

COMPOSITIO MATHEMATICA

M. RAPOPORT

**Compactifications de l'espace de modules
de Hilbert-Blumenthal**

Compositio Mathematica, tome 36, n° 3 (1978), p. 255-335

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1978__36_3_255_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPACTIFICATIONS DE L'ESPACE DE MODULES DE HILBERT-BLUMENTHAL

M. Rapoport

Table des Matières

§1. Définition de l'espace de modules	257
§2. Variétés abéliennes dégénérantes	271
§3. Théorèmes rigide-analytiques	275
§4. Construction des cartes locales	296
§5. Construction de compactifications toroidales	319
§6. Applications aux formes modulaires	325

Introduction

Soient F une extension totalement réelle de degré g de $\mathbb{Q}$ et $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F . Utilisant les g immersions de F dans $\mathbb{R}$ on fait opérer $SL(2, \mathfrak{o})$ sur $\mathcal{H}^g$ le produit g fois avec lui-même du demi-plan supérieur $\mathcal{H}$. Le quotient $\mathcal{H}^g/SI(2, \mathfrak{o})$ est une variété algébrique complexe qui possède une compactification naturelle $\overline{\mathcal{H}^g/SI(2, \mathfrak{o})}$, à savoir l'adhérence de l'image de $\mathcal{H}^g/SI(2, \mathfrak{o})$ par une immersion pluri-canonique: cette compactification s'appelle la compactification de Satake. Elle est une variété projective normale qui s'obtient à partir de $\mathcal{H}^g/SI(2, \mathfrak{o})$ en y ajoutant un nombre fini de points, ces points étant en correspondance biunivoque avec les éléments du groupe de classes d'ideaux de F . Ces points à l'infini sont le plus souvent des points singuliers; leurs singularités ont été résolues par F. Hirzebruch dans le cas $g = 2$ [26], puis dans le cas général par D. Mumford [17] et I. Satake [25].

Leurs résolutions d'une telle singularité dépendent du choix de décompositions polyédrales d'un certain type du cône des éléments totalement positifs de $F \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^g$.

D'un autre coté, la variété $\mathcal{H}^g/SL(2, \mathfrak{o})$ paramétrise des variétés abéliennes polarisées de dimension g munies d'une action de $\mathfrak{o}$. (Variétés abéliennes X de dimension g , munies de $\mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(X)$, et d'un isomorphisme positif $\Lambda_{\mathfrak{o}}^2 H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{o}$.) Cela permet de définir un espace de modules sur $\mathbb{Z}$ dont l'ensemble des points complexes est $\mathcal{H}^g/SL(2, \mathfrak{o})$: l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal. On peut se demander si la compactification de Satake et ses éclatements peuvent être construits sur $\mathbb{Z}$. Le but de cet article est de construire sur $\mathbb{Z}$ ces éclatements et d'en déduire quelques conséquences pour les coefficients du développement en série de Fourier des formes modulaires par rapport aux sous-groupes de congruence de $SL(2, \mathfrak{o})$.

Voici le principe de la construction des compactifications éclatées cherchées $\tilde{M}$ de l'espace de modules M . Pour commencer, on se donne explicitement un schéma formel $\tilde{M}^\wedge$ sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ qui sera le complété formel de $\tilde{M}$ le long sa partie à l'infini $\tilde{M}^\infty$. Soit $M \subset \tilde{M}$ n'importe quelle compactification. La construction de $\tilde{M}$ procède alors en deux étapes:

(i) on montre qu'il existe un éclatement (formel) $\psi^\wedge: \tilde{M}'^\wedge \rightarrow \tilde{M}^\wedge$ à centre contenu dans un voisinage infinitésimal de $\tilde{M}^\infty \subset \tilde{M}^\wedge$, qui s'envoie par un morphisme formel $\varphi^\wedge$ dans $\tilde{M}^\wedge$.

(ii) on montre que $\varphi^\wedge$ est une modification formelle au sens de M. Artin.

Ces faits étant établis, on peut appliquer à $\psi^\wedge$ et $\varphi^\wedge$ les théorèmes d'existence de modifications formelles de M. Artin pour construire le diagramme suivant d'espaces algébriques sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ contenant M comme sous-espace ouvert, où φ et ψ ont pour complétés formels $\varphi^\wedge$ et $\psi^\wedge$:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{M}' & \\ \psi \swarrow & & \searrow \varphi \\ \tilde{M} & & \tilde{M} \end{array}$$

L'espace algébrique $\tilde{M}$ est la solution du problème.

Le problème (i) peut être ramené à un problème de construction de certaines variétés abéliennes dégénérantes qui, comme on le montre au §4, a été résolu par D. Mumford. Pour voir (ii), on trouve au §3 un critère pour décider quand un morphisme formel est une modification formelle; ce critère nous permet de tenir compte du fait que le complément de la partie à l'infini de $\tilde{M}$ représente un problème de modules. Au §5 les hypothèses de ce théorème sont vérifiées dans notre

cas à l'aide de la théorie de Raynaud(–Tate) des variétés abéliennes sur un corps valué. Au §2 les résultats de cette théorie sont énoncés sans démonstrations, sous une forme un peu plus générale que celle énoncée par Raynaud [21]. J'espère que mon travail sera complété par la parution prochaine d'une rédaction de M. Raynaud de ses beaux résultats.

Je remercie P. Deligne et D. Mumford qui ont dirigés ce travail; et H. Hironaka et M. Raynaud pour leurs suggestions.

Notations se rattachant au corps totalement réel F :

$\mathfrak{o}$ = anneau des entiers de F .

$\mathcal{D}$ = différentielle de F .

On désigne par $*$ le $\mathbb{Z}$ -dual d'un $\mathfrak{o}$ -module, p. ex, $\mathfrak{o}^* = \mathcal{D}^{-1}$.¹

U = unités de F .

U^2 = groupe des carrés d'unités.

U_+ = groupe des unités totalement positives.

§1. Définition de l'espace de modules

Ce § est rédigé d'après une lettre de P. Deligne à J.-P. Serre datée du 2 Oct. 1972.

DEFINITION 1.1: Un schéma abélien à multiplication réelle (sous-entendu par $\mathfrak{o}$) sur un schéma S est une paire (X, m) consistant en un schéma abélien $X \rightarrow S$ et un homomorphisme $m: \mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(X)$ (envoyant 1 en Id) telle que

(*) localement sur S , le $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$ -module $\text{Lie}(X)$ est libre de rang 1.

REMARQUE 1.2: (i) Pour (X, m) comme en 1.1, la dimension relative de X est égale à g .

(ii) Si $X \rightarrow S$ est un schéma abélien et si $m: \mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(X)$ est tel que en un point (géométrique) s de S , $\text{Lie}(X_s)$ est un $\mathfrak{o} \otimes k(s)$ -module libre de rang 1, alors (*) est vérifié dans un voisinage ouvert de s .

(iii) Si (X, m) est une variété abélienne à multiplication réelle, alors

¹ Plus généralement, pour tout anneau A et tout $A \otimes \mathfrak{o}$ -module libre l'homomorphisme $A \otimes \text{Tr}: A \otimes \mathcal{D}^{-1} \rightarrow A \otimes \mathfrak{o}$ induit un isomorphisme entre $\text{Hom}_{A \otimes \mathfrak{o}}(L, A \otimes \mathcal{D}^{-1}) = (A \otimes \mathfrak{o}\text{-dual de } L) \otimes_{\mathfrak{o}} \mathcal{D}^{-1}$ et $\text{Hom}_A(L, A) = A\text{-dual de } L$.

son dual (X^*, m^*) (défini de façon évidente) est encore une variété abélienne à multiplication réelle.

Seul (iii) n'est pas trivial; pour le montrer on peut supposer que $S = \text{Spec}(k)$, où k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$ (cf. 1.2(ii)).

Le premier groupe de cohomologie cristalline $H_{\text{cris}}^1(X)$ est un module libre de rang $2g$ sur l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt. Via $m: \mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(X)$, $H_{\text{cris}}^1(X)$ est un $\mathfrak{o} \otimes W(k)$ -module sans torsion, donc, comme $\mathfrak{o} \otimes W(k)$ est un anneau de Dedekind, projectif.

LEMME 1.3: *Soit F un corps de nombres d'anneau des entiers $\mathfrak{o}$. Soit X une variété abélienne définie sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$, k , et munie d'une action de $\mathfrak{o}$. Alors $H_{\text{cris}}^1(X)$ est un $\mathfrak{o} \otimes W(k)$ -module libre.*

PREUVE: Il suffit de voir que $H_{\text{cris}}^1(X) \otimes \mathbb{Q}_p$ est un $F \otimes W(k)$ -module libre et pour ce voir on peut étendre les scalaires de $W(k)$ à $\bar{W}$, la clôture algébrique du corps de fractions de $W(k)$. Mais $F \otimes \bar{W} = \coprod_{F \rightarrow \bar{W}} \bar{W}$ et ce module sur $F \otimes \bar{W}$ correspond à la donnée d'un entier non-négatif n_i pour tout plongement σ_i de F dans $\bar{W}$; il sera libre si et seulement si tous les n_i sont égaux.

Un endomorphisme de X induit un endomorphisme de $H_{\text{cris}}(X)$ de trace dans $\mathbb{Z}$; ceci étant vrai pour tous les endomorphismes de la forme $m(a)$, $a \in \mathfrak{o}$, on en déduit que $\sum n_i \sigma_i(a) \in \mathbb{Q}$ pour tout $a \in F$, d'où le fait que tous les n_i sont égaux.

c.q.f.d.

La réduction mod p de $H_{\text{cris}}^1(X)$ est le premier groupe de cohomologie de DeRham H_{DR}^1 : c'est donc un $\mathfrak{o} \otimes k$ -module libre (de rang 2). Ce qui précède s'applique aussi bien à X^* au lieu de X ; en particulier, $H_{\text{DR}}^1(X^*)$ est un $\mathfrak{o} \otimes k$ -module libre. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Lie}(X^*)^* \longrightarrow H_{\text{DR}}^1(X^*) \longrightarrow \text{Lie}(X) \longrightarrow 0$$

et l'hypothèse que $\text{Lie}(X)$ est un $\mathfrak{o} \otimes k$ -module libre on déduit que $\text{Lie}(X^*)^*$ est un $\mathfrak{o} \otimes k$ -module libre. Mais $\text{Lie}(X^*)^* = \text{Hom}_{\mathfrak{o} \otimes k}(\text{Lie}(X^*), \mathfrak{o} \otimes k) \otimes_{\mathfrak{o}} \mathcal{D}^{-1}$, et comme $\mathcal{D}^{-1}$ est un $\mathfrak{o}$ -module localement libre de rang 1, le $\mathfrak{o} \otimes k$ -module $\text{Lie}(X^*)$ est libre si et seulement si $\text{Lie}(X^*)^*$ l'est. Cela démontre (iii).

La proposition suivante implique que pour une pair (X, m) formée d'un schéma abélien X de dimension g sur un schéma de base S de caractéristique 0 et d'un homomorphisme $m: \mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(X)$ la condition (*) est automatique.

PROPOSITION 1.4: *Soient X une variété abélienne de dimension g sur un corps k et $m: \mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(X)$ un homomorphisme. Alors (X, m) est une variété abélienne à multiplication réelle si et seulement si $\mathfrak{o} \otimes k$ agit fidèlement sur $\text{Lie}(X)$.*

PREUVE: L'une implication étant claire, supposons que $\mathfrak{o} \otimes k$ agisse fidèlement sur $M = \text{Lie}(X)$. L'anneau $\mathfrak{o} \otimes k$ est produit direct d'anneaux locaux artiniens R_i d'idéal maximal principal engendré par a_i avec $a_i^{d_i} = 0$. La i -ième localisation de M est somme directe de R_i -modules cycliques $R/(a_i^{d_{ij}})$ et est un R_i -module fidèle si et seulement si un des d_{ij} est égal à d_i . Si M est un R -module fidèle on a donc $M \cong R \oplus M'$ et, comme M et R ont même dimension sur k , $M' = 0$.

1.5: Nous allons étudier les déformations des variétés abéliennes à multiplication réelle.

Soit S un schéma et $S_0 \subset S$ un sous-schéma fermé défini par un idéal I tel que $I^2 = 0$. Soit (X_0, m_0) un schéma abélien à multiplication réelle. La théorie de Grothendieck [8, 9] implique ce qui suit (on munit (S, I) des puissances divisées triviales): Il existe un $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$ -module $H^1(X_0/S)$ qui, localement sur S , est libre de rang 2 sur $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$. Au-dessus de S_0 on dispose d'une filtration en deux crans $F_0 \subset H^1(X_0/S_0)$ qui n'est rien d'autre que la filtration $\text{Lie}(X)^* \subset H^1_{\text{DR}}(X_0)$; en particulier, F_0 et $H^1(X_0/S_0)/F_0$ sont, localement sur S_0 , des $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S_0}$ -modules libres de rang 1. Relèver X_0 en un schéma abélien X sur S "correspond précisément" à relever F_0 en $F \subset H^1(X_0/S)$ tel que F et $H^1(X_0/S)/F$ soient $\mathcal{O}_S$ -plats; relever X_0 avec son action de $\mathfrak{o}$ correspond aux tels relèvements comme $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$ -module. Il est clair que de tels relèvements existent, localement sur S (choisir une base f_0 du $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S_0}$ -module libre $\text{Lie}(X)^* \subset H^1(X_0/S_0)$); un élément $f \in H^1(X_0/S)$ se réduisant mod I selon f_0 engendre un $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$ -module $F \subset H^1(X_0/S)$ qui répond à la question). De plus, si $F \subset H^1(X_0/S)$ est un tel relèvement correspondant au schéma abélien X muni d'une action m de $\mathfrak{o}$, alors (X, m) est une variété abélienne à multiplication réelle (cf. 1.2(ii)).

PROPOSITION 1.6: *Il n'y a pas d'obstruction à déformer une variété abélienne à multiplication réelle. L'espace tangent à l'espace de déformations en égale caractéristique est de dimension g .*

Il résulte en effet de la description donnée plus haut que l'espace tangent est égale à $\text{Hom}_{\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S_0}}(\text{Lie}(X)^*, \text{Lie}(X^*)) = \text{Lie}(X^*) \otimes_{\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S_0}} \text{Lie}(X) \otimes_{\mathfrak{o}} \mathcal{D}$.

1.7: Nous allons maintenant étudier les déformations de variétés abéliennes à multiplication réelle *polarisées*.

DEFINITION 1.8: Une polarisation d'un schéma abélien à multiplication réelle (X, m) sur une base S (ou polarisation $\mathfrak{o}$ -linéaire) est une polarisation $\lambda: X \rightarrow X^*$ telle que $m(a)^* \circ \lambda = m(a) \circ \lambda$, pour tout $a \in \mathfrak{o}$.

Gardons les notations de 1.5, et soit λ_0 une polarisation de (X_0, m_0) . Alors λ_0 définit une forme bilinéaire alternée ψ sur $H^1(X_0/S_0)$ dont la réduction sur S_0 est zéro sur F_0 . La polarisation λ_0 se relève à X correspondant à $F \subset H^1(X_0/S)$ si et seulement si ψ est zéro sur F . La condition de 1.8 sur λ_0 implique que $\psi(m_0(a)x, u) = \psi(x, m_0(a)y)$, $\forall x, y \in H^1(X_0/S_0)$.

Il existe une seule forme $\mathfrak{o}$ -linéaire alternée $\psi_{\mathfrak{o}}: H^1(X_0/S) \times H^1(X_0/S) \rightarrow \mathcal{D}^{-1} \otimes \mathcal{O}_S$ telle que $\psi = \text{Tr } \psi_{\mathfrak{o}}$. Comme sur un $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$ -sous-module de rang 1 de $H^1(X_0/S)$ une forme $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$ -bilinéaire alternée est automatiquement zéro, $\psi_{\mathfrak{o}}$ est nulle sur $F \subset H^1(X_0/S)$. Nous résumons ce qui précède en la proposition suivante:

PROPOSITION 1.9: Le morphisme canonique de l'espace de déformations d'une variété abélienne à multiplication réelle polarisée dans l'espace de déformations de la variété abélienne à multiplication réelle est formellement étale.

PROPOSITION 1.10: Une variété abélienne à multiplication réelle sur un corps peut être polarisée.

La démonstration sera précédée par quelques considérations qui prouvent une assertion plus générale.

1.11: Soit A une variété abélienne simple (ou isogène à un produit de copies d'une variété abélienne simple) sur un corps. Soit (A) la catégorie des variétés abéliennes isogènes à un produit de copies de A . Cette catégorie est munie du foncteur contravariant $X \mapsto X^*$ et d'une notion de positivité sur le groupe des homomorphismes symétriques de X vers X^* . On donnera une description en termes d'algèbre linéaire du triple $((A)_{\mathbb{R}}, *, +)$ consistant en

- la catégorie $(A)_{\mathbb{R}}$ déduite de (A) en posant $\text{Hom}(X, Y)_{\mathbb{R}} = \text{Hom}(X, Y) \otimes \mathbb{R}$ et en y ajoutant les images des idempotents: on voit facilement que c'est une catégorie abélienne.
- l'involution $*$ de $(A)_{\mathbb{R}}$ déduite du passage au dual.
- la notion $+$ du cône des polarisations dans $\text{Hom}^{\text{sym}}(X, X^*)$ ($X \in (A)_{\mathbb{R}}$).

Soit $E = \text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$. On fixe une polarisation sur A ; soit l'involution de E correspondant. Voici comment de décrire $((A)_{\mathbb{R}}, *)$ en termes de $(E, ')$:

$$(A)_{\mathbb{R}} \triangleq E\text{-modules à droite,}$$

via

$$(A)_{\mathbb{R}} \ni X \rightarrow E\text{-module à droite } \text{Hom}(A, X)$$

$$W \otimes_E A \leftarrow E\text{-module à droite } W;$$

le passage de X à X^* correspond à envoyer W en $\text{Hom}_E(W, E)$, ce E -module à gauche étant rendu un E -module à droite en utilisant $'$.

Un coup d'oeil sur les tables des algèbres d'endomorphismes de variétés abéliennes [14] nous permet de distinguer les trois cas suivants:

- I. Le centre K de E est totalement réel, et $E_{\mathbb{R}}$ est une algèbre de matrices sur $K_{\mathbb{R}}$.
- II. Le centre K de E est totalement réel, et $E_{\mathbb{R}}$ est une algèbre de matrices sur une algèbre de quaternions sur $K_{\mathbb{R}}$.
- III. Le centre Z de E est totalement imaginaire sur un corps totalement réel K .

Voici comment de décrire $((A)_{\mathbb{R}}, *, +)$ en termes d'algèbre linéaire:

- I. $E_{\mathbb{R}} = \text{End}_{K_{\mathbb{R}}}(V)$, où V est un $K_{\mathbb{R}}$ -module libre de type fini ($K_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^k$); $'$ est la transposition relative à une forme bilinéaire symétrique défini positive sur V à valeurs dans $K_{\mathbb{R}}$ (cf. [14], p. 208, 1^{er} cas).

De ce point de vue

$(A)_{\mathbb{R}} \triangleq$ catégorie des $K_{\mathbb{R}}$ -modules de type fini, via:

$$E_{\mathbb{R}}\text{-module à droite } W \rightarrow V' = W \otimes_E V,$$

$$W = \text{Hom}_{K_{\mathbb{R}}}(V, V') \leftarrow K_{\mathbb{R}}\text{-module de type fini } V'$$

- * $\triangleq$ passage au $K_{\mathbb{R}}$ -dual,
- + $\triangleq$ formes $K_{\mathbb{R}}$ -bilinéaires totalement positives, ou, en prenant la trace sur $\mathbb{R}$,
- + $\triangleq$ formes bilinéaires symétriques, $\varphi(k \cdot x, y) = \varphi(x, k \cdot y)$, $k \in K_{\mathbb{R}}$ qui sont définies positives.

- II. Un faux $K_{\mathbb{R}}$ -module V est un $K_{\mathbb{C}}$ -module $V_{\mathbb{C}}$ muni d'une application $K_{\mathbb{R}}$ -linéaire et $\mathbb{C}$ -antilinéaire $\tau: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ telle que $\tau^2 = -1$.

Cette fois $E_R = \text{End}_{K_R}(V)$, où V est un faux K_R -module libre ($K_R \cong \mathbb{R}^k$); ' est la transposition relative à une forme bilinéaire alternée définie positive à valeurs dans K_R sur V , c.a.d., une application K_C -bilinéaire $B: V_C \times V_C \rightarrow K_C$ avec

$$\begin{aligned} B(\tau x, \tau y) &= \overline{B(x, y)} \\ B(x, y) &= -B(y, x) \\ B(x, \tau x) &> 0 \end{aligned}$$

(cf. [14], p. 208, 3^{ème} cas).

De ce point de vue

$(A)_R \triangleq$ catégorie des faux K_R -modules, via

$$\begin{aligned} E_R\text{-module à droite } W &\rightarrow V' = W \otimes_E V, \\ W = \text{Hom}_{K_R}(V, V') &\leftarrow \text{faux } K_R\text{-module } V'. \end{aligned}$$

* $\triangleq$ passage au K_R -dual,

+ $\triangleq$ formes alternées définies positives, ou, prenant la trace sur $\mathbb{R}$,

+ $\triangleq$ formes bilinéaires alternées $\varphi: V'_C \times V'_C \rightarrow \mathbb{C}$ avec

$$\begin{aligned} \varphi(\tau x, \tau y) &= \overline{\varphi(x, y)} \\ \varphi(kx, y) &= \varphi(x, k \cdot y) \quad k \in K_R \end{aligned}$$

telles que

$$\varphi(x, \tau x) > 0.$$

III. $E_R = \text{End}_{Z_R}(V)$, où V est un Z_R -module libre ($Z_R \cong \mathbb{C}^k$); ' est la transposition relative à une forme hermitienne définie positive à valeurs dans Z_R . (cf. [14], p. 208, 2^{ème} cas).

De ce point de vue

$(A)_R \triangleq$ catégorie des Z_R -modules, via:

$$\begin{aligned} E_R\text{-module à droite } W &\mapsto V' = W \otimes_E V \\ W = \text{Hom}_{Z_R}(V, V') &\leftarrow Z_R\text{-module } V' \end{aligned}$$

- * $\triangleq$ passage au $Z_{\mathbb{R}}$ -antidual
- + $\triangleq$ formes hermitiens définies positives à valeurs dans $Z_{\mathbb{R}}$, ou, prenant la trace sur $\mathbb{R}$,
- + $\triangleq$ formes $\mathbb{R}$ -bilinéaires symétriques $\varphi: V' \times V' \rightarrow \mathbb{C}$ avec

$$\varphi(zx, y) = \varphi(x, \bar{z}y), \quad z \in Z_{\mathbb{R}}$$

qui sont définies positives.

La proposition suivante implique 1.10.

PROPOSITION 1.12: *Soit X une variété abélienne sur un corps. Soit $\mathfrak{o} \subset F$ un ordre dans un corps totalement réel et $\mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(X)$ un homomorphisme. Alors X admet une polarisation $\mathfrak{o}$ -linéaire.*

PREUVE: On se ramène à supposer X isogène à un produit de copies d'une variété abélienne simple A . On reprend les notations précédentes. On voit qu'il suffit de trouver $\varphi \in NS^*(X) \otimes \mathbb{R}$ dans le cône positif des polarisations, qui est $\mathfrak{o}$ -linéaire. Du point de vue d'algèbre linéaire adopté:

I. Il s'agit de trouver une forme bilinéaire symétrique réelle définie positive φ avec $\varphi(u \cdot x, y) = \varphi(x, u \cdot y)$ pour $u \in (F \otimes K)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^k$: c'est évidemment possible. (Existence d'une forme bilinéaire symétrique définie positive sur un vectoriel réel.)

II. Il s'agit de trouver une forme bilinéaire alternée définie positive φ avec $\varphi(u \cdot x, y) = \varphi(x, u \cdot y)$ pour $u \in (F \otimes K)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^k$: c'est possible. (Existence d'une forme alternée définie positive sur un faux $\mathbb{R}$ -vectoriel.)

III. Il s'agit de trouver une forme bilinéaire symétrique définie positive φ avec $\varphi(u \cdot x, y) = \varphi(x, \bar{u} \cdot y)$ pour $u \in (F \otimes Z)_{\mathbb{R}}$: comme $((F \otimes Z)_{\mathbb{R}}, \bar{}) \cong (\mathbb{C}, \bar{})^k$, c'est possible. (Existence d'une forme hermitienne définie positive sur un vectoriel complexe).

Voici une conséquence de ce qui précède.

COROLLAIRE 1.13: *Une variété abélienne à multiplication réelle se relève en caractéristique 0; plus précisément, étant donnée une variété abélienne à multiplication réelle (X, m) sur un corps k de caractéristique $p > 0$, il existe une variété abélienne $(\tilde{X}, \tilde{m})$ sur un anneau de Cohen $W(k)$ qui par réduction mod p redonne (X, m) .*

La démonstration, ômise, du théorème suivant est analogue à celle du Théorème 1.20 ci-dessous.

THEOREME 1.14: *Le champ $\mathcal{M}$ des variétés abéliennes à multiplication réelle polarisées est représentable par un champ algébrique lisse de dimension relative g sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.*

1.15: Dans ce qui suit, on appelle *notion de positivité* d'un $\mathfrak{o}$ -module projectif de rang 1 $\mathcal{P}$ la donnée d'un ordre sur l'espace vectoriel réel $\mathcal{P} \otimes \mathbb{R}$ pour chaque plongement réel de F ; soit $\mathcal{P}_+$ l'ensemble des éléments totalement positifs. Alors $\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{P}_+) = U_+$, de sorte que l'ensemble des classes d'isomorphie des $\mathfrak{o}$ -modules projectifs munis d'une notion de positivité n'est rien d'autre que le groupe de classes restreintes de F (la somme dans ce dernier groupe correspondante au produit tensoriel). Le carré d'un $\mathfrak{o}$ -module inversible est muni d'une notion de positivité évidente. De plus, on a le

LEMME 1.16: *Soient $\mathcal{P}$ un $\mathfrak{o}$ -module projectif de rang 1 et $\ell: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ une forme linéaire non-nulle. Alors il existe une seule notion de positivité $\mathcal{P}_+ \subset \mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}_+ \subset \{\lambda \in \mathcal{P} \mid \ell(\lambda) > 0\}$.*

En passant de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}^*$, ceci veut dire que ℓ n'est pas contenu dans la réunion des hyperplans $\{\sigma_i = 0\} = \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R} \subset \mathcal{P}^* \otimes \mathbb{R}$: mais si $\sigma_i(\ell) = 0$ par un i alors, comme ℓ est rationnel, $\sigma_i(\ell) = 0$ pour tout i , de sorte que $\ell = 0$, contradiction.

PROPOSITION 1.17: *Soit (X, m) une variété abélienne à multiplication réelle sur un schéma S . La faisceau pour la topologie étale sur S , qui à $T \rightarrow S$ associe*

$$\text{Hom}_{T, \mathfrak{o}}(X, X^*)^{\text{sym}} = \{\lambda: X_T \rightarrow X_T^* \mid \lambda \text{ } \mathfrak{o}\text{-linéaire et symétrique}\}$$

est localement constant de valeur un $\mathfrak{o}$ -module projectif de rang 1, muni d'une notion de positivité correspondant aux polarisations de (X, m) .

PREUVE: D'après 1.7 il suffit de traiter le cas où S est le spectre d'un corps parfait. Alors le $\mathfrak{o}$ -module en question est non-nul (cf. 1.10) et projectif car sans torsion, et de rang 1 puisque un homomorphisme symétrique $\lambda: X \rightarrow X^*$ est déterminé de façon unique par la forme alternée qu'il définit sur $H^1(X, \mathbb{Z}_\ell)$. Pour voir que les polarisations y définissent une notion de positivité, il suffit de voir que l'action des éléments totalement positifs de $\mathfrak{o}$ les préserve. Un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X définit un homomorphisme symétrique $\lambda_{\mathcal{L}}: X \rightarrow X^*$. Soit $a \in \mathfrak{o}$. L'image réciproque par $m(a)$ de $\mathcal{L}$ définit

l'homomorphisme $a^2 \cdot \lambda_{\mathcal{L}}$. Si $\mathcal{L}$ est ample, $m(a)^*(\mathcal{L})$ le sera encore; par suite, si λ est une polarisation, $a^2\lambda$ le sera encore. Ecrivons $a \in \mathfrak{o}_+$ comme $a = \sum_{i=1}^n f_i^2$, $f_i \in F$ [cf. S. Lang: Algebra; Addison-Wesley, 1970, p. 274]. Alors, pour $r \in \mathbb{Z}$ convenable, $r^2 \cdot a = \sum_{i=1}^n a_i^2$ avec $a_i \in \mathfrak{o}$ et, d'après ce qui a été dit, $r^2 \cdot a$, donc aussi a , préserve l'ensemble des polarisations.

VARIANTE 1.18: Supposons dans l'énoncé de 1.17 que S soit normal et connexe. Alors le faisceau est constant.

En effet, les valeurs de ce faisceau en tout point $s \in S$ sont isomorphes, de groupe d'automorphismes U_+ . Sous les hypothèses sur S faites, un U_+ -torseur est trivial.

1.19: Pour un schéma abélien à multiplication réelle (X, m) sur un schéma S , on désignera par $\mathcal{P}$, ou $\mathcal{P}(X, m)$, le faisceau pour la topologie étale sur S , $T \mapsto \text{Hom}_{T, \mathfrak{o}}(X, X^*)^{\text{sym}}$, et par $\mathcal{P}_+$ la notion de positivité de $\mathcal{P}$ définie par l'ensemble des polarisations.

Soit (L, L_+) un $\mathfrak{o}$ -module projectif de rang 1 muni d'une notion de positivité. On considérera le champ $\mathcal{M}^L$ qui à un schéma S associe

$\mathcal{M}^L(S)$ = catégorie des schémas abéliens à multiplication réelle (X, m) sur S , plus un isomorphisme de faisceaux de $\mathfrak{o}$ -modules (pour la topologie étale sur S)

$$\alpha: (\mathcal{P}, \mathcal{P}_+) \xrightarrow{\sim} (L, L_+)$$

(les morphismes sont des isomorphismes).

THEOREME 1.20: $\mathcal{M}^L$ est représentable par un champ algébrique lisse de dimension g sur $\mathbb{Z}$.

La démonstration est standard; j'esquisserai comment déduire ce théorème des critères de représentabilité de M. M. Artin [1, 3; cf. aussi 6].

Nous avons à vérifier:

[0] $\mathcal{M}^L$ est un champ pour la topologie fppf.

Il suffit en effet de choisir un élément $\ell \in L_+$ qui via α et le procédé usuel définit un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur X . Alors on descend $(X, m, \alpha, \mathcal{L})$, ce qui est possible par descente de schémas projectifs.

[1] $\mathcal{M}^L$ est un champ localement de présentation finie sur $\mathbb{Z}$.

C'est clair (E.G.A. IV 8).

[2] Soient S un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ et (X, m, α) et (X', m', α') deux objets de $\mathcal{M}^L(S)$. Le foncteur $\text{Isom}(S; (X, m, \alpha), (X', m', \alpha'))$ est représentable par un espace algébrique localement de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.

C'est une conséquence facile de la théorie des schémas de Hilbert.

[3] Soit k_0 un $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ -corps de type fini: c'est donc un corps fini. Soit $\xi_0 = (X_0, m_0, \alpha_0) \in \mathcal{O}b(\mathcal{M}^L(k_0))$.

(a) ξ_0 n'a pas d'automorphismes infinitésimaux.

En effet, un champ de vecteurs sur X s'annulant à l'élément neutre est zéro.

(b) Le foncteur F sur la catégorie duale des $W(k_0)$ -algèbres noethériennes locales complètes à corps résiduel k_0

$A \longrightarrow$ classes d'isomorphie de paires (ξ, φ) , où

$$\xi = (X, m, \alpha) \in \mathcal{M}^L(\text{Spec}(A)) \text{ et } \varphi: \xi \times_A k_0 \xrightarrow{\sim} \xi_0$$

est effectivement proreprésentable (par une $W(k_0)$ -algèbre locale complète R et un objet $\xi \in \mathcal{M}^L(R)$).

En effet, que F soit proreprésentable résulte de (a) et de la théorie de déformations [23]. L'effectivité résulte du fait que l'on peut trouver une polarisation de (X_0, m_0) (cf. 1.10) et que, d'après 1.7 une telle polarisation s'étend automatiquement à chaque déformation de (X_0, m_0) : on peut donc appliquer le théorème d'existence (E.G.A. III 3.4).

[4] D'après 1.6 et 1.19 les anneaux locaux R apparaissant dans la vérification de la condition [3](b) sont tous de la forme $R \cong W(k_0)[[T_1, \dots, T_g]]$, k_0 un corps fini. D'après [1], 3.9, on n'a plus rien à vérifier.

1.21: Pour n inversible sur S , le " e_n -pairing" induit un homomorphisme de faisceaux sur S $e_n: X_n \times X_n^* \rightarrow \mu_n$; il vérifie $e_n(m(a)x, y) = e_n(x, m(a)y)$, $\forall a \in \mathfrak{o}$. Par suite on peut définir une forme $\mathfrak{o}$ -bilinéaire alternée $e_{n_{\mathfrak{o}}}: X_n \times X_n^* \rightarrow (\mathcal{D}^{-1}/n\mathcal{D}^{-1})(1)$ telle que $e_n = \text{Tr}(e_{n_{\mathfrak{o}}})$. Tout élément $\lambda \in \mathcal{P}(X)$ définit un homomorphisme $X \rightarrow X^*$, nul sur X_n seulement si λ est dans $n \cdot \mathcal{P}(X)$; et λ définit via le e_n -pairing un homomorphisme $\mathfrak{o}$ -bilinéaire de $X_n \times X_n$ dans μ_n ; comme $e_{n_{\mathfrak{o}}}$ est non-dégénérée, $\mathcal{P} \otimes_{\mathfrak{o}} \Lambda_{\mathfrak{o}}^2 X_n = \mathcal{D}^{-1}/n\mathcal{D}^{-1}(1)$. Tout élément φ de

$\text{Isom}(\mu_n, \mathbb{Z}/n)$ détermine un isomorphisme de $\mathcal{D}^{-1}/n\mathcal{D}^{-1}(1)$ sur $\mathcal{D}^{-1}/n\mathcal{D}^{-1}$. Soit $(L, L_+) = (\mathcal{D}^{-1}, \mathcal{D}_+^{-1})$. On appelle une structure de niveau n sur (X, m, α) un isomorphisme $\mathfrak{o}$ -linéaire $X_n \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{o}/n\mathfrak{o})^2$ tel que l'isomorphisme entre $\mathcal{D}^{-1}/n\mathcal{D}^{-1}(1)$ et $\mathcal{D}^{-1}/n\mathcal{D}^{-1}$ déterminé par le diagramme suivant soit un de ceux définis par les φ :

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}(X) \otimes_{\mathfrak{o}} \Lambda_{\mathfrak{o}}^2 X_n = \mathcal{D}^{-1}/n\mathcal{D}^{-1}(1) \\ \downarrow \wr \\ \mathcal{D}^{-1} \otimes_{\mathfrak{o}} \Lambda_{\mathfrak{o}}^2 (\mathfrak{o}/n\mathfrak{o})^2 = \mathcal{D}^{-1}/n\mathcal{D}^{-1} \end{array}$$

THEOREME 1.22: *Soit $n \geq 1$. Le champ $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ qui à un schéma S au-dessus de $\mathbb{Z}[1/n]$ (i.e. au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ privé des nombres premiers non-premiers à n) associe la catégorie des objets (X, m, α) de $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}^{-1}}(S)$ muni d'une structure de niveau n est un champ algébrique, fini et étale au-dessus de $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}^{-1}}[1/n]$.*

La donnée d'une structure de niveau n définit une trivialisaton de μ_n : le champ algébrique $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ est de façon canonique un $\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n]$ -champ. Considéré come tel, il paramétrise des objets (X, m, α) de $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ munis d'une structure de niveau n de déterminant 1, i.e. tel que l'isomorphisme induit entre $(\mathcal{D}^{-1}/n\mathcal{D}^{-1})(1)$ et $\mathcal{D}^{-1}/n\mathcal{D}^{-1}$ (cf. plus haut) soit l'isomorphisme canonique qui existe au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$.

LEMME 1.23: *Si $n \geq 3$, le champ algébrique $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ "est" un espace algébrique.*

PREUVE: Il suffit de voir qu'un automorphisme φ d'un objet (X, m, α) de $\mathcal{M}^L$ sur un corps algébriquement clos qui induit l'automorphisme identique sur X_n est trivial. Mais φ fixe une polarisation et on peut appliquer le lemme de Serre (cf. [14], p. 207).

1.24: Soit (X, m, α) un objet de $\mathcal{M}^L$ sur un corps algébriquement clos. Ses automorphismes forment un groupe fini qui contient toujours $-Id$.

1.25: Dans ce numéro nous nous plaçons sur $\mathbb{C}$. Présentons le tore complexe X de dimension g comme $X = \text{Lie}(X)/H_1(X, \mathbb{Z})$. Se donner $m: \mathfrak{o} \rightarrow \text{End}(X)$ revient à se donner une structure de $\mathfrak{o}$ -module sur $H_1(X, \mathbb{Z})$. Mais alors le tore X est algébrisable! En effet, l'opérateur C de Weil sur $H^2(X, \mathbb{R})$ commute à l'action de $\mathfrak{o}$ sur $H^2(X, \mathbb{R})$: on peut

donc le décomposer en $C = C^{(1)} \oplus \cdots \oplus C^{(g)}$ sur $H^2(X, \mathbb{R}) = H^{(1)} \oplus \cdots \oplus H^{(g)}$ correspondant aux injections de F dans $\mathbb{R}$. De plus, on voit facilement que le sous-groupe $(\Lambda_o H_1(X, \mathbb{Z}))^*$ de $H^2(X, \mathbb{C})$ tombe dans la partie de type (1,1). Un élément non-nul E de ce sous-groupe induit une forme alternée sur $H_1(X, \mathbb{R})$ telle que, sur chaque facteur $H_1^{(i)} \subset H_1(X, \mathbb{R})$, la forme symétrique $x, y \mapsto E(x, Cy) = E(x, C_y^{(i)})$ est non-dégénérée; elle doit alors être définie positive ou négative. En changeant E on peut supposer que toutes ces formes soient définies positives: on a trouvé une forme de Riemann.

Se donner une variété abélienne à multiplication réelle sur $\mathbb{C}$ revient donc à se donner un $\mathfrak{o}$ -module projectif de rang 2, H , muni d'une structure complexe sur $H \otimes \mathbb{R}$. Par suite, les variétés abéliennes à multiplication réelle sur $\mathbb{C}$, de H donné, sont paramétrées par l'espace de double classes

$$GL_{\mathfrak{o}}(H) \backslash GL_{\mathfrak{o} \otimes \mathbb{R}}(H \otimes \mathbb{R}) / K,$$

où K , isomorphe à $(F \otimes \mathbb{C})^*$, est le centralisateur d'une structure complexe.

1.26: Si (X, m) est une variété abélienne à multiplication réelle sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{P} = (\Lambda_o^2 H_1(X, \mathbb{Z}))^* (-1)$ ((-1) = torsion à la Tate). La notion de positivité sur $(\Lambda_o^2 H_1(X, \mathbb{Z}))^*$ est définie par la structure complexe J sur $H_1(X, \mathbb{R})$: un élément λ est positif si $\lambda(x \wedge_o Jx) > 0 \quad \forall x \in H_1(X, \mathbb{R})$, $x \neq 0$. Comme chaque $\mathfrak{o}$ -module projectif de rang 2 est somme directe d'un $\mathfrak{o}$ -module libre et d'un $\mathfrak{o}$ -module inversible, la classe d'isomorphie de $\Lambda_o^2(H_1(X, \mathbb{Z}))$ détermine $H_1(X, \mathbb{Z})$ à isomorphisme près.

1.27: Soit ${}_F G^*$ le groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ défini comme produit fibré, où $R_{F/\mathbb{Q}}$ désigne la restriction des scalaires à la Weil:

$$\begin{array}{ccc} {}_F G^* & \hookrightarrow & R_{F/\mathbb{Q}}(GL(2)) \\ \downarrow & & \downarrow \text{det} \\ \mathbb{G}_m & \hookrightarrow & R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m). \end{array}$$

Le système projectif des $\mathcal{M}_n^{\otimes -1}$ est un modèle canonique de Shimura pour ${}_F G^*$, au sens de l'exposé 389 de P. Deligne au séminaire Bourbaki.

THEOREME 1.28: (i) *Le champ algébrique $\mathcal{M}^{\otimes -1} \otimes \mathbb{Q}$ est géométriquement connexe.*

(ii) Plus généralement, $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}} \otimes \mathbb{Q}$ est connexe; les fibres géométriques de $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}} \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q}(\zeta_n))$ sont connexes; l'ensemble galoisien des composantes connexes de $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}} \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ est $\text{Isom}(\mu_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

PREUVE: Cela se voit sur les espaces grossiers de modules. Le H_1 correspondant d'après 1.26 à $\mathcal{P} = \mathcal{D}^{-1}$ est isomorphe à $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}$. Si l'on considère ${}_FG^*$ comme groupe d'automorphismes de $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}$, et désigne par K_p le sousgroupe compact ouvert maximal naturel de ${}_FG^*(\mathbb{Q}_p)$ et par K_∞ le stabilisateur d'une structure complexe, on a

$$\begin{aligned} M^{\mathfrak{D}^{-1}}(\mathbb{C}) &= {}_FG^*(\mathbb{Q}) \backslash {}_FG^*(\mathbb{A}) / K_\infty \cdot \prod_p K_p \\ &= (\mathcal{H}^g)_\pm / {}_FG^*(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ici $(\mathcal{H}^g)_\pm = \{(z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g \mid z_i > 0 \forall i \text{ ou } z_i < 0 \forall i\}$. Qu'on forme un quotient de $(\mathcal{H}^g)_\pm$ et non pas de $\mathbb{C}^g \setminus \mathbb{R}^g$, est manifestation du fait qu'on fixe $\mathcal{P}$ avec sa notion de positivité. Cette variété est connexe. Cela démontre (i). De même, l'ensemble des points de $M_n^{\mathfrak{D}^{-1}}(\mathbb{C})$ correspondants aux structures de niveau n de déterminant fixe (cf. 1.22) est connexe. L'ensemble galoisien $\pi_0(\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}} \otimes \mathbb{C})$ est donc l'ensemble de déterminants de structures de niveau n , c.a.d., est égale à $\text{Isom}(\mu_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et ceci démontre aussi que $\mathcal{M}_n \otimes \mathbb{Q}$ est connexe. (Pour plus de détails, voir l'exposé 389 de P. Deligne au séminaire Bourbaki.)

Tenant compte de 1.26, on peut montrer que l'ensemble des composantes connexes de l'espace grossier de modules de variétés abéliennes à multiplication réelle est égale au groupe des classes restreintes d'idéaux de F .

1.29: Voici des exemples de variétés abéliennes de dimension g munies d'une action de $\mathfrak{o}$ sur le corps $k = \bar{F}_p$ qui ne vérifient pas la condition (*) de 1.1. On prend $g = 2$.

Soit p un nombre premier tel que $p \cdot \mathfrak{o}$ soit un idéal premier. Soit E une courbe elliptique supersingulière sur k . Il a un sens d'écrire $E \otimes \mathfrak{o}$; c'est une variété abélienne de dimension 2 sur k , munie d'une action de $\mathfrak{o}$. Son module de Dieudonne (covariant) est de la forme $D(E) \otimes \mathfrak{o}$. Soient $\sigma_1, \sigma_2: W(k) \otimes \mathfrak{o} \rightarrow W(k)$ les deux projections canoniques et soit $D(E) \otimes \mathfrak{o} = D_1 \oplus D_2$ la décomposition isotypique correspondante. Alors l'action de Frobenius $F = F_E \otimes 1$ sur $D(E) \otimes \mathfrak{o}$ échange D_1 et D_2 car pour $a \in \mathfrak{o}$ et $m_1 \in D_1$

$$\begin{aligned} a \cdot (F_E \otimes 1)(m_1) &= (F_E \otimes 1)(a \cdot m_1) = (F_E \otimes 1)(\sigma_1(a) \cdot m_1) \\ &= \sigma_1(a)^\sigma \cdot (F_E \otimes 1)(m_1) = \sigma_2(a) \cdot (F_E \otimes 1)(m_1), \end{aligned}$$

où σ est la transformation de Frobenius sur $W(k)$. Pour $D(E)$ on peut choisir une base a_1, a_2 sur $W(k)$ telle que $F_E(a_1) = a_2$, $F_E(a_2) = p \cdot a_1$. On calcule alors qu'on peut choisir des bases $\{e_1, f_1\}$ de D_1 et $\{e_2, f_2\}$ de D_2 sur $W(k)$ telles que les actions du Frobenius F et de la Verschiebung V sont comme suit:

$$F: \begin{cases} e_1 \mapsto f_2 \\ f_1 \mapsto p \cdot e_2 \\ e_2 \mapsto e_1 \\ f_2 \mapsto p \cdot f_1 \end{cases}$$

$$V: \begin{cases} e_1 \mapsto p \cdot e_2 \\ f_1 \mapsto f_2 \\ e_2 \mapsto f_1 \\ f_2 \mapsto p \cdot e_1. \end{cases}$$

Soit $D(X) \subset D(E \otimes \mathfrak{o})$ le sous- $W(k)$ -module d'indice p engendré par $e'_1 = e_1$, $f'_1 = f_1$, $e'_2 = p \cdot e_2$, $f'_2 = f_2$. On vérifie que $D(X)$ est stable sous l'action de F et de V ; comme $D(X) = (D(X) \cap D_1) \oplus (D(X) \cap D_2)$, il est stable sous l'action de $\mathfrak{o}$. D'après Tate on a donc obtenu une isogénie de degré p

$$X \longrightarrow E \otimes \mathfrak{o}.$$

où X est une variété abélienne munie d'une action m de $\mathfrak{o}$.

Montrons que (X, m) est l'exemple cherché: en effet, $\text{Lie}(X) = \text{Ker}(F) \cap D(X)/p \cdot D(X) = k \cdot \overline{e'_1} \oplus k \cdot \overline{f'_1}$; il en résulte que $\mathfrak{o} \otimes k$ agit sur $\text{Lie}(X)$ via la projection $\overline{\sigma}_1: \mathfrak{o} \otimes k \rightarrow k$, de sorte que $\text{Lie}(X)$ n'est pas un $\mathfrak{o} \otimes k$ -module libre.

Ce phénomène apparaît chaque fois que la variété abélienne X sur laquelle agit $\mathfrak{o}$ est d'opération de Cartier nilpotente mais non nulle.

En effet, si pour une telle variété abélienne $\text{Lie}(X)$ était libre sur $\mathfrak{o} \otimes k$, on pourrait écrire $\text{Lie}(X) = L_1 \oplus L_2$ correspondant à l'isomorphisme $(\sigma_1, \sigma_2): \mathfrak{o} \otimes k \xrightarrow{\sim} k \otimes k$; l'opération de Cartier respecterait cette décomposition et serait donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix};$$

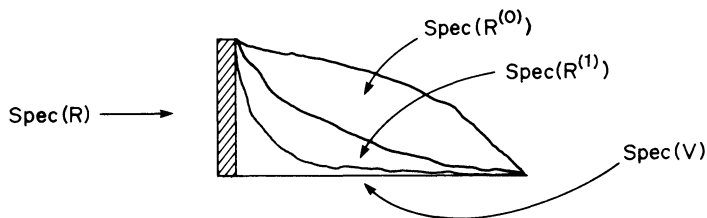
étant nilpotente, cette matrice serait nulle.

§2. Variétés abéliennes dégénérantes

Dans ce § on résume les conséquences qui nous seront utiles par la suite de la théorie de Raynaud–Tate des variétés abéliennes sur un corps valué, légèrement généralisée pour nos besoins [21]. Les démonstrations sont ômises.

Au début sont rappelées quelques notions de la théorie des espaces rigide-analytiques au sens de M. Raynaud (cf. [20], voir aussi §3). Soient V un anneau de valuation discrète complet de corps de fractions K et $\pi \in V$ une uniformisante. La catégorie des K -espaces rigide-analytiques (de type fini quasi-séparés) est la catégorie déduite de la catégorie des schémas formels $\mathfrak{X}$ quasi-séparés de type fini sur $\mathrm{Spf}(V)$ en rendant inversibles les morphismes qui sont des éclatements en un idéal de $\mathfrak{X}$ qui contient une puissance de π . On aura besoin de l'extension de cette notion au cas où K est remplacé par un anneau local artinien.

2.1. Soit R un anneau local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel K . On suppose que K est complet pour une valuation discrète, on désigne par V l'anneau des entiers de K et par k le corps résiduel de V . Soit R_V l'image réciproque de V dans R . On se fixe un sous-anneau noethérien $R^{(0)}$ de R_V tel que l'homomorphisme d'augmentation $R^{(0)} \rightarrow V$ soit surjectif et que la localisation au point générique de V de $R^{(0)}$ soit égale à R . Soit $N = \mathrm{Ker}(R^{(0)} \rightarrow V) = \text{nilradical de } R^{(0)}$. Soit $\pi \in R^{(0)}$ un élément qui se projète sur une uniformisante de V . On pose $R^{(i)} = R^{(0)}[N/\pi^i] \subset R$. Alors $R^{(0)} \subset R^{(1)} \subset \cdots \subset R_V$ et $\bigcup_i R^{(i)} = R_V$. Il est facile à voir que $\mathrm{Spec}(R^{(i+1)})$ est l'éclatement du point fermé de $\mathrm{Spec}(R^{(i)})$.



Ce qui suit ne dépend que du système inductif des $R^{(i)}$ (cf. 2.3). Si $R = K$, les $R^{(i)}$ sont tous égaux à V .

D'après EGA IV.8.8.2, il revient au même de se donner un schéma quasi-séparé de type fini sur un des R_i ou de se donner un schéma de ce type sur R , un schéma de ce type sur V et un isomorphisme entre leurs restrictions à K .

2.2: Soit $\mathfrak{X}$ un $R^{(i)}$ -schéma formel quasi-séparé de type fini (l'image réciproque de π . $R^{(i)}$ dans $\mathfrak{X}$ est un idéal de définition). On appelle *éclatement admissible* un éclatement de $\mathfrak{X}$ en un idéal qui contient une puissance de π . (L'éclatement $\mathfrak{X}'$ d'un schéma formel $\mathfrak{X}$ en un idéal J contenant un idéal de définition est défini localement; et si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X}'$ est le complété formel le long l'image réciproque de $\mathfrak{X}_0$ de l'éclatement usuel de $\mathrm{Spec}(A)$ en J .) La *catégorie des R -espaces rigide-analytiques (de type fini quasi-séparés)* est la catégorie obtenue de la pro-catégorie des $R^{(i)}$ -schémas formels de type fini quasi-séparés (i variable) en rendant inversibles les morphismes qui sont des éclatements admissibles. Un $R^{(i)}$ -schéma formel $\mathfrak{X}$ définit un R -espace rigide-analytique $\mathfrak{X}^{an}$, "sa fibre générique"; si $\mathfrak{Y}$ est un autre $R^{(i)}$ -schéma formel, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}^{an}, \mathfrak{Y}^{an}) = \varinjlim_{\substack{\text{éclatements} \\ \text{admissibles } \mathfrak{X}' \\ \text{de } \mathfrak{X}}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}).$$

Un schéma formel $\mathfrak{X}$ qui définit $\mathfrak{X}^{an}$ est appelé *modèle formel* de $\mathfrak{X}^{an}$; on emploie une terminologie analogue pour les morphismes.

2.3: Comme $\mathrm{Spec}(R^{(i)})$ et $\mathrm{Spec}(R^{(0)})$ ne diffèrent que par un éclatement admissible, un $R^{(i)}$ -schéma formel $\mathfrak{X}$ et un $R^{(j)}$ -schéma formel $\mathfrak{X}'$ définissent le même R -espace rigide-analytique s'ils sont isomorphes après un changement de base de la forme $\mathrm{Spec}(R^{(i)}) \rightarrow \mathrm{Spec}(R^{(j)})$ resp. $\mathrm{Spec}(R^{(i)}) \rightarrow \mathrm{Spec}(R^{(j)})$.

2.4: Un morphisme $\mathfrak{X}^{an} \rightarrow \mathfrak{Y}^{an}$ est une *immersion ouverte* s'il existe un modèle formel $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ qui est une immersion ouverte.

Dans ce qui suit apparaissent des espaces rigide-analytiques qui ne sont pas de type fini: ce sont des réunions croissantes d'immersions ouvertes d'espaces rigides-analytiques de type fini.

2.5: Il existe un foncteur GAGA qui à un R -schéma de type fini quasi-séparé X associe un R -espace rigide-analytique X^{an} non de type fini en général.

2.6: Un R -espace rigide-analytique définit, par produit fibré, un K -espace rigide-analytique. Si X est un R -schéma, $(X \times_R K)^{an} = X^{an} \times_K K$.

2.7: Un R -espace rigide-analytique $\mathfrak{X}^{an}$ est *propre* si un (et alors tout) modèle formel $\mathfrak{X}$ est un schéma formel propre. Cette propriété

ne dépend que de $X^{an} \times_R K$. Si X est un R -schéma, alors X est propre sur R si et seulement si X^{an} est propre.

2.8: Une variété abélienne sur $\text{Spec}(R)$ a une réduction semi-stable (déployée) s'il existe $i \geq 0$ et un schéma en groupes lisse sur $\text{Spec}(R^{(i)})$ qui prolonge X et dont la fibre spéciale soit une extension d'une variété abélienne par un tore (déployé). La variété abélienne X sur $\text{Spec}(R)$ a une réduction semi-stable (déployée) si et seulement si la variété abélienne X_K sur $\text{Spec}(K)$ en a une (cf. 2.1).

La théorie de Raynaud–Tate donne une description rigide-analytique des variété abéliennes à réduction semi-stable déployée: elle présente une telle variété abélienne comme quotient rigide-analytique d'une extension d'une variété abélienne à bonne réduction (c.à.d. qui se prolonge en une variété abélienne sur $\text{Spec}(R^{(i)})$ pour i convenable) par un tore (déployé) par un sous-groupe discret (déployé); et cette construction est fonctorielle.

En fait, les variétés abéliennes à réduction semi-stable forment une sous-catégorie pleine de la catégorie des 1-motifs sur $\text{Spec}(R)$, et les points de division, le e_n -pairing, la dualité de ces variétés abéliennes peuvent être décrits en termes du 1-motif associé (cf. [5]).

2.9: Voici ce qui devient de cette théorie quand on met en jeu une action de $\mathfrak{o}$. Soit X une variété abélienne de dimension g sur $\text{Spec}(R)$ munie d'une action m de $\mathfrak{o}$, qui ait mauvaise réduction *sémi-stable déployée*.

2.9.1: On peut présenter X^{an} comme quotient rigide-analytique

$$X^{an} = (P \otimes G_m)^{an} / N^{an}$$

avec P et N deux $\mathfrak{o}$ -modules projectifs de rang 1.

(Ici $P \otimes G_m$ est le tore de groupe de caractères P^* ; il est muni d'une action de $\mathfrak{o}$.) En effet, le groupe de caractères de la partie torique de l'extension sera un $\mathfrak{o}$ -module sans torsion de rang > 0 . Pour des raisons de dimension la partie abélienne de l'extension est triviale et $T = P \otimes G_m$. Et N est un $\mathfrak{o}$ -module sans torsion et de même rang sur $\mathbb{Z}$ que P .

2.9.2: La paire (X, m) est une variété abélienne à multiplication réelle sur $\text{Spec}(R)$.

En effet, $\mathrm{Lie}(X) = P \otimes R$, qui est évidemment libre sur $\mathfrak{o} \otimes R$.

2.9.3: Pour tout entier $n \geq 1$, on a une suite exacte de schémas en groupe finis munis d'une action de $\mathfrak{o}$ sur $\mathrm{Spec}(R)$

$$0 \longrightarrow \left(\frac{1}{n} P/P \right) (1) \longrightarrow X_n \longrightarrow \frac{1}{n} N/N \rightarrow 0.$$

C'est une conséquence de la construction.

2.9.4. Le $\mathfrak{o}$ -module $\mathcal{P}(X)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N^{-1}$.

Et effet, $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble d'applications $\mathfrak{o}$ -linéaires de N vers P^* .

2.9.5: La forme bilinéaire $(,): N \times P^* \rightarrow \Gamma = \mathrm{val}(V)$ (qui ne dépend que de la restriction à $\mathrm{Spec}(K)$ de X) vérifie $(a \cdot n, p^*) = (n, a \cdot p^*)$, $\forall a \in \mathfrak{o}$, $\forall n \in N$, $\forall p^* \in P^*$, et définit donc un élément $m^* \in (P^* \cdot N)^*$, bien déterminé à un facteur dans $\mathbb{Q}_+$ et à l'effet de l'action de U^2 sur $(P^* \cdot N^*)$ près (correspondants au choix d'un isomorphisme $\Gamma \cong \mathbb{Z}$ et aux automorphismes de (X, m)). Ceci étant,

L'ensemble des polarisations $\mathcal{P}(X)_+ \subset \mathcal{P}(X) = \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N^{-1}$ est produit de l'unique positivité sur $\mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N$ sur laquelle $m^* > 0$ (cf. 1.16) et de la positivité naturelle sur N^{-2} .

2.9.6: Soient P et N deux $\mathfrak{o}$ -modules projectifs inversibles à bonne réduction sur $\mathrm{Spec}(R)$. Soit $u': N^{an} \rightarrow (P \otimes G_m)^{an}$ un homomorphisme tel que la forme bilinéaire $(,): N \times P^* \rightarrow \Gamma$ soit non-dégénérée. Alors le quotient $X^{an} = (P \otimes (G_m)^{an}) / N^{an}$ est une variété abélienne à multiplication réelle.

Il suffit de voir que X^{an} est algébrisable: la démonstration est analogue à celle qui montrait qu'on peut algébriser un tore complexe de dimension g muni d'une action de $\mathfrak{o}$ (cf. §1).

2.9.7: On passe de X à la variété abélienne duale en remplaçant P par $N^* = \mathcal{D}^{-1} \cdot N^{-1}$ et N par $P^* = \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1}$.

§3. Théorèmes rigide-analytiques

Tous les espaces algébriques formels dans ce § seront séparés et noethériens. S'ils se trouvent sur un espace algébrique de base spécifié on suppose leurs âmes de type fini sur la base.

LEMME 3.1: *Soient Y un espace algébrique de type fini sur un schéma de base noethérien S et $Y_0 \subset Y$ un sous-espace fermé. Soit A un anneau noethérien complet pour la topologie I -adique définie par un idéal $I \subset A$. On suppose que $\bar{U} = \text{Spec}(A)$ est un S -schéma. On pose $\mathfrak{U} = \text{Spf}(A)$. Soit $\mathfrak{f}: \mathfrak{U} \rightarrow Y|_{Y_0}$ un S -morphisme formel adique. Alors il existe un unique morphisme $f: \bar{U} \rightarrow Y$ dont le completé est $\mathfrak{f}$.*

PREUVE: Cela résulte du théorème d'existence de Grothendieck EGA III.5, appliqué au graphe de $\mathfrak{f}$ considéré comme schéma formel sur $\bar{U}$.

COROLLAIRE 3.2: *Soient $Y \rightarrow S$, et $Y_0 \subset Y$ comme ci-dessus. On suppose que $Y|_{Y_0}$ soit un schéma formel affine, $Y|_{Y_0} = \text{Spf}(A)$. On suppose que la structure de S -schéma formel sur $Y|_{Y_0}$ soit induit par une structure de S -schéma sur $\text{Spec}(A)$. (C'est toujours le cas si S est affine.) Alors il existe un unique morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow Y$ dont le completé soit l'identité sur $Y|_{Y_0}$.*

Au § précédent, on devait choisir un système inductif des anneaux $R^{(i)} \subset R_V$. Toutefois, on a:

LEMME 3.3: *Soit A un anneau noethérien complet pour la topologie I -adique pour $I \subset A$. Soit $\varphi: A \rightarrow V$ un homomorphisme adique (de type fini) dans un anneau de valuation discrète complet, à corps de fractions K . Soit R un anneau local artinien à corps résiduel K . On suppose φ relevé en un homomorphisme $\tilde{\varphi}: A \rightarrow R$, de sorte que $\tilde{\varphi}$ se factorise par $R_V \subset R$. Alors il existe un sous-anneau noethérien $R^{(0)} \subset R_V$ tel que (i) l'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ se factorise par $R^{(0)} \subset R_V$ et fait de $R^{(0)}$ une A -algèbre topologiquement de type fini, que (ii) la projection $R^{(0)} \rightarrow V$ est surjective et que (iii) la localisation de $R^{(0)}$ au point générique est égale à R . De plus, le système inductif $R^{(0)} \subset R^{(1)} \subset \dots$ défini par $R^{(0)}$ ne dépend que de $\tilde{\varphi}$.*

PREUVE: (a) On présente V sous la forme $V = A\{\xi_1, \dots, \xi_n\} = A\{X_1, \dots, X_n\}/\mathfrak{a}$. On relève $\xi_k \in V$ dans $\tilde{\xi}_k \in R_V$. Soient, pour $i \geq 1$, $\xi_{ij} \in \mathfrak{m}' \cap R_V$ des éléments qui définissent une base du K -espace

vectoriel $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}^{i+1}$. Soit $R^{(0)}$ le sous-anneau de R_V engendré topologiquement sur A (via $\tilde{\varphi}$) par $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n$ et les ξ_{ij} . Comme $\mathfrak{m}^N = 0$ pour $N \gg 0$, $R^{(0)}$ est topologiquement de type fini sur A , d'où (i). La propriété (ii) est triviale par construction. Pour voir (iii), soit $r \in R$. Alors l'image $\bar{r}$ de r dans K s'écrit $\bar{r} = k \cdot P(\xi_k)$, où $k \in K$ et $P(\xi_k)$ est une série formelle convergente en $\xi_1, \dots, \xi_n$ à coefficients dans A . Alors $\tilde{\xi}_k$ et $\tilde{\varphi}$ définissent $\tilde{P}(\tilde{\xi}_k) \in R^{(0)}$ et, en relèvent k à $\tilde{k} \in R$, on trouve un élément $r_0 = \tilde{k} \cdot \tilde{P}(\tilde{\xi}_k) \in (R^{(0)})_K$, tel que $\bar{r}_0 = \bar{r}$. Autrement dit, on peut supposer que $r \in \mathfrak{m}$. Par induction, on peut supposer que $\mathfrak{m}^{i+1} \subset R_K^{(0)}$. Soit $r \in \mathfrak{m}^i$ et écrivons-le comme $r = \sum_j s_j \xi_{ij} + r'$, où $r' \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $s_j \in R$. Comme $R_K^{(0)}$ se projette surjectivement sur K , on peut même supposer que $s_j \in R_K^{(0)}$. Mais alors le premier terme est dans $R_K^{(0)}$ et le deuxième l'est par hypothèse d'induction, d'où $r \in R_K^{(0)}$.

(b) Si $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$ sont deux sous-anneaux de R_V vérifiant les conditions (ii) et (iii), alors pour tout $\xi \in R^{(1)}$ il existe un entier n tel que $\xi \in R^{(i)}[N^{(2)}/\pi^{(2)n}]$ (notations comme au §2). Comme $R^{(1)}$ est une A -algèbre topologiquement de type fini, il existe un entier n tel que $R^{(1)} \subset R^{(2)}[N^{(2)}/\pi^{(2)n}]$. Si l'on intervertit les rôles de $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$ l'assertion d'unicité en suit. c.q.f.d.

3.4: En raison de ce lemme, étant donné un schéma formel $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ et ne considérant que des anneaux de valuation discrète complets V dont le spectre formel est de type fini sur $\mathfrak{Y}$, il suffit de se donner la A -algèbre locale artinienne R à corps résiduel K pour connaître le système inductif $R^{(i)} \subset R_V$. C'est ce que sera fait dans la suite sans autre commentaire.

Voici une autre remarque sur les conditions de finitude. Soit $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel affine et posons $\bar{U} = \mathrm{Spec}(A)$, $\bar{U}_0 =$ l'âme de $\mathfrak{U}$ et $\bar{U}^0 = \bar{U} \setminus \bar{U}_0$. Un morphisme $\mathrm{Spec}(K) \rightarrow \bar{U}^0$ sera dit *permis* s'il vient d'un morphisme formel de type fini $\mathrm{Spf}(V) \rightarrow \mathfrak{U}$.

Soit S un schéma de base noethérien, et $\bar{U}$ ci-dessus un S -schéma. Un morphisme $f^0: \bar{U}^0 \rightarrow Y^0$ dans un espace algébrique de type fini sur S sera dit *permis* s'il existe une immersion ouverte de Y^0 dans un S -espace algébrique propre Y telle que si $\mathrm{Spec}(K) \rightarrow \bar{U}^0$ est un morphisme permis, l'extension unique à $\mathrm{Spec}(V)$ du morphisme résultat $\mathrm{Spec}(K) \rightarrow Y$ envoie le point spécial dans $Y \setminus Y^0$. Cette condition ne dépend pas du choix particulier de Y .

Le but principal de ce § est de démontrer le théorème suivant:

THEOREME 3.5: *Soit Y^0 un espace algébrique de type fini sur un schéma de base S de type fini sur le spectre d'un corps ou d'un anneau de Dedekind excellent. On suppose qu'il existe une immersion ouverte*

de Y^0 dans un espace algébrique propre sur S [condition automatique si Y^0 est un schéma, et probablement en général].

Soient $\mathfrak{X}$ un espace algébrique formel sur S et $\mathfrak{U}_1 \rightarrow \mathfrak{X}$ un recouvrement étale par un schéma formel affine. On pose, avec $\mathfrak{U}_1 = \mathrm{Spf}(A_1)$, $\bar{U}_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$, $\bar{U}_{1_0} = \hat{\text{âme}} \text{ de } \mathfrak{U}_1$, $\bar{U}_1^0 = \bar{U}_1 \setminus \bar{U}_{1_0}$. On suppose que $\bar{U}_1^0$ est schématiquement dense dans $\bar{U}_1$. On suppose $\bar{U}_1$ muni d'une structure de S -schéma qui induise la structure de S -schéma formel sur $\mathfrak{U}_1$.

De même, si $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1 \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{U}_1$, on écrit $\mathfrak{U}_2 = \mathrm{Spf}(A_2)$ et $\bar{U}_2, \bar{U}_{2_0}, \bar{U}_2^0$. On suppose $\bar{U}_2$ muni d'une structure de S -schéma induisant la structure de S -schéma formel donnée sur $\mathfrak{U}_2$, tel que les projections $\bar{U}_2 \rightrightarrows \bar{U}_1$ soient des S -morphisms.

Soit $f_1^0: \bar{U}_1^0 \rightarrow Y^0$ un S -morphisme permis tel que les morphismes composés suivants soient égaux:

$$\bar{U}_2^0 \rightrightarrows \bar{U}_1^0 \longrightarrow Y^0.$$

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées:

- (i) Pour tout anneau de valuation discrète complet V de corps de fractions K , la suite d'applications suivante est exact (on ne considère que des morphismes permis):

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), \bar{U}_2^0) &\rightrightarrows \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), \bar{U}_1^0) \\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), Y^0). \end{aligned}$$

- (ii) Si K est comme dans (i) et si R est un anneau local artinien à corps résiduel K , alors on a une bijection

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(R), \bar{U}_1^0) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), \bar{U}_1^0) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(R), Y^0) \cdot \\ &\quad \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), Y^0). \end{aligned}$$

Alors il existe une immersion ouverte $j: Y^0 \subset Y$ dans un espace algébrique et un isomorphisme $\varphi: \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y} =_{\mathrm{df}} Y|_Y - Y^0$ tels que le morphisme de $\bar{U}_1$ dans Y , résultant d'après 3.1 de $\mathfrak{U}_1 \rightarrow \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$, induise $f_1^0: \bar{U}_1^0 \rightarrow Y^0 \subset Y$ sur $\bar{U}_1^0 \subset \bar{U}_1$.

Le couple (j, φ) est unique à isomorphisme unique près.

Pour démontrer ce théorème nous allons utiliser des méthodes de nature rigide-analytique. Le but de la géométrie rigide-analytique (au sens de M. Raynaud) est de pouvoir parler du complément de l'âme d'un schéma formel. Faute de disposer de fondements rigide-analytiques à la EGA, on se contentera d'un minimum de définitions; les

résultats qui sont à la base de la démonstration de 3.5 sont le critère d'immersion ouverte (3.15) et le théorème de recollement (3.24).

3.6: On appelle *éclatement admissible* d'un espace algébrique formel $\mathcal{X}$ un éclatement de $\mathcal{X}$ en un idéal qui contient un idéal de définition de $\mathcal{X}$.

Le composé de deux éclatements admissibles est un éclatement admissible; si $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ est un ouvert, un éclatement admissible de $\mathcal{U}$ se prolonge en un éclatement admissible de $\mathcal{X}$ (cf. [22], §5).

3.7: La catégorie des espaces rigide-analytiques est obtenue de la catégorie des espaces algébriques formels en rendant inversibles les éclatements admissibles. On note $\mathcal{X}^{an}$ l'espace rigide-analytique associé à $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{Y}$ est un espace algébrique formel,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{X}^{an}, \mathcal{Y}^{an}) = \varinjlim_{\substack{\text{éclatements} \\ \text{admissibles } \mathcal{X}' \text{ de } \mathcal{X}}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{adique}}(\mathcal{X}', \mathcal{Y})$$

(Ici, on n'accepte que des morphismes $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}$ de type fini).

L'espace algébrique formel $\mathcal{X}$ donnant lieu à l'espace rigide-analytique $\mathcal{X}^{an}$ est appelé un modèle formel; de même, un morphisme $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est appelé modèle formel, ou représentant, de $f^{an}: \mathcal{X}^{an} \rightarrow \mathcal{Y}^{an}$.

3.8: Soit $\mathcal{X}^{an}$ un espace rigide-analytique. On peut toujours choisir un tel modèle formel $\mathcal{X}$ que l'annulateur de tout idéal de définition soit nul: en effet, si $\mathcal{X}$ est un modèle formel arbitraire on le remplacera par l'éclatement en son âme. On décrira une telle situation en disant que '*le complément de l'âme est schématiquement dense dans $\mathcal{X}$* '.

3.9: On reprend les notations de 2.1: Comme $\mathrm{Spf}(R^{(i)})$ et $\mathrm{Spf}(R^{(j)})$, $i, j \geq 0$, ne diffèrent que par un éclatement admissible, l'espace rigide-analytique $\mathrm{Spec}(R^{(i)})^{an}$ est indépendant de i ; on le note $\mathrm{Spec}^{an}(R)$. Autrement dit, la notation ' $\mathrm{Spec}^{an}(R)$ ' présuppose le choix du système inductif des $R^{(i)}$ dans R_V (cf. toutefois, Lemme 3.3 qui justifie cette notation lorsqu'on ne considère que des anneaux de valuation discrète complets dont le spectre formel est de type fini sur un schéma formel $\mathcal{Y}$). On voit donc qu'il y a équivalence entre les notions de R -espace rigide-analytique séparé de type fini (cf. §2) et d'espace rigide-analytique muni d'un morphisme rigide-analytique vers $\mathrm{Spec}^{an}(R)$ (à ceci près qu'on a formé la catégorie des espaces rigide-analytiques à partir des espaces algébriques formels et non pas à partir des schémas formels).

3.10: Soit $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $I \subset A$ un idéal de définition. Rappelons les lemmes triviaux suivants:

LEMME 3.11: *Soit $\mathcal{P} \subset A$ un idéal premier ne contenant pas I . Alors il existe un idéal premier $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{P}$ qui est le noyau d'un homomorphisme adique topologiquement de type fini de A dans un anneau de valuation discrète complet. Un tel idéal premier $\mathcal{P}'$ est aussi le noyau d'un homomorphisme adique topologiquement de type fini de A dans un anneau de valuation discrète complet de corps de fractions égale au corps résiduel de A en $\mathcal{P}'$.*

Réciproquement, si $f: A \rightarrow V$ est un homomorphisme adique dans un anneau de valuation discrète complet, alors $\mathcal{P} = f^{-1}(0) \subset A$ est un idéal premier ne contenant pas I .

PREUVE: Soit $\mathcal{P}'$ un idéal premier contenant $\mathcal{P}$ et qui ne contient pas I , et qui est maximal avec ces propriétés. Pour voir que $\mathcal{P}'$ vérifie les conditions imposées, on peut passer de A à $A/\mathcal{P}'$. Dans le schéma affine correspondant le point générique est isolé. Par suite, c'est un anneau intègre semi-local de dimension ≤ 1 (EGA IV, 10.5.1); comme il est complet par rapport à la topologie I -adique, c'est un anneau local intègre complet de dimension 1. Son normalisé V est donc un anneau de valuation discrète complet qui est un module fini sur $A/\mathcal{P}'$. L'homomorphisme naturel de A dans V est adique topologiquement de type fini et a $\mathcal{P}'$ comme noyau. La deuxième assertion résulte de ce que tout homomorphisme adique de $A/\mathcal{P}'$ dans un anneau de valuation discrète doit se factoriser par le normalisé.

La réciproque est triviale.

c.q.f.d.

REMARQUE: L'ensemble des idéaux premiers $\mathcal{P}'$ ci-dessus est l'analogue rigide-analytique de l'ensemble des points *fermés* en géométrie algébrique.

LEMME 3.12: *Avec les notations de 3.10, soit M un A -module de type fini. Pour qu'il existe un entier n tel que $I^n \cdot M = 0$ il faut et il suffit que $M_{\mathcal{P}} = 0$ pour tout idéal premier $\mathcal{P} \subset A$ qui est noyau d'un homomorphisme adique topologiquement de type fini de A dans un anneau de valuation discrète complet.*

PREUVE: Pour un tel idéal premier $\mathcal{P}$, $I_{\mathcal{P}} = A_{\mathcal{P}}$. Donc, si $I^n \cdot M = 0$, alors $M_{\mathcal{P}} = 0$. Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ un idéal premier ne contenant pas I . Alors $M_{\mathcal{P}} = 0$ car c'est un localisé de $M_{\mathcal{P}'}$, pour $\mathcal{P}'$ un idéal de A qui est noyau d'un homomorphisme adique topologiquement de type

fini de A dans un anneau de valuation discrète complet. Par suite, $\text{supp}(M) \subset V(I)$ et comme M est de type fini, il existe n tel que $I^n \cdot M = 0$.

COROLLAIRE 3.13: *Avec les notations de 3.10, soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal. Pour qu'il existe un entier n tel que $\mathfrak{a} \supset I^n$ il faut et il suffit que $\mathfrak{a}_{\mathcal{P}} = A_{\mathcal{P}}$ pour tout idéal premier $\mathcal{P} \subset A$ qui est noyau d'un homomorphisme adique topologiquement de type fini de A dans un anneau de valuation discrète complet.*

PREUVE: On applique le lemme précédent à $A/\mathfrak{a}$.

3.14: Un morphisme $\mathcal{U}^{an} \rightarrow \mathcal{X}^{an}$ est une *immersion ouverte* s'il existe un modèle formel $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ qui est une immersion ouverte formelle. Un des buts de ce § est de démontrer le théorème suivant, qui est à rapprocher au résultat principal de [7].

THEOREME 3.15 (Critère infinitésimal d'immersion ouverte): *Un morphisme $f^{an}: \mathcal{X}^{an} \rightarrow \mathcal{Y}^{an}$ est une immersion ouverte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

- (i) *Pour un corps K complet pour une valuation discrète, l'application canonique*

$$\text{Hom}(\text{Spec}^{an}(K), \mathcal{X}^{an}) \longrightarrow \text{Hom}(\text{Spec}^{an}(K), \mathcal{Y}^{an})$$

est injective.

- (ii) *Soit R un anneau local artinien à corps résiduel complet K , comme en 3.9. L'application canonique*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\text{Spec}^{an}(R), \mathcal{X}^{an}) &\longrightarrow \text{Hom}(\text{Spec}^{an}(K), \mathcal{X}^{an}) \times \text{Hom}(\text{Spec}^{an}(R), \mathcal{Y}^{an}) \\ &\quad \text{Hom}(\text{Spec}^{an}(K), \mathcal{Y}^{an}) \end{aligned}$$

est bijective.

Intuitivement, la condition (i) (resp. (ii)) nous assure que f^{an} soit 'injectif' (resp. que f^{an} soit 'infinitésimalement étale').

La nécessité de ces conditions est claire.

3.16: *Démontrons la suffisance de ces conditions d'abord dans le cas où $\mathcal{Y}^{an} = \text{Spec}^{an}(R)$, avec R un anneau local artinien à corps résiduel valué complet K , comme en 3.9.*

On peut supposer et on supposera que $\mathcal{X}^{an}$ est non-vide et choisira

un modèle formel $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(R^{(0)})$ tel que le complément de l'âme de $\mathfrak{X}$ soit schématiquement dense.

Montrons qu'il n'y a qu'un seul point dans X_0 . En effet, supposons qu'il y ait deux points dans X_0 qu'on peut supposer de type fini sur Y_0 . Alors, comme le complément de l'âme est dense dans $\mathfrak{X}$, on pourrait trouver deux morphismes de type fini $\mathrm{Spf}(V_i) \rightarrow \mathfrak{X}$ ($i = 1, 2$) de spectres formels d'anneaux de valuation discrètes complétés V_i , qui ont ces points respectivement comme leurs images. Alors il existe un anneau de valuation discrète complété V_{12} qui contient V , V_1 et V_2 et des morphismes de type fini $\varphi_i: \mathrm{Spf}(V_{12}) \rightarrow \mathfrak{X}$ qui se factorisent à travers $\mathrm{Spf}(V_i)$.¹ La condition (i) implique que $\varphi_1 = \varphi_2$. Donc X_0 n'a qu'un seul point et $\mathfrak{X}$ est donc fini sur $\mathfrak{Y}$. Il en résulte que $\mathfrak{X}$ est algébrisable en un schéma $X = \mathrm{Spec}(B)$ fini sur $Y = \mathrm{Spec}(R)$. Alors B est un anneau local, de sorte que B_{red} est une V -algèbre locale finie intègre.

La condition (i) implique que $V \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{red}}$. La condition (ii) implique que la localisation au point générique de $\mathrm{Spec}(B)$ est isomorphe à R . Il en résulte que $\mathfrak{X}^{an} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}^{an}$.

On a aussi obtenu le lemme suivant:

LEMME 3.17: *Avec les notations de 3.9, soit $\mathfrak{Y}^{an} = \mathrm{Spec}^{an}(R)$; soit $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(R^{(i)})$ un modèle formel. Supposons que $\mathfrak{f}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ soit le modèle formel d'un morphisme rigide-analytique qui vérifie les conditions (i) et (ii) de 3.15. Alors $\mathfrak{f}$ est algébrisable, i.e., il existe un morphisme de type fini de schémas $X \rightarrow Y = \mathrm{Spec}(R^{(i)})$ dont le complété soit $\mathfrak{f}$. L'algébrisation est unique à isomorphisme unique près.*

Si le complément de l'âme est schématiquement dense dans $\mathfrak{X}$, cela résulte de ce qui précède. Dans le cas général il y a un éclatement admissible $\mathfrak{X}_1 \hookrightarrow \mathfrak{X}$ qui est une immersion fermée et tel que $\mathfrak{f}_1^{an}: \mathfrak{X}_1^{an} \rightarrow \mathfrak{Y}^{an}$ est $\mathfrak{f}^{an}$. On peut algébriser $\mathfrak{f}_1$ en un morphisme $f_1: X_1 \rightarrow Y$, et X_1 est affine d'âme réduit un seul point. Pour démontrer le lemme, on peut donc supposer que $\mathfrak{X}$ est affine. On peut décomposer $\mathfrak{X}_1$ en une réunion de sous-schémas formels fermés affines $\mathfrak{X}_1 = \mathrm{Spf}(B_1)$ et $\mathfrak{X}_2 = \mathrm{Spf}(B_2)$, où $I_{\mathfrak{X}_2}^n = 0$ pour $n \geq 0$. Leur intersection $\mathfrak{X}_{12} = \mathrm{Spf}(B_{12})$ est le spectre d'un anneau local artinien. Soit $X_1 = \mathrm{Spec}(B'_1)$. Alors B_1 est la complétion de la A -algèbre B'_1 et $B = B_1 \times_{B_{12}} B_2$ est la complétion de

¹ En effet, les V_i sont complétions d'anneaux de valuation discrète V'_i de type fini sur V ; il existe donc un anneau de valuation discrète V'_{12} de type fini sur V qui domine V'_1 et V'_2 et il suffit de prendre pour V_{12} la complétion de V'_{12} .

$B_1' \times_{B_{12}} B_2$. Le morphisme $\text{Spec}(B_1' \times_{B_{12}} B_2) \rightarrow Y$ est l'algébrisation cherchée. L'assertion d'unicité est aussi facile à voir.

La démonstration du Théorème 3.15 dans le cas général procédera en quatre étapes. Pour la démonstration on peut supposer que $\mathcal{Y}^{an}$ soit affine, i.e. que $\mathcal{Y} = \text{Spf}(A)$ et qu'on ait choisi un modèle formel $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tel que le complément de l'âme soit schématiquement dense dans $\mathcal{X}$.

1^{ère} étape: On démontre: soit $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}' =_{\text{Def}} \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ l'immersion fermée, définie par l'idéal δ sur $\mathcal{X}'$. Soit I' un idéal de définition de $\mathcal{X}'$. Alors pour $N \gg 0$, $I'^N \cdot \delta = 0$.

Soit $\mathcal{U}'$ un recouvrement étale affine de $\mathcal{X}'$: $\mathcal{U}' = \text{Spf}(C)$. Soit $P \subset C$ un idéal premier qui est le noyau d'un homomorphisme adique topologiquement de type fini dans un anneau de valuation discrète complet V de corps de fractions le corps résiduel de C en P .

Soit $\mathcal{T} = \text{Spf}(V)$ et $g: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}'$ le morphisme obtenu. Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T} & & \\
 \searrow & \nearrow & \\
 \mathcal{T}_2 = \mathcal{T} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X}' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{T}_1 = \mathcal{T} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{Y}
 \end{array}$$

Les morphismes $\mathcal{T}_2^{an} \rightarrow \mathcal{T}_1^{an}$ et $\mathcal{T}_1^{an} \rightarrow \mathcal{T}^{an}$ vérifient encore les conditions (i) et (ii) du théorème (avec $\mathcal{X}^{an}$ resp. $\mathcal{Y}^{an}$ remplacé par $\mathcal{T}_2^{an}$ resp. $\mathcal{T}_1^{an}$, etc.): d'après le Lemme 3.17 précédent, ils sont algébrifiables en $T_2 \rightarrow T_1$ et $T_1 \rightarrow T$. Comme le morphisme $T_1 \rightarrow T$ est un isomorphisme au-dessus du point générique de T , l'idéal qui définit T dans T_2 est zéro au point générique; il en suit que l'image de $\delta \subset C$ dans V est zéro. Pour tout entier $n > 0$, soit $R_n = C_P / P^n \cdot C_P$.

On choisit un sous-anneau noethérien $R_n^{(0)}$ de R_n qui vérifie les conditions de 2.1 (cf. 3.9) et qui soit une C -algèbre topologiquement de type fini (cf. Lemme 3.3). Une répétition de l'argument précédent en remplaçant $\mathcal{T}$ par $\text{Spf}(R_n^{(i)})$, i convenable, montre que l'image de δ_P dans R_n est zéro. Il en suit que $\delta_P \subset P^n C_P$. Donc $\delta_P \subset \bigcap_n P^n C_P = 0$ et on conclut avec le Lemme 3.12 que l'image inverse de δ dans $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'}$ est tué par un idéal de définition de $\mathcal{U}'$, de sorte que δ est tué par un idéal de définition de $\mathcal{X}'$.

2^{ème} étape: Soit $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ un recouvrement étale affine de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U} = \mathrm{Spf}(B)$. Pour un idéal premier $P \subset B$, on écrit $p = P \cap A$. On démontre: *Pour tout idéal premier P ne contenant aucun idéal de définition, l'anneau local B_P est une A_p -algèbre plate.*

D'après 3.11, B_P est le localisé d'un localisé de B en un idéal premier qui est le noyau d'un homomorphisme adique topologiquement de type fini de B dans un anneau de valuation discrète complet. On peut donc supposer que P est un tel idéal premier et il suffit de montrer que pour tout $n > 0$ $B_P/p^n \cdot B_P$ est une $A_p/p^n \cdot A_p$ -algèbre plate. Avant de procéder nous insérons la remarque suivante:

REMARQUE 3.18: Soit $\mathrm{Spf}(B)$ un ouvert étale affine d'un éclatement admissible de $\mathrm{Spf}(A)$. Alors, pour tout idéal premier $P \subset B$ ne contenant aucun idéal de définition, B_P est une $A_{P \cap A}$ -algèbre fidèlement plate: cela résulte facilement de la définition des éclatements admissibles. Supposons en plus que P soit le noyau d'un homomorphisme adique de type fini de B dans un anneau de valuation discrète complet. Alors les anneaux complétés $\hat{B}_P$ et $\hat{A}_{P \cap A}$ sont isomorphes. Il suffit en effet de voir que pour tout $n \geq 0$, $B_P/P^n B_P$ est isomorphe à $A_{P \cap A}/(P \cap A)^n$ et pour cela on peut supposer que $(P \cap A)^n = 0$; mais alors on est dans le cas considéré dans le Lemme 3.17, et l'assertion en résulte.

Soit $A \rightarrow V$ un homomorphisme adique de A dans un anneau de valuation discrète complet qui a p comme noyau, et tel que le corps de fractions de V est le corps résiduel de A en p . Soit, pour $n \geq 1$, $R_n = A_p/p^n A_p$. On choisit un sous-anneau noethérien $R_n^{(0)}$ de R_n qui vérifie les conditions de 2.1 (cf. 3.9) et qui est une A -algèbre topologiquement de type fini (cf. 3.3). On obtient ainsi un morphisme analytique $\mathfrak{X}_n^{an} = \mathrm{Spec}^{an}(R_n) \rightarrow \mathcal{Y}^{an}$ qui est induit par un morphisme formel $\mathfrak{X}_n = \mathrm{Spf}(R_n^{(i)}) \rightarrow \mathcal{Y}$ pour i convenable. On obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_n = \mathcal{U} \times_{\mathcal{Y}} \mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}_n = \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathfrak{X}_n & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}_n & \longrightarrow & \mathcal{Y}. \end{array}$$

Le morphisme $\mathfrak{X}_n \rightarrow \mathfrak{X}_n$ vérifie les conditions (i) et (ii); on peut donc l'algébriser en un morphisme qui induit un isomorphisme au-dessus

des points génériques. On peut donc trouver une unique section au morphisme $\mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$. Soit $\mathcal{X}'_n = \mathcal{U}_n \times_{\mathcal{X}_n} \mathcal{T}_n$; c'est un schéma formel affine d'anneau affine B'_n , qui est aussi un éclaté admissible de $\mathcal{X}_n$. On a une suite d'homomorphismes $B \rightarrow B_n = B/p^n B \rightarrow B'_n$ et, comme $P \supset p$, il existe un unique idéal premier P'_n de B'_n dont l'image réciproque dans B soit P . Si $P_n \subset B_n$ désigne l'image réciproque de P'_n dans B_n , on a $B'_{nP'_n} = B_{nP_n} = B_P/p^n B_P$ (cf. Remarque 3.18). Mais $B'_{nP'_n}$ est le localisé d'une algèbre formellement étale sur $R_n^{(i)}$, de sorte qu'il est plat sur l'anneau local du point générique de $R_n^{(i)}$, qui, lui, est $A_p/p^n A_p$.

3^{ème} étape: Elle consiste à énoncer le théorème de platification de Raynaud (non-publié; pour l'analogue algébrique cf. [22]; voir aussi [9], [10]). Il implique ce qui suit:

Soit $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme entre espaces algébriques formels tel que pour tout morphisme étale $\mathrm{Spf}(A) \rightarrow \mathcal{Y}$ et tout morphisme étale $\mathrm{Spf}(B) \rightarrow \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathrm{Spf}(A)$ et tout idéal premier $P \subset B$ ne contenant aucun idéal de définition de B , B_P soit A_p -plat. Alors il existe un modèle formel $f': \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ du morphisme analytique $f^{an}: \mathcal{X}^{an} \rightarrow \mathcal{Y}^{an}$ qui est plat.

En utilisant la Remarque 3.18, il est facile de voir que si $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ vérifie les hypothèses de ce théorème, alors tout modèle formel de $f^{an}: \mathcal{X}^{an} \rightarrow \mathcal{Y}^{an}$ les vérifie.

4^{ème} étape: Démontrons le Théorème 3.15: D'après les 2^{ème} et 3^{ème} étapes, on peut choisir un modèle formel plat $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. De plus, on peut supposer que le complément de l'âme de $\mathcal{Y}$ soit schématiquement dense. Mais f étant plat, le complément de l'âme de $\mathcal{X}$ sera alors schématiquement dense: en effet, tout idéal de définition de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ contient un idéal de la forme $I \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, où $I \subset \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ est un idéal de définition; par platitude $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}}(I) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(I \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(I \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, et par suite $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(I \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = 0$. Pour la même raison, le complément de l'âme de $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ est schématiquement dense. Comme, d'après la 1^{ère} étape, $\delta \cdot I'^N = 0$ il en suit que $\delta = 0$, donc $\mathcal{X} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ et f induit un isomorphisme de $\mathcal{X}$ sur son image qui est un sous-espace formel ouvert de $\mathcal{Y}$ (on invoque SGA1, I.5.1 sur les âmes). c.q.f.d.

Pour rassurer le lecteur qui n'a pas envie d'utiliser le théorème de platification, voici une version plus faible de 3.15 qui sera la seule nécessaire pour la suite de cet article.

THEOREME 3.19: *Soit $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un modèle formel propre d'un*

morphisme rigide-analytique $f^{an}: \mathcal{X}^{an} \rightarrow \mathcal{Y}^{an}$ qui vérifie les conditions (i) et (ii) de 3.15. Alors il existe un modèle formel $\mathfrak{f}': \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ tel que $\mathfrak{f}'$ est une modification formelle (au sens de M. Artin [2]) d'une réunion de composantes connexes de $\mathcal{Y}'$.

PREUVE: On peut supposer $\mathcal{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ affine et soit $I \subset A$ un idéal de définition. Comme $\mathfrak{f}$ est propre, on peut parler de l'image de $\mathfrak{f}$; c'est le sous-schéma fermé de $\mathcal{Y}$ défini par l'idéal $\mathfrak{a}_1 = \mathrm{Ann}_A \mathfrak{f}_*(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. Soit $\mathfrak{a}_2 = \bigcup_{\nu > 0} \mathrm{Ann}_A(\mathfrak{a}_1^\nu) \subset A$. Nous allons d'abord démontrer que $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ contient un idéal de définition.

En effet, soit $\mathrm{Spf}(B)$ un recouvrement étale de $\mathcal{X}$. Si $p \subset A$ est un idéal premier ne contenant aucun idéal de définition on a par platitude (cf. la 2^{ème} étape de la démonstration de 3.15), que $\mathfrak{a}_{1p} = \mathrm{Ann}_{A_p}(B)$ est égale à A_p , ou (0) , de sorte que toujours $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)_p = A_p$; l'assertion résulte alors de 3.13. Ensuite, démontrons que pour $n \geq 0$, $I^n \cdot \mathfrak{a}_1 \cap I^n \cdot \mathfrak{a}_2 = 0$.

En effet, d'après 3.12, et avec les notations précédentes il suffit de voir que $\mathfrak{a}_{1p} \cap \mathfrak{a}_{2p} = 0$, ce qui est bien clair.

Fixons un tel n et soient $\overline{\mathfrak{a}}_1 = I^n \mathfrak{a}_1$ et $\overline{\mathfrak{a}}_2 = I^n \mathfrak{a}_2$, qui définissent des sous-schémas fermés $\overline{\mathcal{Y}}_1$ resp. $\overline{\mathcal{Y}}_2$ de $\mathcal{Y}$. Soient $\mathcal{Y}'$ l'éclaté de $\mathcal{Y}$ en l'idéal $\overline{\mathfrak{a}}_1 + \overline{\mathfrak{a}}_2$ (admissible d'après ce qui précède) et $\mathcal{Y}'_1$ resp. $\mathcal{Y}'_2$ les éclatés induits de $\overline{\mathcal{Y}}_1$ resp. $\overline{\mathcal{Y}}_2$ (ce ne sont pas les produits fibrés).

LEMME 3.20: $\mathcal{Y}'_1 \cap \mathcal{Y}'_2 = \emptyset$ et $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}'_1 \cup \mathcal{Y}'_2$.

PREUVE: Soit $y \in \mathcal{Y}'$ et $(\overline{\mathfrak{a}}_1 + \overline{\mathfrak{a}}_2) \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} = h \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Y},h}$ pour un élément $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y}$ qui n'est pas un diviseur de zéro.

Les sous-schémas fermés $\mathcal{Y}'_1$ resp. $\mathcal{Y}'_2$ de $\mathcal{Y}'$ sont définis en y par les idéaux

$$\mathfrak{a}'_i = \bigcup_{\nu > 0} (\overline{\mathfrak{a}}_i \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} : h^\nu) \quad (i = 1, 2).$$

Comme $\overline{\mathfrak{a}}_1 \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \cap \overline{\mathfrak{a}}_2 \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} = 0$ et comme h n'est pas diviseur de zéro, $\bigcup_{\nu > 0} (\overline{\mathfrak{a}}_1 \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} \cap \overline{\mathfrak{a}}_2 \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} : h^\nu) = 0$ et par suite $\mathfrak{a}'_1 \cap \mathfrak{a}'_2 = 0$. Il reste à montrer que $\mathfrak{a}'_1 + \mathfrak{a}'_2$ engendre l'idéal unité. Si $y \in \mathcal{Y}'_1 \cap \mathcal{Y}'_2$, alors

$$\begin{aligned} (\overline{\mathfrak{a}}_1 + \overline{\mathfrak{a}}_2) \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} &= h \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} \subset (\mathfrak{a}'_1 + \mathfrak{a}'_2) \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} \\ &= \bigcup_{\nu > 0} ((\overline{\mathfrak{a}}_1 + \overline{\mathfrak{a}}_2) \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} : h^\nu). \end{aligned}$$

Il en suit que $1 \in (\mathfrak{a}'_1 + \mathfrak{a}'_2) \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{y}', y}$. Cela démontre le lemme.

Soit $\mathfrak{X}'$ l'éclaté de $\mathfrak{X}$ induit de $\mathfrak{Y}'$. Le morphisme canonique $f': \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{Y}'$ se factorise par $\mathfrak{Y}'_1$. Pour démontrer 3.13; il suffit de voir que le morphisme $f': \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{Y}'_1$ est une modification formelle; autrement dit, on peut supposer dès le début que $\mathfrak{a}_1 = 0$. De plus, on peut supposer $\mathfrak{Y}$ est affine et que le complément de l'âme soit schématiquement dense. La démonstration dans ce cas procédera en deux étapes.

1^{ère} étape: On démontre: un morphisme de type fini $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}(V) \rightarrow \mathfrak{Y}$ du spectre formel d'un anneau de valuation discrète complèt se relève en un morphisme $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$.

En effet, le morphisme $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Z}$ vérifie les conditions (i) et (ii); il est donc algébrisable en un morphisme propre $T' \rightarrow T = \mathrm{Spec}(V)$. Si la fibre générique de ce morphisme est non-vide, elle est isomorphe au point générique de T ; la section rationnelle obtenue s'étendra à T tout entier par le critère valuatif de propreté et définira le morphisme $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}' \rightarrow \mathfrak{X}$ cherché. Pour voir que la fibre générique n'est pas vide, il suffit de montrer que l'homomorphisme naturel $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow f'_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'})$ est injectif. On peut appliquer le lemme suivant:

LEMME: Soit $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ un morphisme propre tel que l'homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est injectif. Alors pour tout idéal $J \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$, et posant $\mathfrak{Y}_1 = \mathrm{Spf}(A/\sqrt{J})$ et $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1 \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}_1} \rightarrow f_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1})$ est injectif.

PREUVE: Il suffit de voir que $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \cap f_* f^*(J) \subset \sqrt{J}$. Soit d'abord J un idéal principal, $J = b \cdot A$. Si $a \in A$ est de la forme $a = b \cdot r \in J \cdot f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, alors $r \in f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est entier sur A et a vérifie donc une équation de la forme $a^n + b_1 \cdot a^{n-1} + \dots + b_n = 0$ avec $b_k \in J^k$. Par suite, $a \in \sqrt{J}$. Le cas général, où J n'est plus nécessairement principal, se réduit au cas précédent par induction sur le nombre minimal de générateurs de J .

2^{ème} étape: On démontre: les idéaux de Jacobi et de Cramer $J(f)$ et $\mathrm{Cr}(f)$ contiennent un idéal de définition de $\mathfrak{X}$.

Soit $h: \mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(B) \rightarrow \mathfrak{X}$ un recouvrement étale. Soit $P \subset B$ un idéal premier noyau d'un homomorphisme adique topologiquement de type fini dans un anneau de valuation discrète complet. D'après 3.13 et le caractère local de $J(f)$ et $\mathrm{Cr}(f)$, il suffit de voir que $J(f')_P = \mathrm{Cr}(f')_P = B_P$, où $f' = f \circ h$. Présentons B comme suit

$$B = A\{X_1, \dots, X_n\}/\{f_1, \dots, f_m\}.$$

LEMME 3.21: *Après permutation des f_i , on peut trouver $f_1, \dots, f_n$ tel que $\det_{1 \leq i, j \leq n}(\partial f_i / \partial X_j)$ soit une unité dans B_P .*

PREUVE: Soit $B \rightarrow V$ un morphisme adique topologiquement de type fini dans un anneau de valuation discrète complet qui a P comme noyau et tel que le corps de fractions de V est le corps résiduel de B en P ; soit $\mathfrak{T} = \mathrm{Spf}(V) \rightarrow \mathbb{A}$ le morphisme correspondant. Le morphisme $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{T}$ vérifie les conditions (i) et (ii) et peut donc être algébrisé en $T' \rightarrow T$. C'est un isomorphisme au-dessus du point générique de T . Il en résulte que l'image de $J(\mathfrak{f})$ dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$ contient un idéal de définition, de sorte que l'image de $J(\mathfrak{f}')$ dans V est non-nul. On peut donc trouver $f_1, \dots, f_n$ avec la propriété annoncée.

Pour conclure la deuxième étape, il suffit de voir que si $P' \subset A\{X\} =_{\mathrm{Def}} A\{X_1, \dots, X_n\}$ est l'image réciproque de P , alors $(f_1, \dots, f_n) \cdot A\{X\}_{P'} = (f_1, \dots, f_n)A\{X\}_{P'}$. Montrons que si $f \in (f_1, \dots, f_n)A\{X\}$, alors f est annulé par la composition des applications

$$A\{X\} \longrightarrow A\{X\}_{P'} \longrightarrow A\{X\}_{P'}/(f_1, \dots, f_n, P'^k),$$

pour tout $k \geq 0$. Soit R_k un anneau local artinien à corps résiduel K qui est plat sur $A\{X\}_{P'}/(f_1, \dots, f_n, P'^k)$. On peut trouver un sous-anneau local noethérien $R_k^{(0)} \subset R_k$ qui vérifie les conditions de 2.1 (cf. 3.9) et soit une A -algèbre topologiquement de type fini (cf. 3.3). On obtient un morphisme $\mathfrak{T}_k = \mathrm{Spf}(R_k^{(i)}) \rightarrow \mathfrak{Y}$ (pour i convenable) qui prolonge le morphisme $\mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{Y}$. Le morphisme $\mathfrak{T}'_k = \mathfrak{T}_k \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{T}_k$ vérifie les conditions (i) et (ii) et peut donc être algébrisé en $T'_k \rightarrow T_k$ et induit un isomorphisme au-dessus du point générique. Quitte à changer i , on peut donc relèver le morphisme $\mathfrak{T}_k \rightarrow \mathfrak{Y}$ en un morphisme $\mathfrak{T}_k \rightarrow \mathfrak{X}$ et même, comme $\mathbb{A}$ est étale sur $\mathfrak{X}$, en un morphisme $\mathfrak{T}_k \rightarrow \mathbb{A}$ qui prolonge le morphisme $\mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{A}$. Il en résulte que f s'envoie en zéro par $A\{X\}_{P'} \rightarrow R_k^{(i)}$. Alors f s'envoie en zéro par $A\{X\}_{P'} \rightarrow R_k$, et par suite aussi par $A\{X\}_{P'} \rightarrow A\{X\}_{P'}/(f_1, \dots, f_n, P'^k)$.

Ceci conclut la deuxième étape.

Pris ensemble avec la 1^{ière} étape de la démonstration de 3.15, on a vu que $\mathfrak{f}$ vérifie les propriétés qui définissent une modification formelle. c.q.f.d.

3.22: Dans les numéros 3.22–3.25 on fixe un schéma de base noethérien S . Soit Y un espace algébrique propre sur S .

Nous aurons besoin de la version suivante du lemme de Chow.

LEMME 3.23: Soit $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel affine sur S . On suppose que $\bar{U} = \mathrm{Spec}(A)$ est un S -schéma qui induit la structure de S -schéma formel donnée sur $\mathfrak{U}$. Soit $\bar{U}^0 = \bar{U} \setminus U_0$.

Soit $f^0: \bar{U}^0 \rightarrow Y$ un morphisme. Alors il existent un éclatement admissible U' de $\bar{U}$ et un morphisme $f': U' \rightarrow Y$ qui induise f^0 sur $U'^0 = U' \setminus U'_0 \xrightarrow{\sim} \bar{U}^0$.

Deux telles paires (U'_1, f'_1) , (U'_2, f'_2) peuvent être dominées par une troisième.

PREUVE: On étend à $\bar{U} \times_S Y$ le faisceau d'idéaux sur $\bar{U}^0 \times_S Y^0$ qui définit le graphe $\Gamma^0 \subset \bar{U}^0 \times_S Y^0$ et obtient un sous-espace fermé $\bar{\Gamma} \subset \bar{U} \times_S Y$ dont l'intersection avec $\bar{U}^0 \times_S Y^0$ est Γ^0 . Alors la projection de $\bar{\Gamma}$ sur $\bar{U}$ induit un isomorphisme sur $\bar{U}^0$ et est propre d'après l'hypothèse sur Y faite. Donc, cf. [22], 5.7.12, il existe un éclatement admissible U' de $\bar{\Gamma}$ tel que le composé $U' \rightarrow \bar{\Gamma} \rightarrow \bar{U}$ soit un éclatement admissible. On a ainsi obtenu un morphisme $f': U' \rightarrow Y$ qui induise f^0 sur U'^0 .

Pour voir la dernière assertion, on éclate $\bar{U}$ en la réunion des centres correspondants à U'_1 et U'_2 de sorte qu'on obtient U'_{12} s'envoyant par p_i vers U'_i ($i = 1, 2$). On peut aussi supposer U'_{12} schématiquement dense dans U'_{12} . Alors les morphismes $f_1 \circ p_1$ et $f_2 \circ p_2$ coïncident sur U'_{12} , et sont donc les mêmes. c.q.f.d.

Soit $Y^0 \subset Y$ un sous-espace ouvert et schématiquement dense et notons $Y_0 = Y \setminus Y^0$ son complément et $\mathfrak{Y} = Y/Y_0$ le complété formel de Y lelong Y .

THEOREME 3.24 (Théorème de recollement): Soient $\mathfrak{X}$ un espace algébrique formel tel que le complément de l'âme soit dense et $\mathfrak{U}_1 \rightarrow \mathfrak{X}$ un recouvrement étale par un schéma formel affine $\mathfrak{U}_1 = \mathrm{Spf}(A_1)$. On note $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1 \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{U}_1 = \mathrm{Spf}(A_2)$. On pose $\bar{U}_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$ et $\bar{U}_1^0 = \bar{U}_1 \setminus U_{10}$, et $\bar{U}_2 = \mathrm{Spec}(A_2)$ et $\bar{U}_2^0 = \bar{U}_2 \setminus U_{20}$. On suppose que $\bar{U}_1$ est un S -schéma qui induit la structure de S -schéma formel donnée sur $\mathfrak{U}_1$. Le morphisme $\bar{U}_2 \rightarrow \bar{U}_1$ fait de $\bar{U}_2$ un S -schéma qui induit la structure de S -schéma formel donnée sur $\mathfrak{U}_2$. On suppose donné un morphisme permis $f_1^0: \bar{U}_1^0 \rightarrow Y^0$ tels que les composés

$$\bar{U}_2^0 \rightrightarrows \bar{U}_1^0 \xrightarrow{f_1^0} Y$$

soient égaux. Alors il existent un éclatement admissible $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ et un morphisme de type fini $\mathfrak{f}': \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{Y}$ tel que, si $U'_1 \rightarrow \bar{U}_1$ est l'algébrisé de

l'éclatement admissible induit $\mathbb{U}'_1 = \mathbb{U}_1 \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}' \rightarrow \mathbb{U}_1$, il existe un morphisme $f'_1: U'_1 \rightarrow Y$ qui au-dessus de $U_1^0 \xrightarrow{\sim} \bar{U}_1^0$ induit f_1^0 et dont le complété soit le morphisme composé $\mathbb{U}'_1 \xrightarrow{\quad} \mathfrak{X}' \xrightarrow{\quad} \mathfrak{Y}$.

Si $(\mathfrak{X}', \mathfrak{f}')$ est donné, alors f'_1 est déterminé de façon unique. Le morphisme rigide-analytique $f^{an}: \mathfrak{X}^{an} \rightarrow \mathfrak{Y}^{an}$ défini par $\mathfrak{f}'$ ne dépend pas du choix de $(\mathfrak{X}', \mathfrak{f}')$.

Démonstration:

(a) Montrons d'abord l'existence d'un éclatement admissible $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$ et d'un morphisme $\mathfrak{f}'_1: \mathbb{U}'_1 = \mathbb{U} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{Y}$ tels que, si $U'_1 \rightarrow \bar{U}_1$ est l'algébrisé de l'éclatement admissible $\mathbb{U}'_1 \rightarrow \mathbb{U}_1$, alors $\mathfrak{f}'_1$ est le complété formel d'un morphisme $f'_1: U'_1 \rightarrow Y$ qui au-dessus de $U_1^0 \xrightarrow{\sim} \bar{U}_1^0$ induit f_1^0 .

D'après le lemme précédent, on peut trouver un éclatement admissible $U''_1 \rightarrow \bar{U}_1$ et un morphisme $f''_1: U''_1 \rightarrow Y$ qui au-dessus de $U_1^0 \xrightarrow{\sim} \bar{U}_1^0$ induit f_1^0 . Par suite, on peut trouver un éclatement admissible $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$ tel que si $\mathbb{U}' = \mathbb{U} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$ et que $U' \rightarrow \bar{U}$ est l'algébrisé de $\mathbb{U}' \rightarrow \mathbb{U}$, ce dernier morphisme se factorise par U'' .¹ La paire $\mathfrak{X}'$ et le composé $f'_1: U' \rightarrow U'' \rightarrow Y$ qui, comme f_1^0 est permis, définit $\mathfrak{f}'_1: \mathbb{U}'_1 \rightarrow \mathfrak{Y}$, répondent à la question.

(b) Soit $\mathbb{U}'_2 = \mathbb{U}'_1 \times_{\mathfrak{X}'} \mathbb{U}'_1 = \mathbb{U}_2 \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$. C'est un éclatement admissible de $\mathbb{U}_2$ et peut être algébrisé en $U'_2 \rightarrow \bar{U}_2$. Le diagramme suivant est 'commutatif':

$$\begin{array}{ccc} U'_2 \xrightarrow{\sim} U_1^0 & & \\ \downarrow \wr & \downarrow \wr & \\ \bar{U}_2^0 \xrightarrow{\sim} \bar{U}_1^0 & \searrow & Y. \end{array}$$

Comme $U_2^0 \subset U'_2$ est dense, les deux composés $U'_2 \xrightarrow{\sim} U_1^0 \rightarrow Y$ sont égaux. Par suite, les composés $\mathbb{U}'_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{U}'_1 \rightarrow \mathfrak{Y}$ sont égaux et définissent le morphisme formel cherché $\mathfrak{f}': \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{Y}$.

(c) La première assertion d'unicité résulte de ce que si $f_1^{(1)}$,

¹ Soit $\mathbb{U}'$ l'éclatement de $\mathbb{U}$ en $U \subset U_n$ ($n \gg 0$); alors il existe un sous-espace relativement ouvert et dense U^0 dans U qui est fini sur son image dans X_n . Soient V l'adhérence de l'image de U^0 dans X_n et $\mathfrak{X}^{(1)}$ l'éclatement admissible de $\mathfrak{X}$ en V . Alors $\mathbb{U}^{(1)} = \mathfrak{X}^{(1)} \times_{\mathfrak{X}} \mathbb{U}$ est l'éclatement admissible de $\mathbb{U}$ en l'image réciproque de V dans U_n . Soit $\mathbb{U}^{(1)'} l'éclatement admissible de l'image réciproque de U dans $\mathbb{U}^{(1)}$; alors le morphisme de $\mathbb{U}^{(1)'}$ dans $\mathbb{U}^{(1)}$ est un éclatement de centre contenu dans l'image réciproque de $U \setminus U^0$ dans $\mathbb{U}^{(1)}$. Remplaçons $\mathbb{U}'$, $\mathbb{U}$ et $\mathfrak{X}$ par $\mathbb{U}^{(1)'}$, $\mathbb{U}^{(1)}$ et $\mathfrak{X}^{(1)}$, et appliquons le procédé précédent à cette nouvelle situation. On obtient ainsi une suite $\mathbb{U}^{(i)}$, $\mathbb{U}^{(i)}$ et $\mathfrak{X}^{(i)}$. Après un nombre fini de telles opérations on obtient $\mathbb{U}^{(n)}$, $\mathbb{U}^{(n)}$, $\mathfrak{X}^{(n)}$ tels que $\mathbb{U}^{(n)'} = \mathbb{U}^{(n)}$. Alors $\mathfrak{X}^{(n)}$ est un éclatement admissible de $\mathfrak{X}$ qui convient.$

$f_1^{(2)}: U'_1 \rightarrow Y$ sont deux morphismes avec mêmes complétés, alors, comme Y est de type fini, il coïncident dans un voisinage ouvert de $U'_{10} \subset U'_1$ (EGA I. 10.9.4), donc partout.

(d) Soient $f^{(1)}: \mathcal{X}^{(1)} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $f^{(2)}: \mathcal{X}^{(2)} \rightarrow \mathcal{Y}$ deux morphismes dans $\mathcal{Y}$ de deux éclatements admissibles de $\mathcal{X}$ qui vérifient les propriétés requises. Alors il existe un éclatement admissible $\mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X}$ qui se factorise par $\mathcal{X}^{(1)}$ et $\mathcal{X}^{(2)}$. Les morphismes $\mathcal{U}'_1 = \mathcal{U} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{U}_1^{(1)}$ et $\mathcal{U}'_1 \rightarrow \mathcal{U}_1^{(2)}$ peuvent être algébrisés en $p_2^{(1)}: U'' \rightarrow U_1^{(1)}$ et $p_1^{(2)}: U'' \rightarrow U_1^{(2)}$. Comme les morphismes $f_1^{(1)} \circ p_1^{(1)}$ et $f_1^{(2)} \circ p_1^{(2)}$ coïncident au-dessus de $U''^0 \xrightarrow{\sim} \bar{U}_1^0$ il coïncident sur U''_1 tout entier. Par suite, les morphismes formels $f_1^{(1)} \circ p_1^{(1)}$ et $f_1^{(2)} \circ p_1^{(2)}$ de $\mathcal{U}'_1$ vers $\mathcal{Y}$ sont les mêmes. On prouve de même que les morphismes formels $f_2^{(1)} \circ p_2^{(1)}$ et $f_2^{(2)} \circ p_2^{(2)}$ de $\mathcal{U}'_2$ vers $\mathcal{Y}$ sont les mêmes. On a donc défini un morphisme formel $f'': \mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{Y}$ et dominé $(\mathcal{X}^{(1)}, f^{(1)})$ et $(\mathcal{X}^{(2)}, f^{(2)})$ par $(\mathcal{X}'', f'')$. c.q.f.d.

Démonstration du Théorème 3.5:

Soit $j^*: Y^0 \hookrightarrow Y^*$ une immersion ouverte dans un espace algébrique propre sur S . Appliquant le théorème de recollement 3.24, on trouve un éclatement admissible $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ et un morphisme adique $f': \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}^*$ tels que si $\mathcal{U}'_1 = \mathcal{U}_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$ et que $U'_1 \rightarrow \bar{U}_1$ est l'algébrisé de l'éclatement $\mathcal{U}'_1 \rightarrow \mathcal{U}_1$, alors $f'|_{\mathcal{U}'_1}$ est le complété d'un unique morphisme $f'_1: U'_1 \rightarrow Y^*$ qui au-dessus de $U_1^0 \cong \bar{U}_1^0$ coïncide avec le morphisme donné $f_1^0: \bar{U}_1^0 \rightarrow Y^0$. La démonstration de 3.5 procédera en deux étapes; la première consiste à montrer:

LEMME 3.25: *Le morphisme rigide-analytique $f^{an}: \mathcal{X}^{an} = \mathcal{X}'^{an} \rightarrow \mathcal{Y}^{*an}$ induit par le morphisme formel $f': \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}^*$ est une immersion ouverte.*

PREUVE: Nous allons vérifier que les conditions (i) et (ii) de 3.5 impliquent les conditions (i) et (ii) de 3.15.

Condition (i): Soient V un anneau de valuation discrète complét à corps de fractions K , et $g^{(1)an}, g^{(2)an}$ deux éléments de $\text{Hom}(\text{Spec}^{an}(K), \mathcal{X}^{an})$ qui donnent le même élément de $\text{Hom}(\text{Spec}^{an}(K), \mathcal{Y}^{*an})$. On peut représenter $g^{(j)an}$ par un morphisme adique $g^{(j)'}: \text{Spf}(V) \rightarrow \mathcal{X}'$, $j = 1, 2$. Soit V_1 un anneau de valuation discrète complét, extension étale de V , qui est muni de morphismes adiques $g_1^{(j)}: \text{Spf}(V_1) \rightarrow \mathcal{U}'_1$ rendant 'commutatif' le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{X}' \\ \uparrow\uparrow & & \uparrow\uparrow \\ \text{Spf}(V_1) & \longrightarrow & \text{Spf}(V). \end{array}$$

Soit $g_1^{(j)}: \mathrm{Spf}(V_1) \rightarrow \mathbb{A}_1$ le composé de $g_1^{(j)'} \text{ et } \mathbb{A}_1' \rightarrow \mathbb{A}_1$. Alors le morphisme $g_1^{(j)}$ est évidemment le complété formel d'un unique morphisme $g_1^{(j)}: \mathrm{Spec}(V_1) \rightarrow \bar{U}_1$. De plus, d'après 3.1, le morphisme $g_1^{(j)}$ est le complété formel d'un unique morphisme $g_1^{(j)'}: \mathrm{Spec}(V) \rightarrow U_1'$ relèvant $g_1^{(j)}$. Les complétés de $f_1' \circ g_1^{(1)}$ et $f_1' \circ g_1^{(2)'}$ sont par hypothèse les mêmes: par suite, les images par $f_1' \circ g_1^{(2)'}$ du point générique de $\mathrm{Spec}(V)$ dans Y^* sont les mêmes. Tenant compte de l'isomorphisme $U_1'^0 \xrightarrow{\sim} \bar{U}_1^0$, il suit de la condition (i) de 3.5 qu'il existe un morphisme $g_2^0: \mathrm{Spec}(K_1) \rightarrow \bar{U}_2^0$ qui, composé avec les morphismes canoniques $\bar{U}_2^0 \xrightarrow{\sim} \bar{U}_1^0$ donne $g_1^{(1)}|_{\mathrm{Spec}(K_1)}$ resp. $g_1^{(2)}|_{\mathrm{Spec}(K_1)}$, et qui s'étend en un morphisme $g_2: \mathrm{Spec}(V_1) \rightarrow \bar{U}_2$. De plus, le morphisme g_2 se relève de façon unique en un morphisme $g_2': \mathrm{Spec}(V_1) \rightarrow U_2'$. On voit facilement que les morphismes $g_1^{(1)'}$ et $g_1^{(2)'}$ resp. $g_1^{(1)}$ et $g_1^{(2)}$ sont égaux aux composés respectifs

$$\mathrm{Spf}(V_1) \xrightarrow{a_2'} U_2' \implies \mathbb{A}_1' \text{ resp. } \mathrm{Spf}(V_1) \xrightarrow{a_2} \mathbb{A}_2 \implies \mathbb{A}_1.$$

Il en résulte que les morphismes composés

$$\mathrm{Spf}(V_1) \xrightarrow{a_1^{(j)}} \mathbb{A}_1' \longrightarrow \mathfrak{X}', \quad j = 1, 2,$$

sont les mêmes; par suite $g^{(1)'} = g^{(2)'}$ et donc $g^{(1)an} = g^{(2)an}$.

Condition (ii): On fixe un morphisme adique $g': \mathrm{Spf}(V) \rightarrow \mathfrak{X}'$ donnant naissance à $g: \mathrm{Spf}(V) \rightarrow \mathfrak{X}$. Soit R un anneau local artinien à corps résiduel K .

Soient $\tilde{g}^{(1)an}$ et $\tilde{g}^{(2)an}$ dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}^{an}(R), \mathfrak{X}^{an})$ qui induisent $g^{an} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}^{an}(K), \mathfrak{X}^{an})$ et qui donnent le même élément de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}^{an}(R), \mathfrak{Y}^{*an})$.

Le système inductif des $R^{(i)} \subset R$ est déterminé de façon unique. Soit V_1 un anneau de valuation discrète complété étale sur V , muni d'un morphisme adique $g_1': \mathrm{Spf}(V_1) \rightarrow \mathbb{A}_1$ qui relève g' . Utilisant les propriétés infinitésimales des morphismes étales on trouve $R_1^{(0)} \subset R_1$, où R_1 est un anneau local artinien à corps résiduel K_1 , de même nature que R . Soient $\tilde{g}_1^{(j)}: \mathrm{Spf}(R_1^{(0)}) \rightarrow \mathfrak{X}'$ des représentants formels de $\tilde{g}^{(j)an}$; utilisant les propriétés infinitésimales de morphismes étales, on trouve deux morphismes adiques $\tilde{g}_1^{(j)'}: \mathrm{Spf}(R_1^{(0)}) \rightarrow \mathbb{A}_1'$ relèvant $\tilde{g}_1^{(j)}$. Comme dans la vérification de la condition (i) on obtient des morphismes $\tilde{g}_1^{(j)'}: \mathrm{Spec}(R_1^{(0)}) \rightarrow U_1'$ qui, composés avec $U_1' \rightarrow \bar{U}_1$, définissent $\tilde{g}_1^{(j)}: \mathrm{Spec}(R_1^{(0)}) \rightarrow \bar{U}_1$. Comme par hypothèse les complétés des morphismes $f_1' \circ \tilde{g}_1^{(1)'}$ et $f_1' \circ \tilde{g}_1^{(2)'}$ coïncident, ces deux morphismes

induisent le même morphisme de $\text{Spec}(R_1)$ vers Y^0 . On applique alors la condition (ii) de 3.5 pour conclure comme ci-dessus que $\tilde{g}_1^{(1)}$ et $\tilde{g}_1^{(2)}$ définissent le même morphisme de $\text{Spec}(R_1)$ vers $\bar{U}_1^0$. Il en résulte que $\tilde{g}_1^{(1)}$ et $\tilde{g}_1^{(2)'}$ coïncident, et que par suite $\tilde{g}_1^{(1)'} = \tilde{g}_1^{(2)'}$, donc $\tilde{g}_1^{(1)an} = \tilde{g}_1^{(2)an}$.

Réciproquement, soit $h^{an} \in \text{Hom}(\text{Spec}^{an}(R), \mathcal{Y}^{*an})$ qui sur $\text{Spec}^{an}(K)$ coïncide avec $f^{an} \circ g^{an}$. On obtient un morphisme h^0 de $\text{Spec}(R)$ vers Y^0 qui s'étend en un morphisme $h: \text{Spec}(R^{(i)}) \rightarrow Y^*$, pour i convenable, p.ex. $i = 0$. Soit $h_1: \text{Spec}(R_1^{(0)}) \rightarrow Y^*$ le morphisme composé. Appliquant à h_1 la condition (ii) de 3.5, on trouve un morphisme de $\text{Spec}(R_1)$ vers $\bar{U}_1^0$ qui composé avec $f_1^0: \bar{U}_1^0 \rightarrow Y^0$ coïncide avec la restriction de h_1 à $\text{Spec}(R_1)$. Ce morphisme s'étend en un morphisme $\tilde{g}_1: \text{Spec}(R_1^{(i)}) \rightarrow \bar{U}_1$ (pour i convenable, p.ex. $i = 0$) et définit un morphisme adique $\tilde{g}_1: \text{Spf}(R_1^{(0)}) \rightarrow \mathbb{U}_1$ et donc aussi un morphisme adique $\tilde{g}_1': \text{Spf}(R_1^{(0)}) \rightarrow \mathbb{U}_1'$ le relèvant. De plus, les morphismes composés $\text{Spf}(R_1^{(i)}) \times_{\text{Spf}(R^{(0)})} \text{Spf}(R_1^{(i)}) \rightrightarrows \text{Spf}(R^{(i)}) \xrightarrow{a_i'} \mathbb{U}_1'$ sont égaux (pour i convenable): en effet, la source de ces morphismes est une somme disjointe de schémas formels du type $\text{Spf}(R_2^{(0)})$; si l'on compose ces morphismes avec $\mathbb{U}_1' \rightarrow \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}^*$ et algébrise les morphismes obtenus on obtient le même morphisme $\text{Spec}(R_2) \rightrightarrows \text{Spec}(R_1) \rightarrow \text{Spec}(R) \xrightarrow{h^0} Y^0$; appliquant la condition (ii) de 3.5, et tenant compte de ce que au-dessus de $\text{Spec}(K_2) \subset \text{Spec}(R_2)$ les deux morphismes de $\text{Spec}(R_2)$ vers $\bar{U}_1^0$ coïncident, on trouve que les morphismes de $\text{Spec}(R_2)$ vers $\bar{U}_1^0$ sont les mêmes et de là l'assertion résulte facilement. On voit donc que $\tilde{g}_1'$ définit un morphisme formel $\tilde{g}': \text{Spf}(R^{(0)}) \rightarrow \mathcal{X}'$ et il est clair que $f'^{an} \circ \tilde{g}'^{an} = h^{an}$. c.q.f.d.

REMARQUE 3.26: On peut montrer que le fait que les données $(\mathcal{X}, \mathbb{U}, f_1^0, \text{etc.})$ vérifient les conditions (i) et (ii) de 3.5 est *équivalent* au fait que le morphisme $f': \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}^*$ construit à partir de ces données vérifie les conditions (i) et (ii) de 3.15.

2^{ème} étape: D'après le lemme précédent il existent des éclatements admissibles $\mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X}'$ et $\mathcal{Y}'' \rightarrow \mathcal{Y}^*$ tels que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}'' & \xrightarrow{f''} & \mathcal{Y}'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}' & \xrightarrow{f'} & \mathcal{Y}^* \\ \downarrow & & \\ \mathcal{X} & & \end{array},$$

et où f'' est une immersion ouverte.

D'après le théorème d'existence de dilatations formelles de M.

Artin [2], thm. 3.2, applicable à $\mathcal{Y}'' \rightarrow \mathcal{Y}^*$ car Y^* est de type fini sur un schéma S de type fini sur un corps ou sur un anneau excellent de Dedekind, il existe une unique modification $Y'' \rightarrow Y^*$ dont le complété soit $\mathcal{Y}'' \rightarrow \mathcal{Y}^*$. De plus, si l'on enlève de Y'' le complément de l'image de $\mathcal{X}_0''$ dans Y'' , on peut supposer que f'' soit un isomorphisme entre $\mathcal{X}''$ et le completé de Y'' lelong $Y_0'' = Y'' \setminus Y^0$. Appliquant à $\mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X}$ le théorème d'existence de contractions formelles de M. Artin [2], thm. 3.1, on trouve une modification $Y'' \rightarrow Y$ dont le complété est $\mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X}$.

On a ainsi obtenu une immersion ouverte $j: Y^0 \rightarrow Y$ et un isomorphisme φ entre $\mathcal{X}$ et le complété formel $\mathcal{Y}$ de Y lelong $Y_0 = Y \setminus Y^0$.

Montrons que la paire (j, φ) a les propriétés requises. Le morphisme $\mathcal{U}_1' =_{\text{Def}} \mathcal{U}_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{U}_1$ s'algebrique en $U_1' \rightarrow \bar{U}_1$ et le morphisme $\mathcal{U}_1' \rightarrow \mathcal{Y}''$ est le complété formel d'un morphisme $f_1': U_1' \rightarrow Y''$ dont la restriction à $U_1'^0 \cong \bar{U}_1^0$ est $f_1^0: \bar{U}_1^0 \rightarrow Y^0$. Le complété formel du morphisme composé $U_1' \rightarrow Y'' \rightarrow Y$ est égale au morphisme composé $\mathcal{U}_1' \rightarrow \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$. Par suite, si $f_1: \bar{U}_1 \rightarrow Y$ est le morphisme résultant d'après 3.1 de $\mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$, f_1 induit sur $U_1'^0 \cong \bar{U}_1^0$ le morphisme $f_1^0|_{U_1'}$, qui est $f_1^0: \bar{U}_1^0 \rightarrow Y^0$.

Démontrons l'assertion d'unicité de 3.5:

Soient $j^{(1)}: Y^0 \rightarrow Y^{(1)}$, $\varphi^{(1)}: \mathcal{X} \cong \mathcal{Y}^{(1)}$ et $j^{(2)}: Y^0 \rightarrow Y^{(2)}$, $\varphi^{(2)}: \mathcal{X} \cong \mathcal{Y}^{(2)}$ deux paires vérifiantes les conditions du théorème.

Si $Z = \text{Spec}(A)$ est un schéma affine muni d'un morphisme étale $g^{(1)}: Z \rightarrow Y^{(1)}$, on note $Z^0 = Z \times_Y Y^{(1)0}$, $Z_0 = Z \times_Y Y_0^{(1)}$, $\mathfrak{Z} = \text{Spf}(\hat{A})$ le complété formel de Z lelong Z_0 , $\bar{Z} = \text{Spec}(\hat{A})$ et $\bar{Z}^0 = \bar{Z} \times_Z Z^0$. Supposons que le morphisme $g^{(1)}|_{Z_0}: Z_0 \rightarrow Y_0^{(1)}$ se factorise par $\bar{U}_{1_0} \rightarrow Y_0^{(1)}$. D'après les propriétés infinitésimales des morphismes étales le morphisme formel $\mathfrak{g}^{(1)}$ se factorisera en

$$\mathfrak{Z} \xrightarrow{a_1} \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\varphi^{(1)}} \mathcal{Y}^{(1)};$$

par suite le morphisme $\bar{g}^{(1)}: \bar{Z} \rightarrow Y^{(1)}$ se factorisera en $\bar{Z} \xrightarrow{\mathfrak{y}_1} \bar{U}_1 \xrightarrow{f^{(1)}} Y^{(1)}$. Soit $\bar{g}^{(2)} = f^{(2)} \circ \bar{g}_1: \bar{Z} \rightarrow Y^{(2)}$. Alors les morphismes $\bar{g}^{(1)}$ et $\bar{g}^{(2)}$ de $\bar{Z}^0$ vers Y^0 sont les mêmes puisque $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ coïncident sur $\bar{U}_1^0$. Le complété formel $\mathfrak{g}^{(2)}$ de $\bar{g}^{(2)}$ est égale au composé

$$\mathfrak{Z} \xrightarrow{a_1} \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\varphi^{(2)}} \mathcal{Y}^{(2)},$$

de sorte qu'il est égale à $(\varphi^{(2)} \circ \varphi^{(1)-1}) \circ \mathfrak{g}^{(1)}$. D'après [2], §2, $\bar{g}^{(2)}$ définit un morphisme $g^{(2)}: Z \rightarrow Y^{(2)}$ qui étend $Z^0 \rightarrow Y^0 \subset Y^{(2)}$ et dont le complété formel est égale à $(\varphi^{(2)} \circ \varphi^{(1)-1}) \circ \mathfrak{g}^{(1)}$.

La question s'il existe un isomorphisme de Y_1 sur Y_2 qui induit l'identité sur Y^0 et dont la complétion formelle est égale à $\mathfrak{Y}_1^{(1)} \xrightarrow{\varphi^{(1)-1}} \mathfrak{X} \xrightarrow{\varphi^{(2)}} \mathfrak{Y}_2$ est locale pour la topologie étale sur $Y^{(1)}$, localement lelong $Y_0^{(1)}$. D'après ce qui précède on l'a résolu. c.q.f.d.

REMARQUE 3.27: L'espace algébrique Y résultant de cette construction est séparé; cela résulte d'ailleurs déjà du critère valuatif si l'on tient compte des conditions (i) et (ii) de 3.5.

REMARQUE 3.28: Dans ce qui précède on a utilisé le théorème 3.5 et donc implicitement le théorème de platisation de Raynaud. Voici comment éviter ce théorème en modifiant l'argument précédent dans le cas où le morphisme $f': \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}^*$ est *propre*. Dans ce cas on peut appliquer le théorème 3.19 pour conclure du fait, établi dans le lemme 3.25, que f^{an} vérifie les conditions (i) et (ii) de 3.15, que l'on peut supposer que f'' est une modification formelle d'une réunion de composantes connexes de $\mathfrak{Y}''$. Remplaçant $\mathfrak{Y}''$ par cette réunion de composantes connexes, le morphisme $\mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{Y}''$ sera une modification formelle à laquelle on peut appliquer le théorème d'existence des dilatations de M. Artin [2], thm. 3.2, pour construire $X'' \rightarrow Y''$. A partir de là la démonstration se fait comme avant.

3.29: Dans la suite de ce §, on développera une variation sur un thème de M. Artin [2], §2.

Soient $Z = \text{Spec}(A)$ un schéma affine de type fini sur le spectre d'un corps ou d'un anneau de Dedekind excellent et $f: Z' \rightarrow Z$ un morphisme de type fini d'espaces algébriques. Soient $I \subset A$ un idéal, $C = V(I)$ le sous-schéma fermé de Z défini par I , et $\bar{A}$ la complétion de A par rapport à I . On utilisera les notations suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \text{Spec}(\bar{A}) & \bar{Z}' &= Z' \times_Z \bar{Z} & C' &= f^{-1}(C) \\ \bar{V} &= \bar{Z} \setminus C & \bar{V}' &= \bar{Z}' \setminus C' \\ V &= Z \setminus C & V' &= Z' \setminus C' \end{aligned}$$

On considérera la catégorie $\mathcal{C}$ des triples $(X_1, \bar{X}, \varphi)$ consistants en un V' -espace algébrique de type fini X_1 , un $\bar{Z}'$ -espace algébrique de type fini $\bar{X}$ et un isomorphisme φ entre leurs images réciproques $X_{1|\bar{V}'}$ et $\bar{X}_{|\bar{V}'}$ au-dessus de $\bar{V}'$. La notion de morphisme dans cette catégorie est évidente. Dans la suite on supposera toujours que X_1 peut être plongé dans un espace algébrique propre sur Z' , condition automatique lorsque X_1 est un schéma et probablement en général.

PROPOSITION 3.30: *Le foncteur canonique de la catégorie des espaces algébriques de type fini sur Z' dans $\mathcal{C}$, qui à X associe le triple $X_1 = X \times_{Z'} V'$, $\bar{X} = X \times_{Z'} \bar{Z}'$, et l'isomorphisme canonique φ , est une équivalence de catégories.*

PREUVE: (a) *Pleine fidélité.* Soient deux Z' -espaces algébriques X et Y , donnants lieu aux triples $(X_1, \bar{X}, \varphi)$ et $(Y_1, \bar{Y}, \psi)$, et un morphisme f du premier dans le deuxième triple. Soient $\Gamma_1 \subset X_1 \times_{V'} Y_1$ le graphe du morphisme $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ et $\bar{\Gamma} \subset \bar{X} \times_{\bar{Z}'} \bar{Y}$ le graphe du morphisme $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$. De plus, f définit un isomorphisme $\eta: \Gamma_{1|\bar{V}'} \xrightarrow{\sim} \bar{\Gamma}_{|\bar{V}'}$, les deux cotés étant considérés comme sous-espaces fermés de $(X \times_{Z'} Y) \times_{Z'} \bar{V}'$. Il résulte alors de [2], thm. 2.6, qu'il existe un unique sous-espace fermé $\Gamma \subset X \times_{Z'} Y$ donnant lieu à $(\Gamma_1, \bar{\Gamma}, \eta)$. De plus, on vérifie aussitôt que la projection de Γ sur X est un isomorphisme, de sorte que Γ définit le morphisme cherché de X vers Y qui donne naissance à f .

(b) *Surjectivité essentielle:* Soit $(X_1, \bar{X}, \varphi) \in \mathcal{C}$ et supposons d'abord que X_1 soit propre sur V' . Soit $X_1 \subset X'$ une immersion ouverte dans un espace algébrique propre sur Z' . On pose $\bar{X}' = X' \times_{Z'} \bar{Z}'$.

Soit $\bar{X}''$ l'adhérence dans $\bar{X}' \times_{\bar{Z}'} \bar{X}$ de l'image réciproque sur $\bar{V}''$ du graphe de l'immersion ouverte de X_1 dans X' , transporté de $(X_1 \times_{Z'} X')_{|\bar{V}'}$ à $\bar{X}' \times_{\bar{Z}'} \bar{X}$ via l'isomorphisme φ . On note $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ et $\mathfrak{X}''$ les complétés formels de $\bar{X}$, $\bar{X}'$, $\bar{X}''$ lelong les images inverses respectives de C .

LEMME 3.31: *Le morphisme canonique $\mathfrak{f}: \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}'$ déduit de la première projection de $\bar{X}''$ vers $\bar{X}'$ est une modification formelle.*

PREUVE: Le morphisme $\mathfrak{f}$ est (de type fini et) propre car $\bar{X}''_0$ et $\bar{X}'_0$ sont propres sur C . Tenant compte de l'isomorphisme $\bar{X}''_{|\bar{V}'} \cong \bar{X}'_{|\bar{V}'}$, les conditions (i)–(iii) de la définition d'une modification formelle, [2], 1.7 sont satisfaites. c.q.f.d.

Applicant le théorème d'existence des dilatations formelles [2], thm. 3.2, licite à cause de l'hypothèse sur Z faite, on trouve une modification $f: X'' \rightarrow X'$ dont la complétion lelong C est $\mathfrak{f}$. Comme les restrictions de X' et X'' à $V' \subset Z'$ sont isomorphes à X_1 , ce sont les mêmes. Remplaçant X' par X'' , on peut donc supposer dès le début que l'isomorphisme φ entre $X_{1|\bar{V}'} \cong X'_{1|\bar{V}'}$ et $\bar{X}_{|\bar{V}'}$ se prolonge en un morphisme $g: \bar{X}' \rightarrow \bar{X}$. La même démonstration que celle de 3.31 montre:

LEMME 3.32: *Le complété formel $\mathfrak{g}$ de g est une modification formelle.*

Applicant le théorème d'existence des contractions formelles, [2], thm. 3.1, on obtient une modification d'espaces algébriques sur Z' , $g: X' \rightarrow X$, dont la complétion formelle est $\mathfrak{g}$. On vérifie aussitôt que l'espace algébrique X sur Z' donne lieu à l'objet $(X_1, \bar{X}, \varphi)$ de départ.

Traisons maintenant le cas général, où X_1 n'est pas supposé propre. Soit $X_1 \subset X'_1$ une immersion ouverte dans un espace algébrique propre sur V' . Alors X'_1 définit par image réciproque un $\bar{V}'$ -espace algébrique propre qui, via φ , contient $\bar{X}_{|\bar{V}'}$ comme ouvert. Soit $\bar{X}'$ un espace algébrique propre sur $\bar{Z}'$ contenant $\bar{X}$ comme ouvert et qui au-dessus de $\bar{V}' \subset \bar{Z}'$ est égale à $X'_{1|\bar{V}'}$. [Que l'on puisse trouver un tel $\bar{X}'$ est une hypothèse, qui est en tout cas vérifiée si X_1 et $\bar{X}$ sont des schémas (car on peut alors choisir X'_1 d'être un schéma)]. Alors $(X'_1, \bar{X}', \text{isomorphisme canonique entre } X'_{1|\bar{V}'} \text{ et } \bar{X}'_{|\bar{V}'})$ est un objet de $\mathcal{C}$ tel que X'_1 est propre sur V' ; d'après ce qui précède on obtient donc un Z' -espace algébrique X' donnant lieu à ce triple. De même, si $Y_1 = X'_1 \setminus X'$ et $\bar{Y} = \bar{X}' \setminus \bar{X}$, alors on a un isomorphisme entre $Y_{1|\bar{V}'}$ et $\bar{Y}_{|\bar{V}'}$, restriction de l'isomorphisme correspondant entre $X'_{1|\bar{V}'}$ et $\bar{X}'_{|\bar{V}'}$. Alors Y_1 est propre sur V' et, d'après ce qui précède, il existe un Z' -espace algébrique Y muni d'un morphisme $Y \rightarrow X'$. On s'aperçoit aussitôt que ce morphisme est une immersion fermée.

Soit $X = X' \setminus Y$. Alors $X_1 = X \times_{Z'} V'$ et $\bar{X} = X \times_{Z'} \bar{Z}'$, et l'isomorphisme canonique entre $(X \times_{Z'} V')_{|\bar{V}'}$ et $(X \times_{Z'} \bar{Z}')_{|\bar{V}'}$ correspond à φ ; autrement dit, X donne lieu au triple $(X_1, \bar{X}, \varphi)$. c.q.f.d.

§4. Construction des cartes locales

On commencera par un rappel des résultats de Mumford [15]. Soient A un anneau noethérien normal excellent et I un idéal de A avec $\sqrt{I} = I$. On suppose A complet pour la topologie I -adique. On pose $S = \text{Spec}(A)$ et $S_0 = \text{Spec}(A/I)$.

Soient N et P deux $\mathfrak{o}$ -modules projectifs de rang un et posons $M = P^* \cdot N = \mathcal{D}^{-1} P^{-1} \cdot N$. On suppose M muni d'une notion de positivité.

Soit

$$u': N \rightarrow P \otimes G_m(S \setminus S_0)$$

un homomorphisme $\mathfrak{o}$ -linéaire. On suppose que l'homomorphisme

correspondant

$$M \rightarrow G_m(S \setminus S_0)$$

envoie tout élément de M_+ dans I . On notera $\mathfrak{X}^r$, $r \in P^*$, les caractères du tore $P \otimes G_m$.

Pour pouvoir appliquer les résultats de [15], on aura besoin du lemme suivant. On note que sur $(N \cdot P)^* = M \cdot N^{-2}$ on a une notion de positivité naturelle.

LEMME 4.1: *Tout élément $[\varphi] \in (N \cdot P)_+^*$ définit un homomorphisme $\mathfrak{o}$ -linéaire*

$$\varphi: N \rightarrow P^*$$

qui vérifie

$$(i) \quad \mathfrak{X}^{\varphi(n)}(n') = \mathfrak{X}^{\varphi(n')}(n) \quad \forall n, n' \in N$$

$$(ii) \quad \mathfrak{X}^{\varphi(n)}(n) \in I \quad \forall n \neq 0.$$

PREUVE: Cela résulte du fait que $\mathfrak{X}^{\varphi(n)}(n')$ est l'image par l'homomorphisme $M \rightarrow G_m(S \setminus S_0)$ de $[\varphi] \cdot (n \cdot n') \in (N \cdot P^*) \cdot N^2$.

Dans [15] on construit un schéma en groupes semi-abélien (i.e. un schéma en groupes commutatif lisse sur S dont chaque fibre est une extension d'une variété abélienne par un tore) $P \otimes G_m/N$ qui, intuitivement, est le quotient du tore $P \otimes G_m$ par le réseau $u'(N)$. Si A est un anneau de valuations discrète, le résultat de cette construction est celui de §2. Cette construction jouit des propriétés suivantes:

(i) La construction dépend fonctoriellement du complexe $u': N \rightarrow P \otimes G_m(S \setminus S_0)$. En particulier, $P \otimes G_m/N$ est muni d'une action de $\mathfrak{o}$.

(ii) La restriction $(P \otimes G_m/N)^0$ de $P \otimes G_m/N$ à $S \setminus S_0$ est un schéma abélien; la restriction à S_0 est le tore $P \otimes G_m$.

(iii) Le groupe de n -torsion de $(P \otimes G_m/N)^0$ est égale au quotient par $u'(N)$ de l'image inverse de $u'(N)$ par la multiplication par $n: P \otimes G_m \rightarrow P \otimes G_m$; ou encore à $\coprod_{x \in N/nN} n^{-1}(u'(x))$. Il est au milieu d'une suite exacte

$$0 \rightarrow \left(\frac{1}{n} P/P \right) (1) \rightarrow (P \otimes G_m/N)_n^0 \rightarrow \frac{1}{n} N/N \rightarrow 0.$$

(iv) Si l'on remplace P par $N^* = \mathcal{D}^{-1} \cdot N^{-1}$ et N par $P^* =$

$\mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1}$, on a un homomorphisme

$$u: P^* \rightarrow N^* \otimes G_m(S \setminus S_0)$$

correspondant au même homomorphisme $M \rightarrow G_m(S \setminus S_0)$. On a un système cohérent de bi-homomorphismes de schémas en groupes finis sur $S \setminus S_0$

$$(P \otimes G_m/N)_n^0 \times (N^* \otimes G_m/P^*)_n^0 \xrightarrow{e'_n} \mu_n$$

défini comme suit: si $a \in P \otimes G_m$ avec $n \cdot a = x \in N$ et si $b \in N^* \otimes G_m$ avec $n \cdot b = y \in P^*$ alors

$$e'_n(a, b) = \mathcal{X}^y(a) \cdot \mathcal{X}^{-x}(b).$$

Ce e'_n -pairing induit l'accouplement naturel à valeurs dans μ_n entre le sous-groupe $((1/n)P/P)(1)$ de $(P \otimes G_m/N)_n^0$ et le quotient $(1/n)P^*/P^*$ de $(N^* \otimes G_m/P^*)_n^0$ et entre le sous-groupe $((1/n)N^*/N^*)(1)$ de $(N^* \otimes G_m/P^*)_n^0$ et le quotient $(1/n)N/N$ de $(P \otimes G_m/N)_n^0$.

(v) Il existe un seul isomorphisme de $(N^* \otimes G_m/P^*)_n^0$ sur la variété abélienne duale $\text{Pic}^0((P \otimes G_m/N)_n^0)$ de $(P \otimes G_m/N)_n^0$ tel que pour tout n (premier aux caractéristiques résiduelles de S) le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} (P \otimes G_m/N)_n^0 \times (N^* \otimes G_m/P^*)_n^0 & \xrightarrow{e'_n} & \mu_n \\ \downarrow & & \parallel \\ (P \otimes G_m/N)_n^0 \times \text{Pic}^0((P \otimes G_m/N)_n^0) & \xrightarrow{e_n} & \mu_n. \end{array}$$

(vi) Tout élément $[\varphi] \in (N \cdot P)^*$ définit un homomorphisme $\mathfrak{o}$ -linéaire $P \otimes G_m \rightarrow N^* \otimes G_m$ qui au-dessus de $S \setminus S_0$ envoie $u'(N)$ dans $u(P^*)$; d'après (i) il définit un S -homomorphisme de $P \otimes G_m/N$ dans $N^* \otimes G_m/P^*$. D'après (v), $[\varphi]$ définit donc un homomorphisme de $(P \otimes G_m/N)_n^0$ dans son dual. Cet homomorphisme est symétrique. Si $[\varphi] \in (N \cdot P)_+^*$, c'est une polarisation ($\mathfrak{o}$ -linéaire).

On trouve une démonstration de (v) et (vi) dans l'appendice à ce §. L'idée de la construction des cartes locales est de prendre le tore sur Z qui paramètre l'homomorphisme $u': N \rightarrow P \otimes G_m$ universel, de le compactifier de telle manière que la condition de positivité imposée

sur u' soit vérifiée et de compléter le schéma obtenu lelong sa partie à l'infini. Pour compactifier le tore, on utilise l'idée des immersions toroidales (cf. [16]).

Dans la suite on se fixe

- un $\mathfrak{o}$ -module projectif de rang un M muni d'une notion de positivité M_+ .
- un sous-groupe d'indice fini U' dans U_+ .
- une décomposition du cône dual $M_+^* \cup \{0\} \subset M_{\mathbb{R}}^*$ de $M_{+\mathbb{R}} \subset M_{\mathbb{R}}$ en cônes polyédraux rationnels $\{\sigma_\alpha\}$ qui vérifie les conditions suivantes:
 - (a) $\{\sigma_\alpha\}$ est invariant sous l'action naturelle de U' sur M^* : $u' \cdot \sigma_\alpha = \sigma_\beta$, pour un β convenable.
 - (b) modulo cette action, il n'y a qu'un nombre fini de polyèdres σ_α .

LEMME 4.2:

- (i) *Il existe une telle décomposition. Deux telles peuvent être raffinées par une troisième.*
- (ii) *Pour deux cônes polyédraux rationnels σ, σ' l'ensemble $\{u \in U' \mid u \cdot \sigma \cap \sigma' \neq \{0\}\}$ est fini.*
- (iii) *Il existe un sous-groupe d'indice fini $U'' \subset U'$ tel que si $u'' \in U''$ et $u'' \cdot \sigma_\alpha \cap \sigma_\beta \neq \{0\}$, alors $u'' = 1$.*
- (iv) *Si $\{\sigma_\alpha\}$ est une décomposition admissible il existe un raffinement $\{\sigma'_\alpha\}$ telle que si $u \neq 1$, $u \in U'$*

$$u \cdot \sigma'_\alpha \cap \sigma'_\beta = \{0\}.$$

PREUVE: C'est une conséquence de la théorie de réduction, synonyme au théorème des unités de Dirichlet: L'action de U_+ sur les éléments totalement positifs de norme fixée de $F \otimes \mathbb{R}$ est proprement discontinue et possède un domaine fondamental relativement compact (cf. [17]). c.q.f.d.

On notera $\check{\sigma}_\alpha = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \ell(m) \geq 0 \forall \ell \in \sigma_\alpha\}$ et $\check{\sigma}_{\alpha\mathbb{Z}} = \check{\sigma}_\alpha \cap M$. Alors $\check{\sigma}_\alpha \supset M_{+\mathbb{R}}$.

Soit S le tore sur $\mathbb{Z}$ de groupe de caractères M :

$$S = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\dots q^m \dots]_{m \in M}) / \left(\begin{matrix} q^{m_1+m_2} = q^{m_1} \cdot q^{m_2} \\ q^0 = 1 \end{matrix} \right).$$

La collection des σ_α définit une immersion du tore S , i.e. une immersion ouverte $S \subset S_{\{\sigma_\alpha\}}$ de S dans un schéma normal *localement* de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ tel que l'action par translations de S sur

lui-même s'étende en une action de S sur $S_{\{\sigma_\alpha\}}$: on recolle $S_{\sigma_\alpha} = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\dots q^m \dots]_{m \in \dot{\sigma}_\alpha \mathbb{Z}})$ et S_{σ_β} lelong $S_{\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta}$. Vu la condition d'invariance sous U' imposé sur $\{\sigma_\alpha\}$, U' agit sur $S_{\{\sigma_\alpha\}}$; cette action est compatible avec celle de $\mathfrak{o}$ sur S qui vient de la structure de $\mathfrak{o}$ -module de M . Soit $S_{\{\sigma_\alpha\}}^\infty = \bigcup S_{\sigma_\alpha}^\infty$ le complément réduit de S dans $S_{\{\sigma_\alpha\}}$. Soit $I(S_{\{\sigma_\alpha\}}^\infty)$ le faisceau d'idéaux qui définit le sous-schéma fermé $S_{\{\sigma_\alpha\}}^\infty$ dans $S_{\{\sigma_\alpha\}}$. Soit $R_{\sigma_\alpha} = \mathbb{Z}[\dots q^m, \dots]_{m \in \dot{\sigma}_\alpha \mathbb{Z}}$.

Dans la suite on se fixe

– deux $\mathfrak{o}$ -modules projectifs de rang un, N et P .

– un homomorphisme injectif $\mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N \rightarrow M$.

On pose $L = \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N^{-1}$. La notion de positivité sur M et celle sur N^2 (cf. §1) définissent une notion de positivité sur L .

Soit T le tore constant de fibre $P \otimes \mathbb{G}_m$ sur $S_{\{\sigma_\alpha\}}$; ses caractères seront notés $\mathcal{X}_{r \in P^*}'$. Il est muni d'une action naturelle de $\mathfrak{o}$. On obtient un homomorphisme $\mathfrak{o}$ -linéaire u' du groupe constant N sur S dans T en envoyant $n \in N$ en la section $u'(n) \in T(S)$ définie par

$$u'(n): \mathcal{X}_{r \in P^*}' \longrightarrow q^{r \cdot n}_{r \cdot n \in \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N \subset M}.$$

Pour $\sigma_\alpha \in \{\sigma_\alpha\}$, le complété de S_{σ_α} lelong $S_{\sigma_\alpha}^\infty$ est un schéma formel affine: $S_{\sigma_\alpha}^\wedge = \text{Spf}(\hat{R}_{\sigma_\alpha})$; on pose $\bar{S}_{\sigma_\alpha} = \text{Spec}(\hat{R}_{\sigma_\alpha})$ et $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0 = \bar{S}_{\sigma_\alpha} \setminus S_{\sigma_\alpha}^\infty$. On dispose de morphismes canoniques $\bar{S}_{\sigma_\alpha} \rightarrow \bar{S}_{\sigma_\alpha}$ tels que $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0 = S \times_{S_{\sigma_\alpha}} \bar{S}_{\sigma_\alpha}$. Pour $\sigma_\beta \subset \sigma_\alpha$, on a un morphisme canonique $\bar{S}_{\sigma_\beta} \rightarrow \bar{S}_{\sigma_\alpha}$.

Applicant la construction de Mumford on trouve un schéma semi-abélien T/N au-dessus de $\bar{S}_{\sigma_\alpha}$; on le note X_{σ_α} et $X_{\sigma_\alpha}^0$ sa restriction à $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0$. On déduit de la fonctorialité de la construction:

COROLLAIRE 4.3: *Si $\sigma_\beta \subset \sigma_\alpha$, le schéma en groupes X_{σ_β} sur $\bar{S}_{\sigma_\beta}$ est l'image réciproque par le morphisme canonique $\bar{S}_{\sigma_\beta} \rightarrow \bar{S}_{\sigma_\alpha}$ du $\bar{S}_{\sigma_\alpha}$ -schéma en groupes X_{σ_α} .*

Le corollaire suivant montre qu'on a obtenue un objet de $\mathcal{M}^L$ sur $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0$:

COROLLAIRE 4.4: *La restriction $X_{\sigma_\alpha}^0$ de X_{σ_α} à $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0$ est un schéma abélien à multiplication réelle qui est muni d'un isomorphisme de faisceaux $\alpha: (\mathcal{P}(X_{\sigma_\alpha}^0), \mathcal{P}(X_{\sigma_\alpha}^0)) \xrightarrow{\sim} (L, L_+)$.*

On a un isomorphisme canonique

$$\text{Lie}(X_{\sigma_\alpha}) \cong P \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}_{\sigma_\alpha}}.$$

PREUVE: La dernière assertion résulte du fait que $\text{Lie}(T) \cong$

$\text{Lie}(X_{\sigma_\alpha})$; elle implique que pour $X_{\sigma_\alpha}^0$ la condition (*) de 1.1 est vérifiée. L'homomorphisme α est l'inverse de l'homomorphisme de $L = \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N^{-1}$ dans $\mathcal{P}(X_{\sigma_\alpha}^0)$ décrit dans (vi) au début de ce §. Que l'homomorphisme $L \rightarrow \mathcal{P}(X_{\sigma_\alpha}^0)$ est un isomorphisme est démontré dans l'appendice à ce §. c.q.f.d.

LEMME 4.5: *Le quotient de $S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge$ par l'action de U' existe; c'est un schéma formel noethérien dont l'âme est de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.*

PREUVE: Soit $U'' \subset U'$ le sous-groupe d'indice fini ayant les propriétés de 4.2(iii). Le quotient de $S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge$ par U'' s'obtient simplement en identifiant $S_{\sigma_\alpha}^\wedge$ avec $S_{u''\sigma_\alpha}^\wedge$. Le passage au quotient par U'/U'' de $S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/U''$ n'offre pas de difficultés. c.q.f.d.

4.6: On note $\mathbb{Z}[\dots q^m \dots]_{m \in M_+ \cup \{0\}}$ l'algèbre du monoïde $M_+ \cup \{0\}$ (Bourbaki; Alg. III.2.6, pg. III.19) et par $\mathbb{Z}[[\dots q^m \dots]]_{m \in M_+ \cup \{0\}}$ (l'anneau des séries formelles $\sum_{\substack{m \in M_+, \\ \text{ou } m=0}} a_m \cdot q^m$) l'algèbre large du monoïde $M_+ \cup \{0\}$ (Bourbaki; Alg. III.2.10, pg. III.28). On pose

$$\begin{aligned} R^{U'}(M) &= [\mathbb{Z}[[\dots q^m \dots]]_{m \in \{0\} \cup M_+}]^{U'} \\ &= \left\{ \sum_{m \in \{0\} \cup M_+} a_m \cdot q^m \mid a_{u \cdot m} = a_m \quad \forall u \in U' \right\}. \end{aligned}$$

L'anneau $\mathbb{Z}[\dots q^m \dots]_{m \in \{0\} \cup M_+}$ est égale à $\Gamma(S_{\{\sigma_\alpha\}}, \mathcal{O})$ pour n'importe quelle décomposition $\{\sigma_\alpha\}$ admissible; l'anneau $\mathbb{Z}[[\dots q^m \dots]]_{m \in \{0\} \cup M_+}$ est le complété de $\Gamma(S_{\{\sigma_\alpha\}}, \mathcal{O})$ en l'idéal $\Gamma(S_{\{\sigma_\alpha\}}, I(S_{\{\sigma_\alpha\}}^\infty))$. On obtient le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\dots q^m \dots]_{m \in \{0\} \cup M_+} & \longrightarrow & R_{\sigma_\alpha} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^{U'}(M) \hookrightarrow \mathbb{Z}[[\dots q^m \dots]]_{m \in \{0\} \cup M_+} & \longrightarrow & \hat{R}_{\sigma_\alpha}. \end{array}$$

L'anneau $\hat{R}_{\sigma_\alpha}$ est le complété de R_{σ_α} par rapport à la topologie linéaire pour laquelle $q^{m_i} \rightarrow 0$ si et seulement si la distance euclidienne (n'importe laquelle) des $m_i \in \check{\sigma}_\alpha$ à tout hyperplan bord de $\check{\sigma}_\alpha$ croît indéfiniment. Tous les anneaux $\hat{R}_{\sigma_\alpha}$ sont contenus dans le groupe abélien $\mathbb{Z}[[\dots q^m \dots]]_{m \in M}$, et leur intersection est égale à $\Gamma(S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge, \mathcal{O})$. Prenant les invariants sous U' , on obtient un isomorphisme

$$\Gamma(S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/U', \mathcal{O}) \cong R^{U'}(M).$$

Je ne sais pas si l'anneau $R^{U'}(M)$ est noethérien; cette question semble liée au problème de l'existence d'une 'compactification de Satake' de l'espace de modules de Hilbert–Blumenthal sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. L'anneau $R^{U'}(M) \otimes \mathbb{C}$ est noethérien.

SCHOLIE 4.7: *Soit A un anneau noethérien. On garde les notations précédentes. A un élément $f \in \Gamma((S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge \times \text{Spec}(A))/U', \mathcal{O})$ dont l'image dans $\Gamma(S_{\sigma_\alpha}^\wedge \times \text{Spec}(A), \mathcal{O})$ est dans $\hat{R}_{\sigma_\alpha} \otimes A$ pour un (et alors pour tout) cône polyédral, on associe un élément $f_A \in R^{U'}(M) \otimes A$. Cette correspondance a les propriétés suivantes:*

- (i) *Si l'anneau noethérien A' est une A -algèbre, et que f définit $f' \in \Gamma((S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge \times \text{Spec}(A'))/U', \mathcal{O})$, alors f'_A est l'image de f_A par l'homomorphisme naturel $R^{U'}(M) \otimes A \rightarrow R^{U'}(M) \otimes A'$.*
- (ii) *Soient $M \subset M_1$ et $U'_1 \subset U'$. Alors f définit un élément f_1 de $\Gamma(S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge \times \text{Spec}(A)/U'_1, \mathcal{O})$ dont l'image dans $\Gamma(S_{\sigma_\alpha}^\wedge \times \text{Spec}(A), \mathcal{O})$ est dans $\hat{R}_{1_{\sigma_\alpha}} \otimes A$ pour un σ_α . L'élément dans $R^{U'_1}(M_1) \otimes A$ associé à f_1 est l'image de f_A sous l'homomorphisme $R^{U'}(M) \otimes A \rightarrow R^{U'_1}(M_1) \otimes A$.*

Comme l'image de f dans $\Gamma(S_{\sigma_\alpha}^\wedge \times \text{Spec}(A), \mathcal{O})$ est dans $\hat{R}_{\sigma_\alpha} \otimes A$ pour un σ_α , les coefficients $a_m \in A$ du développement en q de f engendrent un $\mathbb{Z}$ -module de type fini. Notons $R(A)$ l'anneau des séries formelles $\sum_{\substack{m \in M_+ \\ \text{ou } m=0}} a_m q^m$ avec $a_{u \cdot m} = a_m \forall u \in U'$ dont les coefficients engendrent un $\mathbb{Z}$ -module de type fini. Alors $R^{U'}(M) \otimes A \xrightarrow{\sim} R(A)$. En effet, les deux cotés gardent un sens lorsque A est seulement un groupe abélien; prouvons l'assertion en supposant seulement que A est un groupe abélien. Les deux cotés commutent aux limites inductives. On peut donc supposer que A est un groupe abélien de type fini, donc même que $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans ces cas, l'assertion est triviale à vérifier.

4.8: On fixe une décomposition $\{\sigma_\alpha\}$ de $M_{\mathbb{R}_+} \cup \{0\}$ telles que $S_{\{\sigma_\alpha\}}$ est lisse. Alors l'infini $S_{\{\sigma_\alpha\}}^\infty/U'$ est localement défini par une équation non diviseur de zéro dans $S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/U'$ (cf. [16]).

Soit $\text{Spf}(R) \rightarrow S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/U'$ un voisinage étale affine d'un point $x \in S_{\{\sigma_\alpha\}}^\infty/U'$: soit la partie à l'infini définie par $f \in R$. Une fonction sur R , méromorphe à l'infini est un élément de $\cup_n (1/f^n \cdot R)$. Cela définit un faisceau sur $S_{\{\sigma_\alpha\}}^\infty/U'$ pour la topologie étale. Une fonction formelle sur $S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/U'$ méromorphe à l'infini est une section globale de ce faisceau; on note $\Gamma^{\text{mer}}(S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/U', \mathcal{O})$ leur ensemble. On vérifie facilement que cet ensemble ne dépend pas de la décomposition $\{\sigma_\alpha\}$ choisie.

On définit de même $\Gamma^{\text{mer}}((S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge \times \text{Spec}(A))/U', \mathcal{O})$, pour tout anneau

neothérien A .

PROPOSITION 4.9: *On suppose $g = [F : \mathbb{Q}] > 1$. Alors*

$$\Gamma((S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge \times \text{Spec}(A)/U'), \mathcal{O}) \cong \Gamma^{\text{mer}}((S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge \times \text{Spec}(A)/U'), \mathcal{O}).$$

PREUVE: Soit f un élément de l'ensemble à droite; on peut l'écrire sous forme

$$f = \sum_{m \in M} c_m \cdot q^m, \quad c_{u \cdot m} = c_m \forall u \in U'.$$

La condition de méromorphie à l'infini impose que $\forall \ell \in M_+$ tel que $\mathbb{R}_+ \cdot \ell = \sigma_\alpha$, α convenable $\Rightarrow$

$$(*) \quad \exists k(\ell) \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall m \text{ avec } c_m \neq 0 \Rightarrow \langle \ell, m \rangle > -k(\ell);$$

donc, en fait, (*) est valable pour tout $\ell \in M_+$. Pour voir que f est holomorphe à l'infini il suffit de voir que $C(f) =_{\text{Df.}} \{m \mid c'_m \neq 0\} \subset M_+ \cup \{0\}$. Supposons le contraire: soient $m \in C(f)$ et $\ell \in M_+$ tels que $\langle m, \ell \rangle < 0$. Choisisant une F -base de M_0 et utilisant les g injections de F dans $\mathbb{R}$, on écrit

$$\langle m, \ell \rangle = \sum_{i=1}^g m_i \cdot \ell_i.$$

Soit i_0 tel que $m_{i_0} \cdot \ell_{i_0} < 0$. Comme $g > 1$, il existe $u \in U'$ tel que $u_{i_0} \gg 1$ et $0 < u_i \leq 1$ pour $i \neq i_0$. Alors $\langle u \cdot m, \ell \rangle = \sum_{i=1}^g u_i \cdot (m_i \cdot \ell_i)$ est 'tres négatif'. Comme $u \cdot m \in C(f)$, c'est en contradiction avec (*), si l'on y remplace m par $u \cdot m$. c.q.f.d.

Ce qui précède est particulièrement important dans les cas suivants. On fixe le $\mathfrak{o}$ -module projectif de rang un à notion de positivité $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_+)$.

4.10: On appelle une pointe $\mathcal{C}$ une suite exacte de $\mathfrak{o}$ -modules projectifs

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow H \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

où $\text{rg}(P) = \text{rg}(N) = 1$, munie d'un isomorphisme

$$\alpha : (\wedge_{\mathfrak{o}}^2 H)^* = (P \cdot N)^* = \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N^{-1} \cong \mathcal{D}^{-1}.$$

On pose $M = \mathcal{D}^{-1}P^{-1} \cdot N$, muni de la notion de positivité déduite de celles sur $\mathcal{D}^{-1}$ et N^2 . On pose $U' = U^2$.

Dans ce cas l'anneau $R^{U'}(M)$ sera noté $R(\mathcal{C})$. L'ensemble des classes d'isomorphie de pointes est égal à l'ensemble des classes d'idéaux de F .

4.11: Soit $n \geq 1$. Une $\Gamma(n)$ -pointe est une pointe munie d'un isomorphisme de $\mathfrak{o}$ -modules

$$H/nH \simeq (\mathfrak{o}/n\mathfrak{o})^2$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \wedge_{\mathfrak{o}}^2 H/n \wedge_{\mathfrak{o}}^2 H & \xleftarrow{\sim \alpha^*} & \mathfrak{o}/n\mathfrak{o} \\ & \searrow \sim & \parallel \\ & & \mathfrak{o}/n\mathfrak{o} \end{array}$$

On pose $M = (1/n) \cdot \mathcal{D}^{-1}P^{-1} \cdot N$, muni de la notion de positivité déduite de celles sur $\mathcal{D}^{-1}$ et N^2 . On pose $U' = U_n^2$, où $U_n = \{u \in U \mid u \equiv 1 \pmod{n \cdot \mathfrak{o}}\}$.

On note S_n le tore correspondant.

Le noyau de la multiplication par n est au milieu d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow (n^{-1}P/P)(1) \longrightarrow (X_{\sigma_a}^0)_n \longrightarrow (n^{-1}N/N) \longrightarrow 0.$$

On peut étendre à $(1/n)N$ l'homomorphisme $u': N' \rightarrow T(S_n)$.

Par suite on obtient une injection de schémas en groupes finis munis d'une action de $\mathfrak{o}$

$$n^{-1}N/N \hookrightarrow (X_{\sigma_a}^0)_n,$$

tel que $n^{-1}N/N$ se projète isomorphiquement sur le quotient de $(X_{\sigma_a}^0)_n$ par $(n^{-1}P/P)(1)$. Autrement dit, on a

$$(X_{\sigma_a}^0)_n = (n^{-1}P/P)(1) \times (n^{-1}N/N).$$

Une $\Gamma(n)$ -pointe *uniformisée* est une $\Gamma(n)$ -pointe avec un scindage de la suite exacte de $\mathfrak{o}$ -modules

$$0 \longrightarrow \frac{1}{n} P/P \longrightarrow \frac{1}{n} H/H \longrightarrow \frac{1}{n} N/N \longrightarrow 0.$$

Tenant compte de l'isomorphisme $H/nH \simeq (\mathfrak{o}/n\mathfrak{o})^2$, et du fait qu'au-dessus de $\mathrm{Spec}(Z[\zeta_n][1/n])$ on a un isomorphisme canonique entre $(n^{-1}P/P)$ et $(n^{-1}P/P)(1)$, on associe à une $\Gamma(n)$ -pointe uniformisée un objet de $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ au-dessus de $\bar{S}_{n\sigma_\alpha}^0 \times \mathrm{Spec}(Z[\zeta_n][1/n])$.

Deux uniformisations d'une même $\Gamma(n)$ -pointe diffèrent par un élément a de $\mathrm{Hom}((1/n)N/N, (1/n)P/P) = (1/n)M^*/M^*$. L'objet de $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ sur $\bar{S}_{n\sigma_\alpha}^0 \times \mathrm{Spec}(Z[\zeta_n][1/n])$ associé à l'une des uniformisations s'obtient de celui associé à l'autre par image réciproque par le $Z[\zeta]$ -morphisme $\bar{S}_{n\sigma_\alpha}^0 \times \mathrm{Spec}(Z[\zeta_n]) \rightarrow \bar{S}_{n\sigma_\alpha}^0 \times \mathrm{Spec}(Z[\zeta_n])$ donné par $q^m \mapsto \zeta_n^{(m,a)} \cdot q^m (\langle m, a \rangle \in (1/n)Z/Z)$; à noter que $\zeta_n^{(m,a)} = 1$ si $m \in \mathfrak{D}^{-1}P^{-1} \cdot N$.

Le morphisme correspondant à $a_1 + a_2 \in \mathrm{Hom}((1/n)N/N, (1/n)P/P)$ est produit les morphismes correspondants à a_1 et a_2 resp. Par suite on peut associer à une $\Gamma(n)$ -pointe un morphisme de $\bar{S}_{n\sigma_\alpha}^0 \times \mathrm{Spec}(Z[\zeta_n][1/n])$ dans $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ (si seulement on prend garde de ne pas identifier la source de ce morphisme au schéma de base associé à une $\Gamma(n)$ -pointe uniformisée). Autrement dit, ce morphisme associé à une $\Gamma(n)$ -pointe $\mathcal{C}$ n'est qu'une manière de décrire les variétés abéliennes à structure de niveau n associées aux uniformisations de $\mathcal{C}$. Dans ce cas l'anneau $R^{U'}(M)$ sera noté $R_n(\mathcal{C})$. L'ensemble des classes d'isomorphie de $\Gamma(n)$ -pointes uniformisées donnant lieu à des pointes isomorphes est égal à $Sl(2, \mathfrak{o}/n\mathfrak{o})$; l'ensemble des $\Gamma(n)$ -pointes sous-jacentes est $Sl(2, \mathfrak{o}/n\mathfrak{o}) / \begin{pmatrix} \bar{u} & * \\ 0 & \bar{u}^{-1} \end{pmatrix}$, où $\bar{u}$ est la réduction modulo n d'une unité dans $\mathfrak{o}$.

Appendice: Compléments à [15]

Les compléments en question concernent: (a) le passage à la variété abélienne duale, (b) la pleine fidélité du foncteur qui à un ensemble de périodes associe une variété abélienne dégénérante. On reprend les notations de [15], à ceci près qu'on note $P_{2\varphi, \Sigma}$ le modèle relativement complet relatif à 2φ qui dans [15], 2.3, est noté $\mathrm{Proj}(R_{\varphi, \Sigma})$.

THEOREME A.1: Soit $\psi: Y \rightarrow X$ un homomorphisme tel que $\mathfrak{X}^{\psi(y)}(z) = \mathfrak{X}^{\psi(z)}(y)$, $\forall \forall y, z \in Y$.

- (i) Il existe un modèle relativement complet $(\tilde{P}, \tilde{L})$ et un faisceau inversible $\tilde{M}$ sur $\tilde{P}$ muni d'une action T'^* de $\tilde{G}$ sur $\tilde{M}$ et d'une action S'^* de Y sur $\tilde{M}$ vérifiantes la relation suivante:

$$T'_a{}^* \cdot S'_y{}^* = \mathfrak{X}^{2\psi(y)}(a) \cdot S'_y{}^* \cdot T'_a{}^*; \quad \forall y \in Y,$$

$\forall$ points a de $\tilde{G}$ à valeurs dans un S -schéma.

- (ii) Le faisceau inversible formel $\tilde{M}^\wedge$ sur $\tilde{P}^\wedge$ se descend en un faisceau inversible $M^\wedge$ sur $P^\wedge$ qui est algébrisable en un faisceau inversible M sur P .
- (iii) La restriction de M à $G \subset P$ est indépendante du choix du modèle relativement complêt et de $\tilde{M}$.

PREUVE: (a) Supposons que ψ soit de la forme $\psi = \psi_1 - \psi_2$, où ψ_1 et ψ_2 sont symétriques et tels que ψ_1 et ψ_2 vérifient l'assertion (i): il existent donc des modèles relativement complêts $(\tilde{P}_1, \tilde{L}_2)$ et $(\tilde{P}_2, \tilde{L}_2)$ relatif à des polarisations φ_1 et φ_2 ; et des faisceaux inversibles $\tilde{M}_1$ sur $\tilde{P}_1$ et $\tilde{M}_2$ sur $\tilde{P}_2$ comme dans (i). Soit $\tilde{P}_{12} \subset \tilde{P}_1 \times_S \tilde{P}_2$ l'adhérence de $\tilde{G} \subset \tilde{P}_1 \times_A \tilde{P}_2$: c'est un schéma irréductible et réduit, localement de type fini sur S . On définit de façon évidente des actions T^{12} de $\tilde{G}$ et S^{12} de Y sur $\tilde{P}_{12}$. De même, le faisceau inversible sur $\tilde{P}_{12}$, $\tilde{L}_{12} = p_1^*(\tilde{L}_1) \otimes p_2^*(\tilde{L}_2)$ (où $p_i: \tilde{P}_{12} \rightarrow \tilde{P}_i$ sont les deux projections) est muni des actions T^{*12} de $\tilde{G}$ et S^{*12} de Y .

LEMME: $(\tilde{P}_{12}, \tilde{L}_{12})$ est un modèle relativement complêt relatif à $(\varphi_1 + \varphi_2)$.

PREUVE: On doit vérifier les conditions (i)–(v) de la définition. Soient $U_1 \subset \tilde{P}_1$ et $U_2 \subset \tilde{P}_2$ deux ouverts $\tilde{G}$ -invariants de type fini sur S tels que $\tilde{P}_i = \cup_y s_y^i(U_i)$. Il résulte de [15], Prop. 4.5 qu'il existe un ensemble fini $S \subset Y \times Y$ tel que $\tilde{P}_{12} \cap s_{(y_1, y_2)}(U_1 \times_S U_2)_0 = \emptyset$ si $(y_1, y_2) \notin Y + S$. Soit $U_{12} = [\cup_{(y_1, y_2) \in S} s_{(y_1, y_2)}(U_1 \times_S U_2)] \cap \tilde{P}_{12}$. C'est un ouvert $\tilde{G}$ -invariant de $\tilde{P}_{12}$, qui est de type fini sur S . Montrons que $\tilde{P}_{12} = \cup_y s_y(U_{12})$. Il suffit de voir que ces deux schémas coïncident au-dessus de $S_0 \subset S$.

Si $x \in \tilde{P}_{12}$, il existe $(y_1, y_2) \in Y \times Y$ tel que $s_{(y_1, y_2)}(x) \in (U_1 \times_S U_2)_0$, de sorte que $(y_1, y_2) \in Y + S$. La condition (ii) résulte facilement de ce que la condition (ii) est vérifiée pour $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$. La condition (iii) est claire. Les actions de Y et $\tilde{G}$ sur $\tilde{L}_{12}$ vérifient la relation

$$T_a^{*12} \circ S_y^{*12} = \mathfrak{X}^{(\varphi_1 + \varphi_2)(y)}(a) \cdot S_y^{*12} \circ T_a^{*12}$$

comme l'exige la condition (iv). Le fait que $\tilde{L}_{12}$ est ample est facilement vérifié. c.q.f.d.

Ceci étant, le faisceau inversible $\tilde{M} = p_1^*(\tilde{M}_1) \otimes p_2^*(\tilde{M}_2)^{-1}$ est muni des actions T'^* de $\tilde{G}$ et S'^* de Y qui vérifient la relation suivante:

$$T_a'^* \circ S_y'^* = \mathfrak{X}^{2(\psi_1 - \psi_2)(y)}(a) S_y'^* \circ T_a'^*,$$

ce qui démontre l'assertion pour $\psi = \psi_1 - \psi_2$.

(b) Si $\psi = \varphi$ est une polarisation, alors il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ il existe un modèle relativement complet relatif à $2n\varphi$, soit $(\tilde{P}_n, \tilde{L}_n)$ (cf. [15], §2). Alors $\tilde{L}_n$ est un faisceau inversible qui vérifie les conditions de (i) relatif à $n\varphi$. D'après (a), l'assertion (i) pour $\varphi = (n+1)\varphi - n\varphi$ s'ensuit. Si finalement ψ est arbitraire, on le représente sous la forme $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont deux polarisations et conclut avec (a).

(c) L'assertion (ii) résulte du théorème d'existence de Grothendieck (cf. [15], §3).

(d) Si $(\tilde{P}_1, \tilde{L}_1, \tilde{M}_1)$ et $(\tilde{P}_2, \tilde{L}_2, \tilde{M}_2)$ sont deux solutions du problème posé dans (i) alors, remplaçant $(\tilde{P}_2, \tilde{L}_2, \tilde{M}_2)$ par $(\tilde{P}_{12}, \tilde{L}_{12}, P_2^*(\tilde{M}))$, on peut supposer qu'il existe un morphisme $\tilde{p}: \tilde{P}_2 \rightarrow \tilde{P}_1$ qui induit l'identité sur $\tilde{G}$. Alors il existe un élément $a \in A$ et un homomorphisme de faisceaux inversibles sur P_2 , $\tilde{\varphi}: a \cdot \tilde{p}(\tilde{M}_1) \rightarrow \tilde{M}_2$ à noyau et conoyau de A -torsion et qui au-dessus de $\tilde{G}$ induit un isomorphisme entre $a \cdot p^*(\tilde{M}_1)$ et $a \cdot \tilde{M}_2$. Cet homomorphisme descend en un homomorphisme $\varphi: a \cdot p^*(M_1) \rightarrow M_2$ de faisceaux inversibles sur P_2 . Alors φ induit sur G un isomorphisme entre $a \cdot p^*(M_1)$ et $a \cdot M_2$; comme p restreint à $G \subset P_2$ est l'identité, il s'ensuit que $M_1|_G \cong M_2|_G$. c.q.f.d.

On note $M(2\psi)$ le faisceau inversible sur G ainsi obtenu. Si ψ est une polarisation de l'ensemble des périodes, $M(2\psi)$ est relativement ample sur S [15].

THEOREME A.2: *Le degré de la restriction de $M(2\psi)$ à la fibre générique G_η est égale à $|\text{Koker}(2\psi)|$.¹*

On démontre d'abord le lemme suivant:

LEMME: *Soit $\psi = \varphi$ une polarisation de l'ensemble de périodes. Alors il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait*

$$\dim_K(H^0(G, M(2n\varphi)) \otimes_A K) = d_n = |\text{Koker}(2n\varphi)|.$$

Df.

PREUVE: Soit $\Sigma \subset X$ une étoile; pour $n \geq N$ on peut construire un modèle relativement complet (P, L) relatif à $2n\varphi$ (cf. [15], §2). On fixe $n \geq N$ et remplace φ par $n\varphi$. Du théorème d'existence de

¹ On définit $k = |\text{Koker } \psi|$ comme l'unique entier non-négatif tel que $Z/k \cong \text{Koker}(\Lambda^* \psi: \Lambda^* Y \rightarrow \Lambda^* X)$: si ψ est injectif, c'est le nombre des éléments du conoyau de ψ , sinon c'est zéro.

Grothendieck on déduit que $H^0(P, L) \cong H^0(P^\wedge, L^\wedge) \cong H^0(\tilde{P}^\wedge, \tilde{L}^\wedge)^Y \subset H^0(\tilde{G}^\wedge, \mathcal{O})$. Cette dernière inclusion parce que on a affaire à des schémas irréductibles et réduits. On écrit les éléments du dernier groupe comme séries formelles: $h = \sum_{\alpha \in X} c_\alpha \cdot \mathcal{X}^\alpha$; $c_\alpha \in A$. La série formelle correspondante à un élément h de $H^0(P, L)$ vérifie les identités

$$c_{\alpha+2\varphi(y)} = \mathcal{X}^{\alpha+\varphi(y)}(y) \cdot c_\alpha \quad \forall \alpha \in X, \forall y \in Y.$$

Il en suit que h est déterminé par les coefficients c_α quand $\alpha \in X$ parcourt un ensemble de représentants de $X/2\varphi(X)$: par suite, $\dim_K(H^0(P, L) \otimes_A K) \leq d$.

Pour démontrer le lemme, il suffit de voir que si les coefficients de la série formelle $h = \sum_\alpha c_\alpha \cdot \mathcal{X}^\alpha$, $c_\alpha \in K$, vérifient les identités ci-dessus alors il existe un élément $a \in A$ tel que $a \cdot h$ est dans l'image de l'inclusion $H^0(P, L) \subset H^0(\tilde{G}^\wedge, \mathcal{O})$. Pour ce voir il suffit de montrer que si $\beta \in X$ alors pour $a \in A$ convenable, la série $a \cdot h = a \cdot (\sum_{y \in Y} \mathcal{X}^{\varphi(y)+\beta}(y) \cdot \mathcal{X}^{2\varphi(y)+\beta})$ est dans $H^0(P, L)$.

Pour cela il suffit de se convaincre de: pour tout $\alpha \in \Sigma$, $y_0 \in Y$, il existe $a \in A$ tel que

(a) le terme de $a \cdot h$

$$a \cdot M_{\beta, y} = a \cdot \frac{\mathcal{X}^{\varphi(y)+\beta}(y)}{\mathcal{X}^{\varphi(y_0)+\alpha}(y_0)} \cdot \mathcal{X}^{2\varphi(y-y_0)+\beta-\alpha}$$

est dans $\Gamma(U_{\alpha, y_0}, \mathcal{O})$ (notations du §2 de [15]).

(b) pour tout $n > 0$, on a $a \cdot M_{\beta, y} \in I^n \cdot \Gamma(U_{\alpha, y_0}, \mathcal{O})$ pour $\|y\| \geq 0$. ($\| \cdot \|$ designe une norme euclidienne sur Y).

La propriété d'invariance de h nous permêt de supposer que $y_0 = 0$.

Démonstration de (a):

Soit $a \in A$ tel que l'on puisse écrire

$$a \cdot M_{\beta, y} = \sum_j a_j \cdot \prod_{i=1}^{n_j} M_{\beta_{ji}, y_{ji}}$$

avec $\beta_{ji} \in \Sigma$; l'élément à droite est dans $\Gamma(U_{\alpha, 0}, \mathcal{O})$. On a

$$M_{\beta, y+z} = M_{\beta, y} \cdot \mathcal{X}^{\varphi(z)}(z) \cdot \mathcal{X}^{\varphi(y)+\beta}(z) \cdot \mathcal{X}^{2\varphi(z)}$$

et

$$M_{\beta_\mu, y_\mu + z_\mu} = M_{\beta_\mu, y_\mu} \cdot \mathfrak{X}^{\varphi(z_\mu)}(z_{ji}) \cdot \mathfrak{X}^{\varphi(y_\mu) + \beta_\mu}(z_{ji}) \cdot \mathfrak{X}^{2\varphi(z_\mu)},$$

pour tout $z, z_{ji} \in Y$. Insérant l'expression plus haut pour $M_{\beta, y}$, on obtient, si $z = \sum_{i=1}^n z_{ji}$ pour tout j ,

$$\begin{aligned} a \cdot M_{\beta, y+z} &= \mathfrak{X}^{\varphi(z)}(z) \cdot \mathfrak{X}^{\varphi(y)+\beta}(z) \cdot \mathfrak{X}^{2\varphi(z)} \cdot \left(\sum_j a_j \cdot \prod_{i=1}^{n_j} M_{\beta_\mu, y_\mu} \right) \\ &= \sum_j a_j \cdot \left(\mathfrak{X}^{\varphi(z)}(z) \cdot \prod_{i=1}^{n_j} \mathfrak{X}^{-\varphi(z_\mu)}(z_{ji}) \right) \left(\mathfrak{X}^{\varphi(y)+\beta}(z) \right. \\ &\quad \left. \cdot \prod_{i=1}^{n_j} \mathfrak{X}^{-(\varphi(y_\mu)+\beta_\mu)}(z_{ji}) \right) \cdot \prod_{i=1}^{n_j} M_{\beta_\mu, y_\mu + z_\mu}. \end{aligned}$$

Le dernier facteur dans chaque sommand est dans $\Gamma(U_{\alpha,0}, \mathcal{O})$. Supposons que $n_j > 1$ pour tout j . Montrons alors que le facteur numérique devant le dernier facteur est dans A , pour $\|z\| \gg 0$. Il suffit de voir que pour tout idéal premier minimal $\mathcal{P} \subset A$, $\text{ord}_{\mathcal{P}}$ est non-négatif pour $\|z\| \gg 0$. Choisissons les z_{ji} tels que, si $\text{ord}_{\mathcal{P}}(\mathfrak{X}^{\varphi(z)}(z)) = 0$, alors $\text{ord}_{\mathcal{P}}(\mathfrak{X}^{\varphi(z_\mu)}(z_{ji})) = 0$ et que si $\text{ord}_{\mathcal{P}}(\mathfrak{X}^{\varphi(z)}(z)) > 0$, alors z_{ji} est proche de z/n_j . Alors, si $\text{ord}_{\mathcal{P}}(\mathfrak{X}^{\varphi(z)}(z)) = 0$, le facteur numérique aura $\text{ord}_{\mathcal{P}} = 0$. Si $\text{ord}_{\mathcal{P}}(\mathfrak{X}^{\varphi(z)}(z)) > 0$, alors le $\text{ord}_{\mathcal{P}}$ du 'terme quadratique' du facteur numérique est de l'ordre de croissance de $(1 - (1/n_j)) \cdot \text{ord}_{\mathcal{P}}(\mathfrak{X}^{\varphi(z)}(z))$ et domine le $\text{ord}_{\mathcal{P}}$ du 'terme linéaire' pour $\|z\| \gg 0$, puisque on avait supposé $n_j \neq 1$: si $\|z\| \gg 0$, le facteur numérique sera donc dans A . Si pourtant $n_j = 1$ pour un j , alors $2\varphi(y+z) + \beta - \alpha = 2\varphi(y_j+z) + \beta_j - \alpha$ et on calcule que

$$M_{\beta, y+z} = \mathfrak{X}^{(\beta_j+\beta)/2} \left(\varphi^{-1} \left(\frac{\beta_j - \beta}{2} \right) \right) \cdot M_{\beta, y_j+z},$$

de sorte qu'il existe $a \in A$ tel que $a \cdot M_{\beta, y+z} \in \Gamma(U_{\alpha,0}, \mathcal{O})$ pour tout z . On a démontré (a).

Démonstration de (b):

On part de la formule

$$M_{\beta, y} = \mathfrak{X}^{2\varphi(y-z)+\beta-\alpha}(z) \cdot M_{\alpha, z} \cdot M_{\beta, y-z}.$$

On choisit des entiers positifs n_z tels que

$$[\mathfrak{X}^{2\varphi(z)}(z)]^{2n_z-2} \cdot \mathfrak{X}^{\beta-\alpha}(z) \in I^n, \quad \text{pour tout } 0 \neq z \in Y.$$

Alors, cf. [15], 1.3, il existent $z_1, \dots, z_k \in Y, \neq 0$, et un ensemble fini $S \subset Y$ tels que pour tout $y \in Y \setminus S$

$$\mathfrak{X}^{\varphi(y)}(z_i) \in [\mathfrak{X}^{\varphi(z_i)}(z_i)]^{n_{z_i}} \cdot A, \text{ pour } i \text{ convenable.}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^{2\varphi(y-z_i)+\beta-\alpha}(z_i) &= [\text{élt de } A \cdot \mathfrak{X}^{\varphi(z_i)}(z_i)^{n_{z_i}}]^2 \\ &\cdot \mathfrak{X}^{-2\varphi(z_i)}(z_i) \cdot \mathfrak{X}^{\beta-\alpha}(z_i) \in I^n. \end{aligned}$$

On a donc pour $y \notin S$, et avec $a \in A$ ayant la propriété établie dans (a)

$$a \cdot M_{\beta,y} = (\text{élt. de } I^n) \cdot (\text{élt. de } \Gamma(U_{\alpha,0}, \mathcal{O})) \cdot (a \cdot M_{\beta,y-z_i})$$

et le dernier facteur est dans $\Gamma(U_{\alpha,0}, \mathcal{O})$ d'après (a), ce qui démontre (b). c.q.f.d.

PREUVE DE A.2: (a) Si $\psi = \varphi$ est une polarisation de l'ensemble de périodes donnant lieu au faisceau ample L_η sur G_η , alors $k \cdot \varphi$ donne lieu à $L_\eta^{\otimes k}$, qui est très ample pour $k \gg 0$. Appliquant le lemme ci-dessus on trouve que

$$\begin{aligned} k' \cdot \deg_{G_\eta}(L) &= \deg_{G_\eta}(L^{\otimes k}) = \dim_K H^0(G_\eta, L^{\otimes k}) \\ &= |\text{Koker}(2k\varphi)| = k' \cdot |\text{Koker}(2\varphi)|, \end{aligned}$$

d'où l'énoncé pour φ .

(b) Si φ_1 et φ_2 sont deux polarisations de l'ensemble de périodes, alors $P(n_1, n_2) =_{\text{Df.}} \deg_{G_\eta}(M(2\varphi_1)^{\otimes n_1} \otimes M(2\varphi_2)^{\otimes n_2})$ est un polynôme en $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} P'(n_1, n_2) &= |\text{Koker}(2(n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2))| \\ &= \# \left(\text{Koker} \left(\sum_{i=0}^r \binom{r}{i} n_1 n_2^{r-i} \cdot (\Lambda^i \varphi_1 \wedge \Lambda^{r-i} \varphi_2): \Lambda^r Y \rightarrow \Lambda^r X \right) \right) \end{aligned}$$

est un polynôme en $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Comme on a vu dans (a) que $P(n_1, n_2) = P'(n_1, n_2)$ pour $n_1, n_2 \geq 1$, les polynômes P et P' sont identiques. En particulier, l'énoncé de A.2 pour $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ est vrai. Mais pour chaque ψ et chaque polarisation φ , l'homomorphisme $(\psi + n\varphi): Y \rightarrow X$ est une polarisation pour $n \gg 0$, d'où le résultat pour ψ . c.q.f.d.

L'ensemble de périodes dual est défini comme suit: soit $\tilde{G}'$ le tore déployé sur S à groupe de caractères Y ; soit $Y' = X$. Alors $Y' \subset \tilde{G}'(K)$ via $\mathfrak{X}^{\alpha'}(y') = \mathfrak{X}^{y'}(\alpha') \in K^X$. Il est clair que l'ensemble de périodes Y' est polarisable. Appliquant la construction de [15] on obtient un schéma en groupes sémi-abélien G' sur S . Soit $\psi = T: Y \times X \rightarrow X \times Y$ la transposition. La démonstration du théorème A.1 montre alors qu'il existe un modèle relativement complet pour $Y \times X \subset G \times G'(K)$ et un faisceau inversible $\tilde{P}'$ muni des actions de $G \times G'$ et de $Y \times X$ qui vérifient la relation

$$T'^*_{\tilde{a}} \cdot S'^*_{\tilde{y}} = \mathfrak{X}^{\psi(\tilde{y})}(\tilde{a}) \cdot S'_{\tilde{y}} \cdot T^*_{\tilde{a}}$$

($\tilde{a} \in \tilde{G} \times \tilde{G}'(S')$, $\tilde{y} \in Y \times X$): la fait qu'on peut laisser tomber le facteur 2 devant ψ tient à ce que $\mathfrak{X}^{\psi(\tilde{y})}(\tilde{y}) = \mathfrak{X}^{\psi(y, \alpha)}(y, \alpha) = (\mathfrak{X}^{\alpha}(y))^2$, $\alpha \in X$, $y \in Y$ [p.ex. présenter ψ sous la forme $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont deux polarisations telles que $\mathfrak{X}^{\varphi_i(\tilde{y}) + \tilde{\alpha}_i}(\tilde{y}) \in A$ pour tout $\tilde{\alpha}_i \in \tilde{\Sigma}_i$ avec $\tilde{\Sigma}_i$ deux étoiles convenables et telles que $\mathfrak{X}^{\varphi_i(\tilde{y})}(\tilde{y}) = b_i(\tilde{y})^2$ avec

$$b_i(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = \mathfrak{X}^{\varphi_i(\tilde{y}_1)}(\tilde{y}_2) \cdot b_i(\tilde{y}_1) \cdot b_i(\tilde{y}_2) \quad (i = 1 \text{ ou } 2);$$

remarquer que les formules du §2 de [15] permettent de construire des modèles relativement complets $\tilde{P}_{\varphi_i, \tilde{\Sigma}_i}$ et des faisceaux inversibles $\tilde{L}_i$ sur $\tilde{P}_{\varphi_i, \tilde{\Sigma}_i}$ munis des actions de $\tilde{G}$ et $\tilde{Y}$ telles que

$$T^i_{\tilde{a}} \circ S^i_{\tilde{y}} = \mathfrak{X}^{\varphi_i(\tilde{y})}(\tilde{a}) \cdot S^i_{\tilde{y}} \circ T^i_{\tilde{a}};$$

on construit alors comme dans la démonstration de A.1 le faisceau inversible cherché $\tilde{P}'$ à partir de $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$.

On note P' le faisceau inversible sur $G \times_S G'$ obtenu.

THEOREME A.3: *Il existe un isomorphisme unique entre la fibre générique B'_η et la variété abélienne B^* duale à B_η tel que le faisceau inversible P'_η sur $(B \times_S B')_\eta$ soit l'image réciproque du faisceau inversible de Poincaré sur $B_\eta \times B^*$.*

En particulier, la variété abélienne duale à B_η peut être obtenue par le procédé analytique de [15].

PREUVE: Il résulte de la démonstration du théorème A.2 que

$$\deg_{(B \times_S B')_\eta}(P'_\eta) = |\text{Koker}(\psi)| = 1.$$

De plus, il est clair par construction que $P'[\{O_B\} \times B' \cong \mathcal{O}_{B'}]$ et $P'[B \times$

$\{O_B\} \cong \mathcal{O}_B$. Il en résulte que P'_η 'est' une correspondance divisorielle de degré 1, de sorte qu'il existe un seul isomorphisme entre B'_η et la variété abélienne duale à B_η avec les propriétés énoncées. c.q.f.d.

COROLLAIRE A.4: *Soit $\psi: Y \rightarrow X$ comme dans l'énoncé du théorème A.1. Alors à ψ correspond un homomorphisme $D(\psi): \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ avec $D(\psi)(Y \subset \tilde{G}(K)) = \psi$, donc avec $D(\psi)(Y) \subset Y'$, de sorte que $D(\psi)$ définit un homomorphisme $\bar{\psi}: G \rightarrow G'$ ([15]). Le faisceau inversible $M(2\psi)$ sur G est l'image réciproque de P' par le morphisme $(id, \bar{\psi}): G \rightarrow G \times_S G'$.*

Si ψ est une polarisation de l'ensemble des périodes, alors $\bar{\psi}_\eta$ est une polarisation du schéma abélien B_η .

PREUVE: Le fait que $D(\psi)|Y = \psi$ résulte de la définition de l'injection de Y' dans $\tilde{G}'(K)$ et de la relation de symétrie imposée sur ψ .

La restriction du faisceau inversible $\bar{P}'$ à l'adhérence du graphe de $(id, D(\psi^*))$ dans un modèle relativement complet de $\tilde{G} \times_S \tilde{G}'$ est munie des actions T^* de $\tilde{G}$ et S^* de Y vérifiantes l'identité suivante:

$$T_a^* \circ S_y^* = \mathfrak{X}^{T(y, \psi(y))}(a, D(\psi)(a)) \cdot S_y^* \circ T_a^*.$$

Le multiplicateur égale $\mathfrak{X}^{2\psi(y)}(a)$. On voit alors que la restriction à G du faisceau inversible descendu sur une compactification de G est isomorphe à $M(2\psi)$ (cf. dém. de 4.6 de [15]). c.q.f.d.

Il résulte de la description des points d'ordre fini de G_η et G'_η (cf. [15], 4.10) qu'on a un système cohérent de bi-homomorphismes de schémas en groupes finis sur η

$$G_{\eta_n} \times G'_{\eta_n} \xrightarrow{\epsilon'_n} \mu_n,$$

qui est un accouplement non-dégénéré; les sous-groupes $\tilde{G}_{\eta_n} \subset G_{\eta_n}$ et $\tilde{G}'_{\eta_n} \subset G'_{\eta_n}$ sont l'annulateur l'un de l'autre: avec les notations de 4.10 de [15] on pose $e'_n(g, g') = \mathfrak{X}^y(g) \cdot \mathfrak{X}^{-y}(g')$ si $g \in (Z_y^{(n)})_\eta$ et $g' \in (Z_{y'}^{(n)})_\eta$.

THEOREME A.5: *L'isomorphisme $G'_\eta \cong G_\eta^*$ décrit par A.3 est l'unique isomorphisme qui rend commutatif le diagramme suivant pour tout n premier aux caractéristiques résiduelles de S :*

$$\begin{array}{ccc}
 G_{\eta_n} \times G'_{\eta_n} & \xrightarrow{\sim} & G_{\eta_n} \times G_{\eta_n}^* \\
 \downarrow e'_n & & \downarrow e_n \\
 \mu_n & \xlongequal{\quad} & \mu_n
 \end{array}$$

PREUVE: On a, pour $g \in G_{\eta_n}$ et $g' \in G'_{\eta_n}$,

$$e_n(g, g') = E^{p^n}((g, 0), (0, g')),$$

où E^{p^n} est la forme bilinéaire alternée sur $(G_{\eta} \times G'_{\eta})_n$ associée au moyen du groupe théta de Mumford [14] à la n -ième puissance du fibré inversible de Poincaré. On démontrera A.5 en décrivant plus généralement le forme bilinéaire E^M sur $K(M) \subset G_{\eta}$ associée au faisceau inversible $M = M(2\psi)$ sur G_K qui vient d'après A.1 d'un homomorphisme symétrique $\psi: Y \rightarrow X$. On supposera ψ injectif.

On définit par produit fibré le schéma en groupes $\tilde{G}_{2\psi}$ sur $\text{Spec}(K)$:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{G}_{2\psi} & \longrightarrow & \tilde{G} \\
 \downarrow & & \downarrow D(2\psi) \\
 X & \longrightarrow & \tilde{G}',
 \end{array}$$

où $D(2\psi)$ désigne l'homomorphisme dual à 2ψ au sens de Cartier. Comme ψ est injectif, le quotient $\tilde{G}_{2\psi}/Y$ est un schéma en groupes fini sur $\text{Spec}(K)$.

On définit comme suit un schéma en groupes $\mathcal{G}_{2\psi}$ sur $\text{Spec}(K)$, extension de $\tilde{G}_{2\psi}$ par $\mathbf{G}_{m_K}$: à $\lambda \in \mathbf{G}_m$ et $g \in \tilde{G}_{2\psi}$ on associe l'élément $\kappa_{\lambda, g} \in \tilde{\mathcal{G}}_{2\psi}$; on convient que $\kappa_{\lambda_1, g_1} \circ \kappa_{\lambda_2, g_2} = \kappa_{\lambda, g_1 + g_2}$ avec $\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. $\mathfrak{X}^{D(2\psi)(g_2)}(g_1)$: c'est licite puisque $D(2\psi)(g_2) \in X$. On a évidemment $[\kappa_{\lambda_1, g_1}, \kappa_{\lambda_2, g_2}] = \kappa_{\lambda, 0}$ avec

$$\lambda = \mathfrak{X}^{D(2\psi)(g_1)}(g_2) \cdot \mathfrak{X}^{-D(2\psi)(g_2)}(g_1).$$

Remarquons que pour $g \in \tilde{G}_{2\psi}$ et $y \in Y$,

$$\mathfrak{X}^{D(2\psi)(y)}(g) = \mathfrak{X}^{2y}(D(\psi^*)(g)) = \mathfrak{X}^{D(2\psi)(g)}(y),$$

d'après la définition de l'injection de X dans $\tilde{G}'(K)$. Soit $i: Y \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{2\psi}(K)$ l'homomorphisme défini comme suit: $i(y) = \kappa_{\lambda, y}$ avec $\lambda = \mathfrak{X}^{-\psi(y)}(y)$. Alors $\pi \circ i = id$. De plus, $i(Y)$ est dans le centre de $\tilde{\mathcal{G}}_{2\psi}$: en effet, il suffit de voir que pour $g \in \tilde{G}_{2\psi}$, on a $[\kappa_{1, g}, i(y)] = 1$. Or, cette

expression est égale à $\kappa_{\lambda,0}$ avec

$$\lambda = \mathfrak{X}^{D(2\psi)(g)}(y) \cdot \mathfrak{X}^{-2\psi(y)}(g) = 1.$$

Soit $\psi = \varphi$ une polarisation de l'ensemble de périodes. Pour toute extension finie K' de K , on construira un homomorphisme de $\tilde{\mathcal{G}}_{2\varphi}(K')$ dans $\mathcal{G}(M(2\varphi))(K')$ compatible aux projections $\pi: \tilde{\mathcal{G}}_{2\varphi}(K') \rightarrow \tilde{G}_{2\varphi}(K')$ et $\mathcal{G}(M(2\varphi))(K') \rightarrow K(M(2\varphi))(K')$. On pose

$$Y_K = \{g \in \tilde{G}_{2\varphi}(K) \mid \mathfrak{X}^{D(2\varphi)(g)}(g) \text{ est un carré dans } K, \text{ donc aussi dans } A\}.$$

On montrera qu'il existent parmi des faisceaux inversibles $\tilde{M}$ sur de modèles relativement complêts $(\tilde{P}, \tilde{L})$, dont l'existence est assuré par le théorème A.1, de tels que pour toute paire $\lambda \in A$, $g \in Y_K$ sont munis d'un endomorphisme $\tau_{\lambda,g}$ qui au-dessus de $\text{Spec}(K)$ induise l'endomorphisme du fibre inversible $\tilde{M}_K = \text{Spec}(K[\dots \mathfrak{X}^\alpha \dots][\theta])$ donné par

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^\alpha &\longrightarrow \mathfrak{X}^\alpha(g) \cdot \mathfrak{X}^\alpha \\ \theta &\longrightarrow \lambda \cdot \mathfrak{X}^{D(2\varphi)(g)}(g) \cdot \mathfrak{X}^{D(2\varphi)(g)} \cdot \theta. \end{aligned}$$

On s'aperçoit aussitôt que cet endomorphisme induit la translation par g sur $\tilde{G}_K$. Pour $g \in Y_K$, on note c_g une des racines carrées de $\mathfrak{X}^{D(2\varphi)(g)}(g)$; si $g = y \in Y \subset Y_K$, $c_g = \pm \mathfrak{X}^{\varphi(y)}(y)$. On fixe une étoile $\Sigma \subset X$. Il résulte du lemme 1.4 de [15] que pour $n \geq N$, $c_{\alpha,g}^{(n)} = \text{Df. } \mathfrak{X}^\alpha(g) \cdot c_g^n \in A$ pour tout $g \in Y_K$ et tout $\alpha \in \Sigma$. On forme l'anneau gradué

$$R^{(n)} = A[\dots, c_{\alpha,g}^{(n)} \cdot \mathfrak{X}^{n \cdot D(2\varphi)(g) + \alpha} \cdot \theta, \dots]_{\substack{\alpha \in \Sigma, \\ g \in Y_K}}$$

et pose $\tilde{P}^{(n)} = \text{Proj}(R^{(n)})$. Les méthodes de [15], §2, permettent de montrer que $\tilde{P}^{(n)}$, muni du faisceau ample naturel $\tilde{L}^{(n)}$, est un modèle relativement complet relatif à $n\varphi$. De plus, comme pour $g \in Y_K$, on a

$$\mathfrak{X}^{n \cdot D(2\varphi)(g)}(g) \cdot \mathfrak{X}^{n \cdot D(2\varphi)(g)} \cdot \theta = c_g^n \cdot (c_{0,g}^{(n)} \cdot \mathfrak{X}^{n \cdot D(2\varphi)(g)} \cdot \theta) \in R^{(n)},$$

on peut définir un domorphisme $\tau_{\lambda,g}^{(n)}$ du fibré inversible $\tilde{L}^{(n)}$ pour $\lambda \in A$ et $g \in Y_K$. Il en résulte comme dans la démonstration du théorème A.1 l'existence d'un modèle relativement complet $\tilde{P}$ et d'un faisceau inversible $\tilde{M}$ au-dessus de $\tilde{P}$ qui vérifie les conditions de A.1

et qui est muni d'endomorphismes $\tau_{\lambda,g}$ qui sur la fibre générique ont la forme voulue.

Soit K' une extension finie de K . On note A' la clôture intégrale de A dans K' (qui, comme A est excellent, est une A -algèbre finie) et $S' = \text{Spec}(A')$, qui est du même type que S . On voit facilement que la construction de [15] appliquée à $\tilde{G}_{S'}$ et $Y \subset \tilde{G}_S(S')$ a pour résultat $G \times_S S'$ et que l'image réciproque de $M(2\psi)$ par $G_{S'} \rightarrow G_S$ est donné par le théorème A.1 appliqué à la situation au-dessus de S' . Par suite, si

$$Y_{K'} = \{g \in \tilde{G}_{2\varphi}(K') \mid \mathfrak{X}^{D(2\varphi)(g)}(g) \text{ est un carré dans } K', \text{ donc aussi dans } A'\},$$

on obtient des endomorphismes $\tau_{\lambda,g}$ sur un faisceau inversible $\tilde{M}'$ sur un modèle relativement complêt sur S' , pour $\lambda \in A'$ et $g \in Y_{K'}$ qui définissent un homomorphisme de $\pi^{-1}(Y_{K'}) \subset \tilde{\mathcal{G}}_{2\varphi}(K')$ dans $\mathcal{G}(M(2\varphi))(K')$, compatible avec les projections sur $Y_{K'}$ resp. sur $K(M(2\varphi))(K')$ et induisant l'identité sur K'^* . De plus, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Y_K & \longrightarrow & \mathcal{G}(M(2\varphi))(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{K'} & \longrightarrow & \mathcal{G}(M(2\varphi))(K'). \end{array}$$

Par descente on obtient pour toute extension K' de K le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_m(K') & \longrightarrow & \mathcal{G}(M)(K') & \longrightarrow & K(M)(K') \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & G_m(K') & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{G}}_{2\varphi}(K') & \longrightarrow & \tilde{G}_{2\varphi}(K') \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui définit un homomorphisme $\tilde{\gamma}_K: \tilde{\mathcal{G}}_{2\varphi}(K')/u(Y) \rightarrow \mathcal{G}(M)(K')$ se projetant sur un homomorphisme $\gamma_K: \tilde{G}_{2\varphi}(K')/Y \rightarrow K(M)(K')$.

Mais la démonstration de 4.10 de [15] montre que si l'on pose, pour $\alpha \in X$, $\tilde{G}_\alpha = D(2\varphi)^{-1}(\alpha)$, alors $K(M) \cong \Pi_{X/2\varphi(Y)} \tilde{G}_\alpha = \tilde{G}_{2\varphi}/Y$; il en résulte que γ_K est un isomorphisme et par suite $\gamma_{K'}$ en est un.

On obtient en particulier la formule suivante, qui détermine la forme E^M sur $(K(M) \times K(M))(K')$: pour $g_1, g_2 \in \tilde{G}_{2\varphi}(K')$, on a

$$e^M(\gamma_K(g_1), \gamma_K(g_2)) = \mathfrak{X}^{D(2\varphi)(g_1)}(g_2) \cdot \mathfrak{X}^{-D(2\varphi)(g_2)}(g_1).$$

Soit ψ arbitraire. On peut présenter ψ sous forme $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont deux polarisations telles que $K(M(2\psi)) \subset K(M(2\varphi_1)) \cap K(M(2\varphi_2))$. Alors on a $e^{M(2\psi)} = e^{M(2\varphi_1)} - e^{M(2\varphi_2)}$ sur $K(M(2\psi)) \cap K(M(2\psi))$, ce qui donne la formule suivante: pour $g_1, g_2 \in \tilde{G}_{2\psi}(K')$ on a

$$e^{M(2\psi)}(\gamma_{K'}(g_1), \gamma_{K'}(g_2)) = \mathfrak{X}^{D(2\psi)(g_1)}(g_2) \cdot \mathfrak{X}^{-D(2\psi)(g_2)}(g_1).$$

Pour appliquer ce résultat au faisceau inversible P^n sur $G_\eta \times G_\eta^*$, on doit le modifier comme avant A.3: on remplace $\tilde{G}_{2\psi}$ ci-dessus par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{G} \times \tilde{G}')_{nT} & \subset & \tilde{G} \times_S \tilde{G}' \\ \downarrow & & \downarrow n \cdot T \\ X \times Y & \subset & \tilde{G}' \times \tilde{G}; \end{array}$$

alors le quotient de $(\tilde{G} \times \tilde{G}')_{nT}$ par Y est égale à

$$\coprod_{(y,x) \in Y \times X/n(Y \times X)} Z_{(y,x)}^{(n)} = \coprod_{\substack{y \in Y/nY \\ x \in X/nX}} Z_y^{(n)} + Z_x^{(n)};$$

et la modification de la formule ci-dessus donne: pour $g \in Z_y^{(n)}(K')$ et $g' \in Z_x^{(n)}(K')$,

$$e^{P^n}((g, 0), (0, g')) = e_n(g, g') = \mathfrak{X}^x(g) \cdot \mathfrak{X}^{-y}(g').$$

Pour n premier aux caractéristiques résiduelles $(G_n \times G'_n)_\eta$ est étale sur K ; pour définir la forme e_n il suffit donc de connaître ses valeurs dans des extensions finies K' de K . Ce qui précède détermine donc cette forme. c.q.f.d.

Soient $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$ deux tores déployés sur S à groupe des caractères X_1 resp. X_2 et soient $Y_i \subset \tilde{G}_i(K)$, $i = 1, 2$ des ensembles de périodes. Soient G_1 et G_2 les schémas en groupes sémi-abéliens sur S qui résultent de la construction de [15].

THEOREME A.6: *Soit $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ un homomorphisme.*

- (i) *Il existe un seul homomorphisme $\varphi': G'_2 \rightarrow G'_1$ qui induit l'homomorphisme dual à l'homomorphisme de variétés abéliennes que φ induit sur les fibres génériques.*
- (ii) *Il existe un seul homomorphisme $\tilde{\varphi}: \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$ avec $\tilde{\varphi}(Y_1) \subset Y_2$ tel que l'homomorphisme $G_1 \rightarrow G_2$ défini par $\tilde{\varphi}$ [15] soit égale à φ .*

PREUVE: D'après un résultat de M. Raynaud [19], XI 1.15, l'homomorphisme dual à φ_η s'étend de façon unique en un homomorphisme $\varphi': G'_2 \rightarrow G'_1$, ce qui démontre (i).

Pour démontrer (ii), on va réexaminer la construction de [15]. Soient $G_i \subset P_i$ des compactifications de G_i qui viennent des modèles relativement complêts $(\tilde{P}_i, \tilde{L}_i)$. Le graphe de φ définit par adhérence un sous-schéma fermé $P_{12} \subset P_1 \times_S P_2$. Remplaçant P_{12} par un éclaté en dehors de G_1 , on peut supposer que P_{12} est obtenu de P_1 par l'éclatement d'un idéal dont le support est disjoint de G_1 . Il existe donc un unique faisceau d'idéaux Y_1 -invariant de $\tilde{P}_1$ dont l'éclaté $\tilde{p}: \tilde{P}_{12} \rightarrow \tilde{P}_1$ a comme quotient complété par l'action de Y_1 le morphisme $p^\wedge: P_{12}^\wedge \rightarrow P_1^\wedge$. De plus, on peut supposer que cet idéal de $\mathcal{O}_{\tilde{P}_1}$ soit $\tilde{G}_1$ -invariant. Si J est l'image réciproque sur $\tilde{P}_{12}$ de l'idéal éclaté, on pose $\tilde{L}_{12} = \tilde{p}^*(\tilde{L}_1) \otimes J^{-1}$. Il est trivial à vérifier que $(\tilde{P}_{12}, \tilde{L}_{12})$ est un modèle relativement complété de $\tilde{G}_1$. Autrement dit, remplaçant P_1 par P_{12} , on peut supposer dès le début que le morphisme $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ se prolonge en un morphisme $P_1 \rightarrow P_2$. De plus, on peut supposer que les P_i sont normaux. En passant aux complétés $P_i^\wedge$, on obtient une correspondance $\Gamma^\wedge$ entre $\tilde{P}_1^\wedge$ et $\tilde{P}_2^\wedge$.

Soit $\Gamma_1^\wedge$ la composante connexe qui contient le point $(0_{\tilde{G}_1}, 0_{\tilde{G}_2})$.

LEMME: *Le degré de $\Gamma_1^\wedge$ au-dessus de $\tilde{P}_1^\wedge$ est égale à 1.*

PREUVE: Si l'on divise $\tilde{P}_1^\wedge$ par $n \cdot Y_i$ et algérise le schéma formel obtenu, on obtient un recouvrement étale galoisien de groupe de Galois $Y_i/n \cdot Y_i$, $P_i^{(n)}$, de P_i ; il est clair que $\tilde{P}_1^\wedge$ représente la limite projective du système projectif $P_i^{(n)\wedge}$. Le recouvrement étale induit $G_\eta^{(n)}$ de G_η est déterminé de façon unique par l'homomorphisme de schémas abéliens $G'_\eta \rightarrow G_{\eta'}^{(n)'}$, qui n'est d'autre que le quotient par le dual de Cartier $D(Y/nY)$ de Y/nY , qui est de façon naturelle contenu dans $G'_{\eta n}$.

Soit P_1^φ l'image réciproque par φ du recouvrement étale $P_2^{(n)}$ de P_2 . Alors le recouvrement étale induit $G_{1_\eta}^\varphi$ de $G_{1_\eta}^*$ correspond à l'homomorphisme $D(Y_2/nY_2) \rightarrow G_{2_\eta}' \xrightarrow{\varphi_\eta'} G_{1_\eta}'$ qui s'étend en un homomorphisme sur S tout entier $D(Y_2/nY_2) \rightarrow G_2' \xrightarrow{\varphi'} G_1'$. Il en résulte que cet homomorphisme se factorise par $D(Y_1/nY_1) \subset G_1'$ et on en déduit facilement que le recouvrement étale P_1^φ est somme disjointe de recouvrements qui peuvent être dominés par $P_1^{(n)}$. Autrement dit, le système des $P_1^{(n)}$ est cofinal dans le système projectif des recouvrements étales de P_1 obtenu des $P_2^{(n)}$ par image réciproque par φ . Si le degré de $\Gamma_1^\wedge$ au-dessus de $P_1^\wedge$ était >1 , on en déduirait

facilement que $\Gamma_1^\wedge$ définirait des revêtements étales, d'abord formels mais alors même algébriques, de P_1 qui ne seraient pas dominés par $P_1^{(n)}$ pour n convenable, en contradiction avec ce qui précède. c.q.f.d.

Il résulte de ce lemme que $\Gamma_1^\wedge$ définit un morphisme $\tilde{P}_1^\wedge \rightarrow \tilde{P}_2^\wedge$. Il en résulte un homomorphisme $\tilde{\varphi}: \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$, extension unique de l'homomorphisme $\varphi_0: \tilde{G}_{10} \rightarrow \tilde{G}_{20}$, et une application $\psi: Y_1 \rightarrow Y_2$ telle que $s_{y_1}(\tilde{G}_{10}) \subset \tilde{P}_{10}$ s'envoie vers $s_{\psi(y_1)}(\tilde{G}_{20}) \subset \tilde{P}_{20}$; par cette condition $\psi(y_1)$ est déterminé de façon unique. De plus, on vérifie facilement que si $(s_{y_1}(0_{\tilde{G}_1}), s_{y_2}(0_{\tilde{G}_2}))$ et $(s_{y'_1}(0_{\tilde{G}_1}), s_{y'_2}(0_{\tilde{G}_2}))$ sont dans $\Gamma_1^\wedge$, alors $(s_{y_1+y'_1}(0_{\tilde{G}_1}), s_{y_2+y'_2}(0_{\tilde{G}_2}))$ l'est aussi. Il en suit que ψ est un homomorphisme et que le morphisme formel de $G_1^* = \cup_{Y_1} s_{y_1}(\tilde{G}_1)$ vers $G_2^* = \cup_{Y_2} s_{y_2}(\tilde{G}_2)$ est un homomorphisme formel. D'autre part, $\Gamma_1^\wedge$ est le complété formel de l'adhérence dans $\tilde{P}_1 \times_S \tilde{P}_2$ du graphe de $\tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$; on obtient donc un homomorphisme $G_1^* \rightarrow G_2^*$. Il en résulte que $\psi: Y_1 \rightarrow Y_2$ est la restriction à $Y_1 \subset \tilde{G}_2(K)$ de l'homomorphisme $\tilde{\varphi}: \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$.

Il résulte de [15] que $\tilde{\varphi}$ définit un homomorphisme de G_1 vers G_2 ; cet homomorphisme coïncide formellement avec φ , donc est le même. c.q.f.d.

THEOREME A.7: Soit φ_n une polarisation de la variété abélienne G_n . Alors φ_n s'étend en un homomorphisme $\varphi: G \rightarrow G'$ et définit un homomorphisme $\tilde{\varphi}: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ avec $\tilde{\varphi}(Y) \subset X$. L'homomorphisme $\varphi|_Y: Y \rightarrow X$ est une polarisation de l'ensemble de périodes.

PREUVE: (a) Nous montrerons d'abord que $\mathcal{X}^{\tilde{\varphi}(y)}(z) = \mathcal{X}^{\tilde{\varphi}(z)}(y)$, $\forall y, z \in Y$. Soit $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ un homomorphisme donnant lieu à $\tilde{\varphi}: \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$. Les images réciproques de P'_1 resp. P'_2 par les homomorphismes suivants sont canoniquement isomorphes:

$$G_2 \times G'_2 \xleftarrow{(\varphi, id)} G_1 \times G'_2 \xrightarrow{(id, \varphi')} G_1 \times G'_1.$$

L'image réciproque de P'_2 vient par le procédé décrit avant A.3 de l'homomorphisme $Y_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times Y_2$ qui est le composé

$$Y_1 \times X_2 \xrightarrow{(\tilde{\varphi}, id)} Y_2 \times X_2 \xrightarrow{T} X_2 \times Y_2 \xrightarrow{(D(\tilde{\varphi}), id)} X_1 \times Y_2,$$

où $D(\tilde{\varphi})$ désigne le dual de Cartier de $\tilde{\varphi}$. De même, l'image réciproque

de P'_1 vient de l'homomorphisme $Y_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times Y_2$ qui est le composé

$$Y_1 \times X_2 \xrightarrow{(id, \tilde{\varphi})} Y_1 \times X_1 \xrightarrow{T} X_1 \times Y_1 \xrightarrow{(id, D(\tilde{\varphi}))} X_1 \times Y_2.$$

Comme ces deux homomorphismes doivent être égaux, on a $\tilde{\varphi}'|_{X_2} = D(\tilde{\varphi})|_{X_2}$ et $\tilde{\varphi}|_{Y_1} = D(\tilde{\varphi}')|_{Y_1}$. Si maintenant $G_1 = G$ et $G_2 = G'$, alors $Y_1 = Y$, $X_1 = X$ et $Y_2 = X$, $X_2 = Y$. De plus, pour une polarisation φ , on a $\varphi' = \varphi$. On obtient donc, pour $y, z \in Y$, et désignant par $i: Y \rightarrow \tilde{G}$ l'injection canonique,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^{\tilde{\varphi}(y)}(i(z)) &= \mathfrak{X}^{D(\tilde{\varphi})(y)}(i(z)) = \mathfrak{X}^{D(\tilde{\varphi})(y)}(i(z)) \\ &= \mathfrak{X}^y(\tilde{\varphi} \circ i(z)) = \mathfrak{X}^{\tilde{\varphi}(z)}(i(y)). \end{aligned}$$

(b) Nous montrerons maintenant que $\mathfrak{X}^{\tilde{\varphi}(y)}(y) \in I$ pour $0 \neq y \in Y$. Soit M_k le faisceau inversible sur G correspondant à l'homomorphisme $k \cdot \tilde{\varphi}|_Y: Y \rightarrow X$, via la construction de A.1. Pour un modèle relativement complet $\tilde{P}$ qui admet $\tilde{M}_k$ comme dans A.1, on a $H^0(P, M_k) \subset H^0(\tilde{G}^\wedge, \mathcal{O})$; et le rang du premier A -module, comme fonction de k , est de l'ordre de croissance $C \cdot k^r$, $C \neq 0$. Il en résulte l'existence de séries formelles $h = \sum c_\alpha \cdot \mathfrak{X}^\alpha$ avec $c_{\alpha+2k\varphi(y)} = c_\alpha \cdot \mathfrak{X}^{\alpha+k\varphi(y)}(y)$ qui sont dans l'image de $H^0(P, M_k) \subset H^0(\tilde{G}^\wedge, \mathcal{O})$. Il en résulte que $(\mathfrak{X}^{\varphi(y)}(y))^n \rightarrow 0$ avec $n \rightarrow \infty$ dans la topologie I -adique de A , de sorte que $\mathfrak{X}^{\varphi(y)}(y) \in I$. c.q.f.d.

§5. Construction de compactifications toroidales

Soit $n \geq 1$. Une décomposition $\Gamma(n)$ -admissible $\{\sigma_\alpha\}$ consiste en la donnée suivante. On a une notion évidente d'isomorphisme entre $\Gamma(n)$ -pointes (cf. §4). Comme en 4.11, on associe à une $\Gamma(n)$ -pointe des objets $M = n^{-1} \cdot \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1}N$, M_+ , M^* , $M_\#^*$, etc. Une *décomposition $\Gamma(n)$ -admissible* est la donnée, pour chaque $\Gamma(n)$ -pointe $\mathcal{C}$, d'une décomposition $\{\sigma_\alpha^\mathcal{C}\}$ de $M_{\#R}^*$ vérifiant les conditions du §4 et telle que si $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$ est un isomorphisme de $\Gamma(n)$ -pointes, l'isomorphisme induit entre M^* et M'^* transforme la décomposition $\{\sigma_\alpha^\mathcal{C}\}$ en la décomposition $\{\sigma_\alpha^{\mathcal{C}'}\}$.

THEOREME 5.1: *Soit $n \geq 3$. Soit $\{\sigma_\alpha\}$ une $\Gamma(n)$ -décomposition admissible. Il existe une immersion ouverte $j: \mathcal{M}_n^{\otimes -1} \subset \mathcal{M}_{n, \{\sigma_\alpha\}}^{\otimes -1}$ et un*

isomorphisme

$$\varphi: \coprod_{\Gamma(n)\text{-pointes}/\cong} (S_{n\{\sigma_\alpha\}}^\wedge / U_n^2) \times \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[\zeta_n] \left[\frac{1}{n}\right]\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}_\wedge},$$

où $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}_\wedge}$ est le complété formel de $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ le long sa partie à l'infini, tels que pour tout $\sigma_\alpha \in \{\sigma_\alpha^\mathbb{C}\}$ l'image réciproque de la variété abélienne à multiplication réelle (à structure de niveau n) universelle sur $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ par le morphisme

$$\bar{S}_{n_{\sigma_\alpha}} \times \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[\zeta_n] \left[\frac{1}{n}\right]\right) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$$

déduit via le Lemme 3.1 du morphisme formel

$$S_{n_{\sigma_\alpha}}^\wedge \times \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[\zeta_n] \left[\frac{1}{n}\right]\right) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}_\wedge}$$

(construit à l'aide de φ) soit la variété abélienne (à structures additionnelles) sur $\bar{S}_{n_{\sigma_\alpha}}^0 \times \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$ construite au §4.

La paire (j, φ) est unique à isomorphisme unique près.

Démonstration :

Modulo isomorphisme, il n'existe qu'un nombre fini de $\Gamma(n)$ -pointes; une $\Gamma(n)$ -pointe $\mathcal{C}$ étant fixée, modulo l'action de U_n^2 sur $\{\sigma_\alpha^\mathbb{C}\}$ il n'existe qu'un nombre fini de cônes polyédraux et U_n^2 agit librement sur l'ensemble $\{\sigma_\alpha^\mathbb{C}\} \setminus \{0\}$. Par suite, on peut trouver un ensemble fini de cônes polyédraux $\{\sigma_{\alpha_i}\}$ tel que tout cône polyédral $\sigma_\alpha^\mathbb{C} \neq \{0\}$ soit 'équivalent' à un élément $\sigma_{\alpha_i} \in \{\sigma_{\alpha_i}\}$. On pose $\Pi_1 = \coprod_{\{\sigma_{\alpha_i}\}} S_{n_{\sigma_{\alpha_i}}}^\wedge [\zeta_n][1/n]$; c'est un schéma formel affine muni d'un morphisme étale dans

$$\mathfrak{X} = \coprod_{\text{Df. pointes}/\cong} (S_{\{\sigma_\alpha^\mathbb{C}\}}^\wedge / U_n^2) [\zeta_n] \left[\frac{1}{n}\right].$$

On uniformise chacune des pointes $\mathcal{C}_i$. Soit $\bar{U}_1 = \coprod_{\{\sigma_{\alpha_i}\}} \bar{S}_{n_{\sigma_{\alpha_i}}} [\zeta_n][1/n]$; alors $\bar{U}_1^0$ est muni d'un morphisme $f_1^0: \bar{U}_1^0 \rightarrow \mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$, somme disjointe des morphismes $\bar{S}_{n_{\sigma_\alpha}}^0 [\zeta_n][1/n] \rightarrow \mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ définis par les variétés abéliennes $X_{\sigma_\alpha}^0$ sur $\bar{S}_{n_{\sigma_\alpha}}^0 [\zeta_n]$ construites au §4, cf. 4.11. Le morphisme f_1^0 est permis car l'image réciproque de la variété abélienne sur $\bar{S}_{n_{\sigma_\alpha}}^0$ par un morphisme permis $\operatorname{Spec}(K) \rightarrow \bar{S}_{n_{\sigma_\alpha}}^0$ est à mauvaise réduction.

Il résulte du §4 que les morphismes composés $\bar{U}_2^0 \rightrightarrows \bar{U}_1^0 \rightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ sont égaux. Vérifions les conditions (i) et (ii) de 3.5.

Vérification de (i): Soient $g^{(1)0}$ et $g^{(2)0}$ deux éléments de $\text{Hom}(\text{Spec}(K), \bar{U}_1^0)$ tels que $f_1^0 \circ g^{(1)0} = f_1^0 \circ g^{(2)0}$: ceci signifie que les variétés abéliennes à multiplication réelle (et ses structures supplémentaires) $(X^{(1)}, m^{(1)}, \alpha^{(1)})$ et $(X^{(2)}, m^{(2)}, \alpha^{(2)})$ sur $\text{Spec}(K)$, obtenues comme images réciproques par $g^{(1)0}$ et $g^{(2)0}$ de la variété abélienne sur $\bar{U}_1^0$, sont isomorphes avec leurs structures de niveau n . Les morphismes $g^{(j)0}$ s'étendent en morphismes $g^{(j)}: \text{Spec}(V) \rightarrow \bar{U}_1$. Soit $\pi \in V$ uniformisante.

Le morphisme $g^{(j)}$ définit de façon unique:

- une racine n -ième primitive de l'unité $\zeta_n^{(j)}$,
- une $\Gamma(n)$ -pointe (uniformisée) $\mathcal{C}^{(j)}$ et un cône polyédral $\sigma_\alpha^{(j)}$ tel que $g^{(j)}$ se factorise par $\bar{S}_{\sigma_\alpha^{(j)}} \subset \bar{U}_1$,
- un élément $[g^{(j)}] \in \sigma_\alpha^{(j)} \setminus \{0\}$ qui est défini par

$$\text{val}(\text{image dans } V \text{ de } q^m \in R_{\sigma_\alpha^{(j)}}, m \in \check{\sigma}_{\alpha Z}^{(j)}) = \langle m, [g^{(j)}] \rangle,$$

- un homomorphisme de $R_{\sigma_\alpha^{(j)}}$ dans V .

Inversément, ces données définissent le morphisme $g^{(j)}$. La variété abélienne $(X^{(j)}, m^{(j)}, \alpha^{(j)})$ se présente de façon rigide-analytique comme suit (cf. §2):

$$X^{(j)} = P^{(j)} \otimes \mathbb{G}_m / u'^{(j)}(N^{(j)});$$

et l'isomorphisme $\alpha^{(j)}$ entre $\mathcal{P}(X^{(j)}) = \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{(j)-1} \cdot N^{(j)-1}$ et $\mathcal{D}^{-1}$ (préservant les notions de positivité) est l'isomorphisme canonique défini par $\mathcal{C}^{(j)}$; et l'élément dans $M^{(j)*}$ défini en 2.9.5 est $[g^{(j)}]$; et la suite exacte $0 \rightarrow (1/n)P^{(j)}/P^{(j)} \rightarrow X_n^{(j)} \rightarrow (1/n)N^{(j)}/N^{(j)} \rightarrow 0$ est celle défini par ζ_n et 2.9.3; et l'image de q^m dans V est l'élément associé à m par la théorie rigide-analytique (p.ex., à $m = n \otimes r$ est associé $r(u'(n))$). Cela résulte du fait que le 1-motif associé par Raynaud–Tate au résultat de la construction de Mumford est le 1-motif de départ. Du fait que $(X^{(1)}, m^{(1)}, \alpha^{(1)})$ et $(X^{(2)}, m^{(2)}, \alpha^{(2)})$ sont isomorphes avec leurs structures de niveau n on déduit que $\zeta_n^{(1)} = \zeta_n^{(2)}$ et que l'on peut choisir des isomorphismes $P^{(1)} \cong P^{(2)}$ et $N^{(1)} \cong N^{(2)}$, compatibles avec les $\alpha^{(j)}$, tels que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \frac{1}{n} P^{(1)}/P^{(1)} & \longrightarrow & X_n^{(1)} & \longrightarrow & \frac{1}{n} N^{(1)}/N^{(1)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \wr & & \downarrow \wr \\ & & & & (\mathfrak{o}/n\mathfrak{o})^2 & & \\ & & & & \wr & & \\ 0 & \longrightarrow & \frac{1}{n} P^{(2)}/P^{(2)} & \longrightarrow & X_n^{(2)} & \longrightarrow & \frac{1}{n} N^{(2)}/N^{(2)} \longrightarrow 0, \end{array}$$

et que l'isomorphisme induit entre $((1/n)\mathcal{D}^{-1}P^{(1)-1}N^{(1)})^*$ et $((1/n)\mathcal{D}^{-1}P^{(2)-1}N^{(2)})^*$ amène $[g^{(1)}]$ en $[g^{(2)}]$. Il en résulte que les $\Gamma(n)$ -pointes sous-jacentes à $\mathcal{C}^{(1)}$ et $\mathcal{C}^{(2)}$ sont isomorphes; et comme on avait uniformisée chaque pointe, il existe un isomorphisme entre $\mathcal{C}^{(1)}$ et $\mathcal{C}^{(2)}$ qui amène $[g^{(1)}]$ en $[g^{(2)}]$. Pour démontrer (i), on peut alors supposer que $\sigma_\alpha^{(j)}$ soit le cône minimal parmi les σ_α , qui contient $[g^j]$; et alors même que $\sigma_\alpha^{(1)} = \sigma_\alpha^{(2)}$ et $[g^{(1)}] = [g^{(2)}]$. Le fait que les $(X^{(j)}, m^{(j)}, \alpha^{(j)})$ sont isomorphes avec leurs structures de niveau implique maintenant que $g^{(1)} = g^{(2)}$; par suite il existe un morphisme adique $\mathfrak{g}_2: \mathrm{Spf}(V) \rightarrow \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_1 \times_{\mathbb{I}_1} \mathbb{I}_1$ qui définit $g_2: \mathrm{Spec}(V) \rightarrow \bar{U}_2$, tel que les $g^{(j)0}$ soient égaux au composés respectifs $\mathrm{Spec}(K) \xrightarrow{g_2^0} \bar{U}_2^0 \Longrightarrow \bar{U}_1^0$.

Verification de (ii): Il résulte du §2 qu'il revient au même de déformer $X^{(j)}$ à $\mathrm{Spec}(R)$ que de déformer $g^{(j)0}$ à $\mathrm{Spec}(R)$. Le seul point nouveau est de se convaincre que $X^{(j)an} = (P^{(j)}) \otimes (G_m)^{an}/u^{(j)}(N^{(j)})$. Mais il est clair que le tore $P^{(j)} \otimes G_m$ s'envoie par un morphisme rigide-analytique dans $X^{(j)}$ de noyau un sous-groupe discret $N'^{(j)}$ contenant $u'^{(j)}(N^{(j)})$. Pour voir que $N'^{(j)} = u'^{(j)}(N^{(j)})$, on remarque que les fibres sur $\mathrm{Spec}(K)$ de ces schémas en groupes étales sont les mêmes (compatibilité entre les constructions de Mumford et de Raynaud–Tate sur un anneau de valuation discrète).

Applicant le théorème 3.5, on trouve un couple (j, φ) caractérisé par les propriétés dans l'énoncé du théorème 5.1.

REMARQUE: Tenant compte du fait que $S_{n\{\sigma_\alpha\}}^\infty/U_n^2$ est propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, on voit qu'on peut appliquer la remarque 3.28; autrement dit, ce n'est qu'en apparence qu'on utilise le théorème de platisation.

PROPOSITION 5.2: *L'espace algébrique $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ est propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$.*

PREUVE: Cela se vérifiera à l'aide du critère valuatif de propreté. Soient donc V un anneau de valuation discrète complet à corps de fractions K ; comme $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$, il suffit de montrer que tout morphisme $g^0: \mathrm{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ s'étend en un morphisme $g: \mathrm{Spec}(V) \rightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ et on peut supposer que g^0 ne s'étend pas en un morphisme de $\mathrm{Spec}(V)$ dans $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$. Remplaçant K par une extension finie et V par sa normalisation, on peut supposer que la variété abélienne X sur K obtenue par image réciproque de la variété abélienne universelle sur $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ soit à réduction sémi-stable (ce sera en

fait automatique à cause de la structure de niveau n imposée) et déployée. Appliquons la description du §2 de ces variétés abéliennes. Tenant compte de la structure de niveau n sur X (qui place V au-dessus de $\mathbb{Z}[\zeta]$) on trouve une $\Gamma(n)$ -pointe uniformisée $\mathcal{C}$, un élément $[g^0] \in M_{\dagger}^*$ et un polyèdre $\sigma_{\alpha} \in \{\sigma_{\alpha}^{\mathcal{C}}\}$ contenant $[g^0]$, tels que le morphisme $g_1: \text{Spec}(V) \rightarrow \bar{S}_{n_{\sigma_{\alpha}}}[\zeta_n]$ fait commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \xrightarrow{g_1^0} & \bar{S}_{n_{\sigma_{\alpha}}}^0[\zeta_n] \left[\frac{1}{n} \right] \\ \parallel & & \downarrow \\ \text{Spec}(K) & \xrightarrow{g^0} & \mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}} \end{array}$$

Le morphisme composé $g: \text{Spec}(V) \xrightarrow{g_1} \bar{S}_{n_{\sigma_{\alpha}}}[\zeta_n][1/n] \rightarrow \mathcal{M}_{\{\sigma_{\alpha}\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ étend le morphisme g^0 .

COROLLAIRE 5.3: *On peut trouver de décompositions admissibles $\{\sigma_{\alpha}\}$ telles que la compactification $\mathcal{M}_{n_{\{\sigma_{\alpha}\}}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ de $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ correspondante soit lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$.*

Alors le complément de $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ dans $\mathcal{M}_{n_{\{\sigma_{\alpha}\}}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ (muni de sa structure réduite) est un diviseur à croisements normaux relatif sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$.

PREUVE: En effet, choisissons de représentants des classes d'isomorphie de pointes. Pour chacun d'eux on raffine la décomposition $\{\sigma_{\alpha}\}$ de $M_{\dagger, \mathbb{R}}^*$ tel qu'on obtient une immersion de tores nonsingulière correspondante (cf. [16]) (ceci est loisible car il n'y a qu'un nombre fini de σ_{α} modulo l'action de U_n^2). La décomposition admissible obtenue convient. La dernière assertion résulte de [16], Thm. 4, p. 14. c.q.f.d.

PROPOSITION 5.4: *Il existe un seul schéma en groupes sémi-abélien sur $\mathcal{M}_{n_{\{\sigma_{\alpha}\}}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ qui prolonge la variété abélienne universelle sur $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$. Ce schéma en groupes est muni d'une action de $\mathfrak{o}$ et est un tore au-dessus de $\mathcal{M}_{n_{\{\sigma_{\alpha}\}}}^{\mathfrak{D}^{-1}} \setminus \mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$.*

PREUVE: (a) *Unicité:* résulte de [19], XI.1.15.

(b) *Existence:* Soit $s \in \mathcal{M}_{n_{\{\sigma_{\alpha}\}}}^{\mathfrak{D}^{-1}} \setminus \mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$. Soit $\mathcal{C}$ une pointe telle que s est dans l'image par φ de $S_{\{\sigma_{\alpha}^{\mathcal{C}}\}}[\zeta_n][1/n]/U_n^2$; soit $\sigma_{\alpha} \in \{\sigma_{\alpha}^{\mathcal{C}}\}$ tel que s est dans l'image de $\bar{S}_{n_{\sigma_{\alpha}}}[\zeta_n][1/n] \rightarrow \mathcal{M}_{n_{\{\sigma_{\alpha}\}}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$.

Si $Z = \text{Spec}(A)$ est un schéma affine noethérien muni d'un morphisme $f: Z \rightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1}$, on note $C = f^{-1}(\mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1} \setminus \mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1})$ le sous-schéma fermé de Z défini par l'idéal I ; soit $V = Z \setminus C$ et posons, si $\hat{A}$ est la complétion I -adique de A , $\mathfrak{Z} = \text{Spf}(\hat{A})$, $\bar{Z} = \text{Spec}(\hat{A})$ et $\bar{V} = \bar{Z} \setminus C$. De plus, on note X_1 l'image réciproque par $f|_V: V \rightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1}$ de la variété abélienne universelle sur $\mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1}$.

La question d'existence est locale pour la topologie étale autour de $s \in \mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1}$. Par suite, il suffit de montrer que la variété abélienne X_1 sur l'ouvert V d'un schéma affine Z s'étend comme schéma en groupes sémi-abélien à Z tout entier, lorsque le morphisme f est étale et que le morphisme $f|_C: C \rightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1}$ se factorise par $S_{\sigma_a}^\infty[\zeta_n][1/n] \rightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1}$. Mais dans ce cas, d'après les propriétés infinitésimales des morphismes étales, le morphisme complété $\bar{f}: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1}$ se factorise par $S_{\sigma_a}^\wedge[\zeta_n][\frac{1}{n}] \rightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1}$. On obtient donc un morphisme formel $\mathfrak{Z} \rightarrow S_{\sigma_a}^\wedge[\zeta_n]$ donnant lieu à un morphisme $\bar{Z} \rightarrow \bar{S}_{n\sigma_a}[\zeta_n]$ tel que la variété abélienne $X_{1|\bar{V}}$ est l'image inverse de la variété abélienne $X_{\sigma_a}^0$ sur $\bar{S}_{n\sigma_a}^0[\zeta_n] \subset \bar{S}_{\sigma_a}[\zeta_n]$. Soit $\bar{X}$ le $\bar{Z}$ -schéma image réciproque de X_{σ_a} . Alors on a un isomorphisme canonique entre $X_{1|\bar{V}}$ et $\bar{X}_{|\bar{V}}$. Appliquant la Proposition 3.30, on trouve un Z -espace algébrique dont les images réciproques respectives sur V et $\bar{Z}$ sont X_1 et $\bar{X}$.

Appliquant à nouveau la Proposition 3.30, on trouve des morphismes $X \times_Z X \rightarrow X$ et $X \rightarrow X$ qui se restreignent aux morphismes d'addition et de l'inverse de X_1 , resp. $\bar{X}$, au-dessus de V resp. $\bar{Z}$. Comme ces morphismes vérifient au-dessus de $V^\vee$ et $\bar{Z}$ les axiomes qui font de X_1 et $\bar{X}$ des schémas en groupes commutatifs, ils définissent une unique structure de Z -schéma en groupes commutatif sur X compatible avec celle de X_1 et $\bar{X}$.

(c) Par unicité, le schéma en groupes sur $\mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1}$ obtenu est muni d'une action de $\mathfrak{o}$. Le fait qu'il soit sémi-abélien et un tore en dehors de $\mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\otimes -1}$ résulte aussitôt de (b) et des propriétés analogues de X_{σ_a} sur $\bar{S}_{\sigma_a}$. c.q.f.d.

5.5: Pour les amateurs des champs algébriques nous indiquons les modifications à apporter pour étendre le résultat 5.1 aux cas $n = 1$ et $n = 2$.

Soit $\{\sigma_a\}$ une décomposition $\Gamma(n)$ -admissible. Soit $\mathcal{C}$ une $\Gamma(n)$ -pointe. Le groupe U_n agit sur la pointe: l'action (imposée par transport de structure) d'un élément $u \in U_n$ est par u^{-1} sur N et par u sur P . Cette action induit une action de U_n via son quotient U_n^2 (par $u \mapsto u^2$) sur le schéma $S_{n\{\sigma_a\}}$, donc aussi une action de U_n via U_n^2 sur $\coprod_{\{\sigma_a\}} \bar{S}_{n\sigma_a}$. Cette action est reléevée en une action de U_n sur le schéma en groupes sémi-abélien $\coprod X_{\sigma_a}$ au-dessus de $\coprod \bar{S}_{n\sigma_a}$. L'élément $-1 \in U_n$

agit trivialement sur le schéma de base et par l'automorphisme $-Id$ sur le schéma en groupes.

On note $S_{n\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/[U_n]$ le champ classifiant. Choissant un sommand direct U' à $\{\pm 1\}$ dans U_n , c'est aussi $(S_{n\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/U')/[\pm 1]$; la notation $S_{n\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/[U_n] = (S_{n\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/[\pm 1])/U_n^2$ se ramène donc à celle de [4], 4.8: de façon général, si X est un S -schéma muni d'une action d'un groupe fini G on désigne par $X/[G]$ le champ algébrique dont la catégorie des sections sur un S -schéma T est la catégorie des G -torseurs E sur T munis d'un G -morphisme $E \rightarrow X$. Il résulte de ce qui précède qu'on a un schéma en groupes sémi-abélien au-dessus de $\Pi_{\{\sigma_\alpha\}} \bar{S}_{n\sigma_\alpha}/[U_n]$.

On construit une immersion ouverte de $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ dans un champ algébrique $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ dont le complété formel le long sa partie à l'infini est $\Pi_{\Gamma(n)\text{-pointes}} S_{n\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/[U_n]$. L'image inverse sur $\bar{S}_{n\sigma_\alpha}^0$ de la variété abélienne universelle sur $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ est la variété abélienne construite au §4.

Les propositions 5.2 et 5.4 et le corollaire 5.3 se transposent à ces cas.

§6. Applications aux formes modulaires

THEOREME 6.1: *Pour tout nombre premier p , le champ algébrique $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}^{-1}} \otimes \bar{F}_p$ est irréductible.*

PREUVE: Soit $\{\sigma_\alpha\}$ une décomposition admissible. Le champ algébrique $\mathcal{M}_{\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ est propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, à fibre complexe connexe (1.28); il résulte du Main Theorem que $\mathcal{M}_{\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}} \otimes \bar{F}_p$ est connexe. Comme les fibres géométriques de $\mathcal{M}_{\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ sont normales, $\mathcal{M}_{\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}} \otimes \bar{F}_p$ est irréductible. c.q.f.d.

On démontre de même la variante suivante (qui à son tour implique 6.1):

VARIANTE 6.2: *Soit $n \geq 1$. Les fibres géométriques en caractéristique première à n de $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$ sont irréductibles. En particulier, pour p premier à n , $\pi_0(\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}} \otimes \bar{F}_p) \cong \text{Isom}(\mu_n, \mathbb{Z}/n)$, un ensemble de cardinalité $\varphi(n)$.*

On supposera désormais que $g > 1$.

6.3: L'algèbre de Lie de la variété abélienne universelle X au-dessus de $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$ est un $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}}$ -module. Soit ω le $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}}$ -module

inversible suivant:

$$\omega = Nm_{\circ \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{H}}/\mathcal{O}_{\mathcal{H}}}(\mathrm{Lie}(X)^\vee).$$

Si $\{\sigma_\alpha\}$ est une décomposition $\Gamma(n)$ -admissible, le schéma en groupes au-dessus de $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$ (cf. 5.6) définit un prolongement, encore noté ω , de ω à $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathfrak{D}^{-1}}$.

Soit $\mathcal{C}$ une $\Gamma(n)$ -pointe. On déduit de 4.4 une trivialisatation de ω sur $(S_{n\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/U_n^2)[\zeta_n]$:

$$\omega_{(S_{n\{\sigma_\alpha\}}^\wedge/U_n^2)[\zeta_n]} \cong Nm(P^*) \otimes \mathcal{O}.$$

DEFINITION 6.4: *Une forme modulaire entière de niveau n et de poids k est une section globale de $\omega^{\otimes k}$ sur $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$.*

DEFINITION 6.5: *Soit A une $\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n]$ -algèbre. Une forme modulaire de niveau n et de poids k sur A est une section globale de $\omega^{\otimes k}$ sur $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}} \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} A$.*

PROPOSITION 6.6: *Les formes modulaires de niveau n et de poids k sur A forment un A -module de type fini.*

C'est une conséquence de 4.9 et du fait que ω est trivial le long l'infini.

Soit φ une forme modulaire (cf. 6.5). Pour chaque $\Gamma(n)$ -pointe uniformisée $\mathcal{C}$ et chaque décomposition $\Gamma(n)$ -admissible $\{\sigma_\alpha\}$, φ définit, via 6.3 et 4.9, un élément de

$$Nm(P^*)^{\otimes k} \otimes \Gamma((S_{n\{\sigma_\alpha\}}^\wedge \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n]) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n])} \mathrm{Spec}(A))/U_n^2, \mathcal{O}).$$

Via 4.7, on obtient un élément $\varphi_{\mathcal{C}}$ de $Nm(P^*)^{\otimes k} \otimes R_n(\mathcal{C}) \otimes A$.

On appelle $\varphi_{\mathcal{C}}$ le *développement en série de Fourier de φ en $\mathcal{C}$* ; il ne dépend que de la classe d'isomorphie de la $\Gamma(n)$ -pointe uniformisée. Les développements en série de Fourier pour deux uniformisations d'une même $\Gamma(n)$ -pointe, différentes l'une de l'autre par $a \in \mathrm{Hom}((1/n)N/N, (1/n)P/P)$, se déduisent l'un de l'autre par la substitution $q^m \mapsto \zeta_n^{\langle m, a \rangle} \cdot q^m$ (cf. 4.11). Pour pouvoir écrire une série formelle il est préférable de définir le développement en série de Fourier en une $\Gamma(n)$ -pointe *uniformisée*, bien que l'on pourrait à l'exemple du §5 définir un tel développement en une $\Gamma(n)$ -pointe.

Soit φ une forme modulaire de niveau n . Soit $n' = k \cdot n$ un multiple de n . Voici comment récupérer les développements en séries de Fourier de φ en les différentes $\Gamma(n)$ -pointes uniformisées si l'on considère φ comme forme modulaire de niveau n' , n' étant supposé premier aux caractéristiques résiduelles de A . (Ceci nous permet de définir le développement en série de Fourier d'une forme modulaire de niveau 1 ou 2 à partir des niveaux $n \geq 3$ et par suite de nous passer de l'usage de champs algébriques.) La forme modulaire φ de niveau n' définit un élément de

$$\bigoplus_{\Gamma(n')\text{-pointes } \mathcal{C}' \text{ unif.}/\simeq} Nm(P^*)^{\otimes k} \otimes R_n(\mathcal{C}') \otimes A \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} \mathbb{Z}[\zeta_n] \left[\frac{1}{n'} \right].$$

Comme le développement en série de Fourier est défini de façon canonique, que φ est défini sur A et que n' est premier aux caractéristiques résiduelles de A , cet élément est en réalité dans

$$\bigoplus_{\Gamma(n')\text{-pointes } \mathcal{C}' \text{ unif.}/\simeq} Nm(P^*)^{\otimes k} \otimes R_n(\mathcal{C}') \otimes A.$$

Soit $\mathcal{C}$ une $\Gamma(n)$ -pointe uniformisée. Les $\Gamma(n')$ -pointes uniformisées $\mathcal{C}'$ au-dessus de $\mathcal{C}$ sont permutées entre elles par les éléments de $\ker(SL((\mathfrak{o}/n'\mathfrak{o})^2) \rightarrow SL((\mathfrak{o}/n\mathfrak{o})^2))$ et $R_n(\mathcal{C})$ est l'anneau des invariants sous ce groupe dans $\bigoplus_{\mathcal{C}'/\simeq} R_n(\mathcal{C}')$. Comme φ est de niveau n , les développements en les pointes uniformisées $\mathcal{C}'$ sont tous les mêmes; ils viennent donc d'un même élément de $Nm(P^*)^{\otimes k} \otimes R_n(\mathcal{C}) \otimes A$.

THEOREME 6.7: (' q -expansion-principe'): Soit φ une forme modulaire de niveau n et de poids k à coefficients dans la $\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n]$ -algèbre A .

- (i) Si le développement $\varphi_{\mathcal{C}}$ en une pointe $\mathcal{C}$ est nul, alors φ est nul.
- (ii) Si B est une sous- $\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n]$ -algèbre de A et que $\varphi_{\mathcal{C}}$ est dans $Nm(P^*)^{\otimes k} \otimes [B[[\dots q^m \dots]]]_{m \in n^{-1}\mathbb{Z}^{-1}P^{-1}N_+ \cup \{0\}}^{U_n^2}$, alors φ est à coefficients dans B (provient par extension des scalaires d'une forme sur B).

PREUVE: Si A est un $\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n]$ -module, on définit une forme modulaire de niveau n et poids k à coefficients dans A comme étant une section globale de $A \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} \omega^{\otimes k}$ sur $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}}$. On définit comme plus haut le développement en série de Fourier $\varphi_{\mathcal{C}}$ de φ , qui est un élément de $A \otimes R_n(\mathcal{C})$. On prouvera (i) et (ii) en supposant seulement que A et B soient des modules.

(i) Si A est une limite inductive $\varinjlim A_i$, on a

$$\Gamma(\mathcal{M}_n^{\otimes^{-1}}, A \otimes_{Z[\zeta_n]} \omega^{\otimes k}) = \varinjlim \Gamma(\mathcal{M}_n^{\otimes^{-1}}, A_i \otimes_{Z[\zeta_n]} \omega^{\otimes k}).$$

Il suffit donc de traiter le cas où A est un $Z[\zeta_n][1/n]$ -module de type fini. Si les $\varphi_{\mathcal{C}}$ sont nuls, φ s'annule sur le complété formel de $\mathcal{M}_n^{\otimes^{-1}}_{\{\sigma_\alpha\}}$ le long de l'infini (pour un $\{\sigma_\alpha\}$). Le support de φ est donc disjoint d'au moins un point de chaque composante irréductible de chaque fibre géométrique de $\mathcal{M}_n^{\otimes^{-1}}_{\{\sigma_\alpha\}}$ sur $Z[\zeta_n][1/n]$. D'autre part, ces fibres sont de Cohen–Macaulay, et $A \otimes_{Z[\zeta_n]} \omega^{\otimes k}$ est, localement, l'image réciproque d'un module sur $Z[\zeta_n][1/n]$: c'est une contradiction si $\varphi \neq 0$.

(ii) On le déduit du diagramme suivant à lignes exactes (la 2^{ème} l'étant car $R_n(\mathcal{C})$ est plat sur $Z[\zeta_n]$):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}_n^{\otimes^{-1}}, B \otimes \omega^{\otimes k}) & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{M}_n^{\otimes^{-1}}, A \otimes \omega^{\otimes k}) & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{M}_n^{\otimes^{-1}}, (A/B) \otimes \omega^{\otimes k}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow \bigoplus_{\mathcal{C} \bmod \Gamma(n)} B \otimes R_n(\mathcal{C}) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathcal{C} \bmod \Gamma(n)} A \otimes R_n(\mathcal{C}) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathcal{C} \bmod \Gamma(n)} (A/B) \otimes R_n(\mathcal{C}) \end{array}$$

c.q.f.d.

VARIANTE 6.8 (P. Deligne): Soit F' un corps de nombres d'anneau des entiers $\mathfrak{o}'$. On suppose donné un homomorphisme de groupes algébriques sur F'

$$k: R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})} \mathrm{Spec}(F') \longrightarrow \mathbb{G}_m \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})} \mathrm{Spec}(F').$$

D'après la formule d'adjonction, il revient au même de se donner un homomorphisme de groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$

$$R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow R_{F'/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m).$$

Sur les points rationnels k définit un homomorphisme $F^X \rightarrow F'^X$.

Alors k s'étend en un homomorphisme de groupes algébriques sur $\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}')$:

$$R_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}(\mathbb{G}_m) \times_{\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}')} \longrightarrow \mathbb{G}_m \times_{\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}')}.$$

Le schéma en groupes à gauche associe à un $\mathfrak{o}'$ -schéma S le groupe $\Gamma(S, \mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S)^X$.

Soient S un $\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}')$ -schéma et X une variété abélienne à multiplication réelle sur S . Alors $\mathrm{Lie}(X)^\vee$ est un tore sous $(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S)^X$;

l'homomorphisme k en fait un $\mathcal{O}_S^X$ -torseur, i.e., un fibré inversible. Il sera noté $\omega(k)$.

EXEMPLES 6.9: (a) Si $F = \mathbb{Q}$ et si k est la k -ième puissance de la norme, $\omega(k) = \omega^{\otimes k}$, et on est réduit au cas déjà considéré.

(b) Si F' contient la clôture galoisienne de F , et que $\sigma_i: F \rightarrow F'$ désignent les plongements de F dans F' , k est de la forme $k = \prod_i \sigma_i^{k_i}$. Si $\omega_i = \omega(\sigma_i)$, on a $\omega(k) = \bigotimes \omega_i^{\otimes k_i}$. Notons que $\omega_i = \text{Lie}(X)^\vee \bigotimes_{\mathfrak{o} \otimes \sigma_{ST\sigma_i}} \mathcal{O}_S$.

Soit X la variété abélienne universelle sur $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}} \times \text{Spec}(\mathfrak{o}')$. On note par la même lettre l'extension canonique de $\omega(k)$ à une compactification $\mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\mathfrak{D}^{-1}} \times \text{Spec}(\mathfrak{o}')$ définie par le prolongement sémi-abélien de X .

DEFINITION 6.10: Soit k . Soit A une $\mathfrak{o}'[\zeta_n][1/n]$ -algèbre noethérienne. Une forme modulaire de niveau n et de poids k sur A est une section globale de $\omega(k)$ sur $\mathcal{M}_{n\{\sigma_a\}}^{\mathfrak{D}^{-1}} \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n])} \text{Spec}(A)$.

Pour chaque $\Gamma(n)$ -pointe $\mathcal{C}$, et une décomposition $\Gamma(n)$ -admissible $\{\sigma_a\}$, on a une trivialisatıon du complété de $\omega(k)$ lelong $S_{n\{\sigma_a\}}^\wedge \times \mathfrak{o}'[\zeta_n]$:

$$\begin{aligned} \omega(k)|_{S_{n\{\sigma_a\}}^\wedge \times \mathfrak{o}'[\zeta_n]} &\simeq k(P^* \otimes \mathcal{O}_{S_{n\{\sigma_a\}}^\wedge \times \mathfrak{o}'[\zeta_n]}) \\ &= k(P^*) \otimes_{\mathfrak{o}'} k(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S_{n\{\sigma_a\}}^\wedge \times \mathfrak{o}'[\zeta_n]}). \end{aligned}$$

Notons, pour une $\mathfrak{o}'[1/n]$ -algèbre noethérienne A ,

$$\begin{aligned} R_n(\mathcal{C})^{(k)}(A) = \Big\{ \sum_{m \in (1/n)\mathfrak{D}^{-1}P^1N_+ \cup \{0\}} a_m \cdot q^m \mid a_m \in A \text{ avec } a_{u \cdot m} = k(u) \cdot a_m \\ \forall u \in U_n^2 \Big\}. \end{aligned}$$

Alors $k(\Gamma(S_{n\{\sigma_a\}}^\wedge \times \text{Spec}(A)/U_n^2, \mathcal{O})) = R_n(\mathcal{C})^{(k)}(A)$. L'argument de 4.9 montre qu'une section de $k(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}_n^{\mathfrak{D}^{-1}} \times \text{Spec}(\mathfrak{o}')} \times \text{Spec}(\mathfrak{o}'))$ s'étend automatiquement à l'infini.

Soit φ une forme modulaire (cf. 6.10). Pour chaque $\Gamma(n)$ -pointe $\mathcal{C}$ uniformisée φ définit un élément $\varphi_{\mathcal{C}}$ de $k(P^*) \otimes_{\mathfrak{o}'} k(\Gamma(S_{n\{\sigma_a\}}^\wedge \times \text{Spec}(A)/U_n^2, \mathcal{O}))$. L'argument de 4.7 montre que $\varphi_{\mathcal{C}}$ est dans le produit de $k(P^*)$ et de la sous- A -algèbre de $R_n(\mathcal{C})^{(k)}(A)$ des éléments dont les coefficients en q engendrent un $\mathbb{Z}$ -module de type fini. Mais, contrairement à ce qui se passe dans l'exemple trivial (a) de 6.9, $\varphi_{\mathcal{C}}$ ne sera pas nécessairement dans $k(P^*) \otimes_{\mathfrak{o}'} A \otimes_{\mathfrak{o}'} R_n(\mathcal{C})^{(k)}(\mathfrak{o}'[1/n])$, comme l'implique la proposition 6.11 ci-dessous.

Les formes modulaires de niveau et de poids donnés forment un A -module de type fini.

Avec les notations du §4 on peut définir

$$R^{U'}(M)^{(k)} = \left\{ \sum_{m \in M_+ \cup \{0\}} a_m q^m \mid a_m \in A \text{ avec } a_{u \cdot m} = k(u) a_m \forall u \in U' \right\}.$$

PROPOSITION 6.11: Soit $f \in R^{U'}(M)^{(k)}(A)$. Si le terme constant a_0 n'est pas nul, $k(u) - 1$ est un diviseur de zéro dans A pour tout $u \in U'$.

En particulier, si A est de caractéristique 0, k vient par changement de base $\mathbb{Q} \rightarrow F'$ d'une puissance de la norme.

PREUVE: On a $a_0 = k(u)a_0$, $\forall u \in U'$. La dernière assertion vient du fait que si $k(u) = 1$, $\forall u \in U'$, alors k viendrait par changement de base $\mathbb{Q} \rightarrow F'$ d'un homomorphisme $R_{F/\mathbb{Q}}(G_m) \rightarrow G_m$, qui doit être une puissance de la norme.

On laisse au lecteur la formulation du 'q-expansion principle' correspondant (cf. 6.7 dont la démonstration s'adapte facilement).

Comparaison avec la théorie classique

Classiquement, une forme modulaire (de Hilbert–Blumenthal) de poids k et de niveau n est une fonction holomorphe f sur $\mathcal{H}^g$ ($\mathcal{H}$ = demi-plan supérieur) vérifiant la condition suivante:

Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n \cap SL(2, \mathfrak{o})$, i.e. est congru à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n\mathfrak{o}}$,

$$(*) \quad f(z) = (cz + d)^{-k} \cdot f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right), \quad \text{i.e.,}$$

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_g) &= [(c_1 z_1 + d_1) \dots (c_g z_g + d_g)]^{-k} \\ &\quad \times f\left(\frac{a_1 z_1 + d_1}{c_1 z_1 + d_1}, \dots, \frac{a_g z_g + d_g}{c_g z_g + d_g}\right) \end{aligned}$$

(où $a_i, b_i \dots$ désignent les images de $a, b, \dots$ sous les injections de F dans $\mathbb{R}$).

Une telle fonction est périodique de période n , i.e.,

$$f(z + c) = f(z), \quad c \in n \cdot \mathfrak{o},$$

de sorte qu'elle admet un développement en série de Fourier

$$f(z) = \sum_{m \in (1/n) \cdot \mathfrak{o}^{-1}} c_m \cdot e^{2\pi i m \cdot z}$$

(où $e^{2\pi i z} = (e^{2\pi i z_1}, \dots, e^{2\pi i z_g})$).

LEMME 6.12: *Les formes modulaires de poids k et de niveau n s'identifient aux sections de*

$$H^0(\mathcal{M}_n \otimes_{Z[\mathfrak{z}_n]} \mathbb{C}, \omega^{\otimes k}) = H^0(\mathcal{M}_n, \omega^{\otimes k}) \otimes_{Z[\mathfrak{z}_n]} \mathbb{C}.$$

PREUVE: Supposons d'abord que $n \geq 3$ auquel cas $\mathcal{M}_n$ est un schéma. L'espace analytique sous-jacent à $\mathcal{M}_n \otimes_{Z[\mathfrak{z}_n]} \mathbb{C}$ est $\mathcal{H}^g/\Gamma_n \cap SL(2, \mathfrak{o})$ (cf. §1). Il serait en fait plus canonique de laisser parcourir l'indice $i = 1, \dots, g$ l'ensemble P des plongements de F dans $\mathbb{R}$; au-dessus de $z \in \mathcal{H}^P$ est la variété abélienne $X_z = \mathfrak{o} \otimes \mathbb{C}/\mathfrak{o} \cdot 1 + \mathfrak{o} \cdot z$; comme l'algèbre de Lie de X_z est égale à $\mathfrak{o} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^P$, les sections analytiques de $\omega^{\otimes k}$ sur $\mathcal{M}_n \otimes_{Z[\mathfrak{z}_n]} \mathbb{C} = \mathcal{H}^P/\Gamma_n \cap SL(2, \mathfrak{o})$ s'identifient aux fonctions sur $\mathcal{H}^P$, holomorphes et vérifiantes (*).

Soit $\{\sigma_\alpha\}$ une décomposition Γ_n -admissible. Soit

$$\pi: (\mathcal{H}^g/\Gamma_n \cap SL(2, \mathfrak{o}))_{\{\sigma_\alpha\}} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}^g/\Gamma_n \cap SL(2, \mathfrak{o})}$$

le morphisme canonique de $(\mathcal{M}_n \otimes_{Z[\mathfrak{z}_n]} \mathbb{C})_{\{\sigma_\alpha\}}$ dans la compactification de Satake

$$j: \mathcal{H}^g/\Gamma_n \cap SL(2, \mathfrak{o}) \subset \overline{\mathcal{H}^g/\Gamma_n \cap SL(2, \mathfrak{o})}.$$

Alors $j_*(\omega)$ est un faisceau algébrique cohérent sur $\overline{\mathcal{H}^g/\Gamma_n \cap SL(2, \mathfrak{o})}$ et f en est une section globale. Il en résulte que f est une section méromorphe de l'extension canonique, ω , de ω sur $(\mathcal{H}^g/\Gamma_n \cap SL(2, \mathfrak{o}))_{\{\sigma_\alpha\}}$. L'argument de 4.9 montre alors que f est holomorphe à l'infini. Par GAGA, f est une section globale algébrique de ω sur $(\mathcal{H}^g/\Gamma_n \cap SL(2, \mathfrak{o}))_{\{\sigma_\alpha\}}$; par suite f est une forme modulaire au sens de 6.5.

On ramène le cas où n est quelconque au précédent en passant aux invariants par (Γ_{3n}/Γ_n) dans l'espace des formes modulaires de niveau $3n$. c.q.f.d.

6.13: Soit $\mathcal{C}$ une $\Gamma(n)$ -pointe. Une construction identique à celle du §4 fournit un espace analytique $X_{\{\sigma_\alpha\}}$ sur un voisinage ouvert (pour la topologie usuelle), invariant sous l'action de U_n^2 , de l'infini de $S_{n\{\sigma_\alpha\}}$. La fibre en le point $s \in S$ est la variété abélienne

$$P \otimes \mathbb{C}^\times / u_s(N) \cong P \otimes \mathbb{C}/P + \frac{\log u'_s(N)}{2\pi i}.$$

Les constructions du §4 et celle qui précède sont compatibles au

sens suivant. On dispose d'un système cohérent d'isomorphismes d'espaces analytiques

$$\begin{aligned} & (X_{\sigma_a}, \text{analytique, restreint à un voisinage infinitésimal} \\ & \quad \text{de l'infini de } S_{n_{\{\sigma_a\}}}) \cong \\ & (X_{\sigma_a}, \text{algébrique, restreint à un voisinage infinitésimal} \\ & \quad \text{de l'infini de } S_{n_{\{\sigma_a\}}})^{an}. \end{aligned}$$

Ces isomorphismes respectent les structures supplémentaires sur les deux membres telles que $\mathfrak{o}$ -action, trivialisations du module des polarisations et structures de niveau.

6.14: Soit $n \geq 3$. L'espace analytique $(\mathcal{M}_n \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} \mathbb{C})^{an}$ classe les variétés abéliennes à multiplications réelles sur des espaces analytiques S plus une trivialisations du module des polarisations et munies d'une structure de niveau n de déterminant 1. De ce point de vue, une forme modulaire est une loi qui à un tel objet associe une section de $\omega^{\otimes k}$ sur S . Le développement en série de Fourier s'obtient alors en évaluant la forme sur le voisinage ouvert de l'infini (moins l'infini) de $S_{n_{\{\sigma_a\}}}$ (et en multipliant le résultat par une puissance de $2\pi i$ dépendant des normalisations choisies), pour une $\Gamma(n)$ -pointe uniformisée convenable ($H = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}$). On montre, comme en 4.9, qu'on obtient ainsi une fonction holomorphe sur le voisinage ouvert de l'infini de $S_{n_{\{\sigma_a\}}}$, y compris l'infini. Pour une forme modulaire sur $\mathbb{C}$ la compatibilité 6.13 montre que ce développement coïncide avec celui défini après 6.6.

En particulier, on a vu que les coefficients c_m non-nuls dans le développement de f , écrit avant 6.12, vérifient: $m \in (1/n)\mathcal{D}^{-1}$ est totalement positif ou zéro.

6.15: On interprète de même une forme modulaire de niveau n et de poids $(k_1, \dots, k_g)$ sur $\mathbb{C}$ (cf. 6.9(b)) comme fonction complexe holomorphe f sur $(\mathcal{H}^g)_{\pm}$ vérifiante:

$$\text{Si } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n,$$

$$f(z) = (c_1 z_1 + d_1)^{-2k_1} \dots (c_g z_g + d_g)^{-2k_g} \cdot f \left(\frac{az + b}{cz + d} \right).$$

On vérifie que le développement en série de Fourier

$$f(z) = \sum_{m \in (1/n)\mathcal{D}^{-1}} c_m \cdot q^m$$

coincide avec celui défini de façon purement algébrique en 6.10 en une $\Gamma(n)$ -pointe $\mathcal{C}$ convenable. Les m tels que $c_m \neq 0$ sont totalement positifs.

6.16: Soit $f \geq 1$ un entier. On appelle une $\Gamma_{00}(f)$ -structure sur une variété abélienne à multiplication réelle (X, m) la donnée d'une immersion fermée $\mathfrak{o}$ -linéaire de schémas en groupes finis

$$(\mathfrak{o}/f \cdot \mathfrak{o})(1) \longrightarrow X_f.$$

Si X est au-dessus du spectre d'un corps de caractéristique $p > 0$ non-première à f , une telle structure ne peut exister que lorsque X est une variété abélienne ordinaire.

Le champ $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f)}^L$ qui à un schéma S associe la catégorie des objets (X, m, α) de $\mathcal{M}^L(S)$ munis d'une $\Gamma_{00}(f)$ -structure est un champ algébrique.

LEMME 6.17: *Le morphisme 'oublie'*

$$\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f)}^L \longrightarrow \mathcal{M}^L$$

est étale.

C'est une conséquence de la rigidité de schémas en groupes de type multiplicatif (SGA 3, IX).

Soit $n \geq 1$ premier à f . On définit de même les champs algébriques $\mathcal{M}_{n, \Gamma_{00}(f)}^{\mathfrak{Q}^{-1}}$, qui se trouvent au-dessus de $\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n]$.

Une $\Gamma_{00}(f)$ -pointe est une pointe (cf. §4) munie d'un isomorphisme $f^{-1}P/P \cong \mathfrak{o}/f\mathfrak{o}$. Une décomposition $\Gamma_{00}(f)$ -admissible $\{\sigma_\alpha\}$ est la donnée, pour chaque $\Gamma_{00}(f)$ -pointe, d'une décomposition $\{\sigma_\alpha\}$ de $M_{\mathbb{R}}^* \cup \{0\}$ invariante sous l'action de U^2 et qui modulo cette action ne consiste que d'un nombre fini de cônes polyédraux σ_α , telle que si $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'$ est un isomorphisme de $\Gamma_{00}(f)$ -pointes, l'isomorphisme induit entre M^* et M'^* transforme $\{\sigma_\alpha\}$ en $\{\sigma'_\alpha\}$.

La construction du §4 fournit, pour chaque σ_α , un schéma en groupes sémi-abélien X_{σ_α} sur $\tilde{S}_{\sigma_\alpha}$ (S , comme toujours, est le tore sur $\mathbb{Z}$ à groupe de caractères M), qui au-dessus de $\tilde{S}_{\sigma_\alpha}^0$ définit un objet de $\mathcal{M}^{\mathfrak{Q}^{-1}}$ et qui au-dessus de $S_{\sigma_\alpha}^\infty$ est le tore à groupe de caractères P^* . L'injection de schémas en groupes finis munis d'action de $\mathfrak{o}$ sur $\tilde{S}_{\sigma_\alpha}$, $(f^{-1}P/P)(1) \rightarrow (X_{\sigma_\alpha})_f$, définit, via l'isomorphisme $f^{-1}P/P \cong \mathfrak{o}/f \cdot \mathfrak{o}$, une $\Gamma_{00}(f)$ -structure sur $X_{\sigma_\alpha}^0$. On démontre comme au §5:

THEOREME 6.18: Soit $\{\sigma_\alpha\}$ une décomposition $\Gamma_{00}(f)$ -admissible. Soit $f \geq 3$. Il existe une immersion ouverte $j: \mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f)}^{\mathcal{Q}^{-1}} \subset \mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1}}$ et un isomorphisme

$$\varphi: \coprod_{\Gamma_{00}(f)\text{-pointes}/\cong} (S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge / U_f^2) \longrightarrow \mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1}}$$

tels que pour toute $\Gamma_{00}(f)$ -pointe $\mathcal{C}$ et tout $\sigma_\alpha \in \{\sigma_\alpha\}$ l'image réciproque de la variété abélienne universelle munie de ses structures additionnelles sur $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1}}$ déduit, via le lemme 3.1, du morphisme formel $S_{\sigma_\alpha}^\wedge \rightarrow \mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1} \wedge}$ (construit à l'aide de φ) soit la variété abélienne munie de ses structures additionnelles sur $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0$ construite ci-dessus.

Le paire (j, φ) est unique à isomorphisme unique près.

Si $f \leq 2$, on peut montrer qu'il existe une immersion ouverte de $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f)}^{\mathcal{Q}^{-1}}$ dans un champ algébrique $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1}}$ dont le complété le long so partie à l'infini est $\coprod_{\Gamma_{00}(f)\text{-pointes}/\cong} S_{\{\sigma_\alpha\}}^\wedge / [U_f]$ (cf. 5.5).

REMARQUE 6.19: Pour $f \geq 2$, $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1}}$ n'est pas propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Pourtant, $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1}} \setminus \mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f)}^{\mathcal{Q}^{-1}}$ est propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.

VARIANTE 6.20: Les notions de $\Gamma_{00}(f) \cap \Gamma(n)$ -pointe et de $\Gamma_{00}(f) \cap \Gamma(n)$ -décomposition $\{\sigma_\alpha\}$ sont évidentes. On construit de même une immersion ouverte $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), n}^{\mathcal{Q}^{-1}} \subset \mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), n, \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1}}$.

REMARQUE 6.21: Comme au §5, on démontre l'existence d'un unique schéma en groupes sémi-abélien X au-dessus de $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1}}$ qui prolonge la variété abélienne universelle sur $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f)}^{\mathcal{Q}^{-1}}$. On montre que X est muni d'une action de $\mathfrak{o}$ et d'une injection de schémas en groupes finis à $\mathfrak{o}$ -action

$$(\mathfrak{o}/f\mathfrak{o})(1) \hookrightarrow X_f.$$

Le groupe X est un tore au-dessus de $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1}} \setminus \mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f)}^{\mathcal{Q}^{-1}}$.

REMARQUE 6.22: On peut trouver des décompositions $\Gamma_{00}(f) \cap \Gamma(n)$ -admissibles $\{\sigma_\alpha\}$ telles que $\mathcal{M}_{\Gamma_{00}(f), n, \{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}^{-1}}$ soit lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n][1/n])$ d'infini un diviseur à croisements normaux relatif.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN: Algebraization of Formal Moduli, I, in *A Collection of Mathematical Papers in Honor of K. Kodaira*, University of Tokyo Press, 1969.
- [2] M. ARTIN: Algebraization of Formal Moduli, II. *Ann. of Math.*, 91 (1) (1970) 88.

- [3] M. ARTIN: Construction Techniques for Algebraic Spaces. *Actes du Congrès Intern. Math.*, 1970, Tome 1, 479.
- [4] P. DELIGNE et D. MUMFORD, The Irreducibility of the Space of Curves of Given Genus. *Publ. Math. IHES*, 36 (1969).
- [5] P. DELIGNE: Theorie de Hodge III. *Publ. Math. IHES*, 44 (1975).
- [6] P. DELIGNE et M. RAPOPORT: Les Schémas de Modules de Courbes Elliptiques, in *Proceedings of International Summer School on Modular Functions*, Springer Lecture Notes, 349.
- [7] H. GRAUERT et L. GERRITZEN: Die Azyklizität der affinoiden Überdeckungen, in *Global Analysis. Papers in Honor of K. Kodaira*, University of Tokyo Press, 1969.
- [8] A. GROTHENDIECK: Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux. *Actes du Congrès Intern. Math.*, 1970, Tome 1, 431.
- [9] H. HIRONAKA: Flattening of complex-analytic maps (à paraître).
- [10] H. HIRONAKA, M. LEJEUNE-JALABERT et B. TEISSIER: Platificateur local en Géométrie analytique et aplatissement local, dans *Singularités à Cargèse*, Astérisque 7 et 8, 1973, 441.
- [11] D. KNUXTON: Algebraic Spaces. *Springer Lecture Notes*, 203.
- [12] W. MESSING: The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups: with Applications to Abelian Schemes. *Springer Lecture Notes*, 264.
- [13] D. MUMFORD: Picard Groups of Moduli Problems, in *Arithmetical Algebraic Geometry*. Harper and Row, 1965, 33.
- [14] D. MUMFORD: *Abelian Varieties*. Oxford University Press, 1970.
- [15] D. MUMFORD: An Algebraic Construction of Degenerating Abelian Varieties over a Complete Ring. *Comp. Math.*, 24 (3) (1972) 239.
- [16] D. MUMFORD, G. KEMPF, F. KNUDSEN et B. SAINT-DONAT: Toroidal Embeddings, I. *Springer Lecture Notes*, 339.
- [17] D. MUMFORD, A. ASH, M. RAPOPORT et Y. TAI: *Nonsingular compactifications of locally symmetric varieties*. Math. Sci. Press, 1975.
- [18] D. MUMFORD: *Geometric Invariant Theory*. Springer, Berlin, 1965.
- [19] M. RAYNAUD: Faisceaux Amples sur les Schémas en Groupes et les Espaces Homogènes. *Springer Lecture Notes*, 119.
- [20] M. RAYNAUD: *Géométrie rigide-analytique*. Table ronde d'analyse non archimédienne, Paris, 1972, Mémoire 39–40 de la Soc. Math. de France.
- [21] M. RAYNAUD: Variétés abéliennes et géométrie rigide. *Actes du Congrès Intern. Math.*, 1970, Tome 1, 473.
- [22] M. RAYNAUD et L. GRUSON: Critères de platitude et de projectivité. *Inv. Math.*, 13 (1971) 1.
- [23] M. SCHLESSINGER: Functors of Artin Rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 130 (1968) 205.
- [24] J. TATE: Rigid-Analytic Spaces. *Inv. Math.*, 12 (1971) 257.
- [25] I. SATAKE: On the Arithmetic of Tube Domains. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973) 1076.
- [26] F. HIRZEBRUCH: Hilbert Modular Surfaces. *Monographie 21 de L'Enseignement Mathématique* (1973).

(Oblatum 27–IX–1976)

Sektion Mathematik der
Humboldt-Universität zu Berlin
1086 Berlin
Unter den Linden 6
D.D.R.