolu e. Toute p-extension de Lie totalement ramifiée de K est identiquement ramifiée à une p-extension de Lie d'une extension finie, d'indice de ramification e, de $\mathbb{Q}_p$.*

DÉMONSTRATION: Soit L une p-extension de Lie totalement ramifiée de K. On note G son groupe de Galois, g le nombre minimal de générateurs topologiques de G et F_g le pro-p-libre à g générateurs.

Soit x_2 un réel vérifiant la propriété de la proposition 4; quitte à augmenter x_2, on peut supposer que le nombre minimal de générateurs du groupe quotient $G/G(x_2)$ est égal à g. On note encore M le corps des invariants de L sous l'action de $G(x_2)$.

On sait [2] qu'il existe une extension finie K' de $\mathbb{Q}_p$ d'indice de ramification e et une extension galoisienne finie M' de K' identiquement ramifiée à M/K.

D'après un résultat de Nguyen Quang Do ([5], corollaire 5 au théorème 4), il existe une extension finie non ramifiée K'' de K' et une extension galoisienne Ω de K'' de groupe de Galois F_g qui contient l'extension composée $M'' = K''M'$. Appelons ϕ la surjection naturelle de F_g sur $\mathrm{Gal}(M''/K'')$.

Comme M'/K' est totalement ramifiée, l'isomorphisme naturel de $\mathrm{Gal}(M''/K'')$ sur $\mathrm{Gal}(M'/K')$ est un isomorphisme de ramification. Il existe donc un homomorphisme surjectif f de G sur $\mathrm{Gal}(M''/K'')$ qui se factorise en un isomorphisme de ramification $\bar{f}$ de $\mathrm{Gal}(M/K)$ sur $\mathrm{Gal}(M''/K'')$. Comme F_g est projectif, il existe $\psi \in \mathrm{Hom}(F_g, G)$ tel que $f \circ \psi = \phi$. Soit L'' le souscorps des invariants de Ω sous l'action de $\mathrm{Ker}\, \psi$; par la théorie de Galois, ψ définit un isomorphisme de G sur $\mathrm{Gal}(L''/K'')$ qui relève $\bar{f}$; d'après la proposition 4, c'est un isomorphisme de ramification. □

REMARQUES: 1. Le théorème 1 repose sur trois bases: les résultats de Sen concernant la ramification des extensions de Lie [6], le théorème conjecturé par J.-P. Serre qui affirme que toute extension galoisienne finie totalement ramifiée d'un corps local est identiquement ramifiée à une extension d'un corps local à corps résiduel fini [2] et le théorème de plongement des p-extensions finies totalement ramifiées de Nguyen Quang Do ([5], loc. cit.). La seule obstruction qui empêche de généraliser le théorème 1 à toutes les extensions de Lie totalement ramifiées est l'absence d'une généralisation du théorème de Nguyen Quang Do à toutes les extensions galoisiennes finies totalement ramifiées.

2. Dans un précédent article [2], nous démontrions que toute extension abélienne totalement ramifiée d'un corps local K est identiquement ramifiée à une extension d'un corps local à corps résiduel fini pourvu que la caractéristique résiduelle de K soit > 2 et, quand celle-ci est égale à 2, nous annoncions que le résultat restait vrai. Cela résulte de la généralisation suivante du théorème 1.

THÉORÈME 2. *Soit K un corps local d'indice de ramification obsolu e et soit L une extension de Lie totalement ramifiée de K de groupe de Galois G. Supposons que G est produit-direct d'un pro-p-groupe et d'un groupe fini d'ordre premier à p. Alors il existe une extension fini K' de $\mathbb{Q}_p$, d'indice de ramification e, et une extension de Lie de K' identiquement ramifiée à L/K.*

DÉMONSTRATION: Par hypothèses, l'extension L/K est la composée de deux extensions galoisiennes totalement ramifiées et linéairement disjointes N/K et M/K avec $V = \mathrm{Gal}(N/K)$ isomorphe au p-sous-groupe maximal de G et $U = \mathrm{Gal}(M/K)$ cyclique fini d'ordre m premier à p. On a $U(0) = U$, $U(x) = \{1\}$ pour $x > 0$ et, pour tout $x \geqslant 0$, l'isomorphisme canonique de $U \times V$ sur G applique $U(x) \times V(x)$ sur $G(x)$.

D'après le théorème 1, il existe un corps local K' dont l'indice de ramification absolu est e est dont le corps résiduel est fini et une extension de Lie N' de K' identiquement ramifiée à N/K. Quitte à composer N'/K' avec une extension finie non ramifiée de K', on peut supposer que K' contient une racine primitive $m^{\text{ème}}$ de l'unité; alors, en désignant par π une uniformsante de K', l'extension $M' = K'(\sqrt[m]{\pi})$ de K' est cyclique, totalement et modérément ramifiée et linéairement disjointe de N'/K'. Le groupe de Galois de $M'N'/K'$ s'identifie donc à $\mathrm{Gal}(M'/K') \times \mathrm{Gal}(N'/K')$ et si f_U (resp. f_V) désigne un isomorphisme de ramification de U sur $\mathrm{Gal}(M'/K')$ (resp. de V sur $\mathrm{Gal}(N'/K')$) il est immédiat de vérifier que $f_U \times f_V$ est un isomorphisme de ramification de G sur $\mathrm{Gal}(M'N'/K')$. □

Bibliographie

[1] J.-M. FONTAINE et J.-P. WINTENBERGER: Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux. *C.R. Acad. Sc. Paris* série A 288 (1979) 367–370.

[2] F. LAUBIE: Groupes de ramification et corps résiduels. *Bull. Sc. Math.* $2^{\text{ème}}$ série 105 (1981) 309–320.

[3] M. LAZARD: Groupes analytiques p-adiques. *publication Math. IHES* 26 (1965).

[4] M.A. MARSHALL: Ramification groups of Abelian local field extensions. *Can. J. Math.* 23 2 (1971) 184–203.

[5] T. NGUYEN QUANG DO: Sur la structure galoisienne des corps locaux et la théorie d'Iwasawa. *Compositio Math.* 46 (1982) 85–119.

[6] S. SEN: Ramification in p-adic Lie extensions, *Inv. Math.* 17 (1972) 44–50.

[7] J.-P. SERRE: CORPS LOCAUX. Paris: Hermann (1968) 2^{2me} éd.

[8] J.T. TATE: p-divisible groups, Proc. of a conference on local fields, Driebergen: Springer (1967) 158–183.

[9] J.-P. WINTENBERGER: Extensions de Lie et groupes d'automorphismes de corps locaux de caractéristique p. *C.R. Acad Sc. Paris* série A 288 (1979) 367–370.

[10] B.F. WYMAN: Wildly ramified gamma extensions. *Amer. J. of Math.* 9 (1969) 135–152.

(Oblatum 24-VI-1983)

François Laubie
U.E.R. des Sciences de Limoges
123 Avenue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex
France