

COMPOSITIO MATHEMATICA

L. GERRITZEN

Zerlegungen der Picard-Gruppe nichtarchimedischer Holomorpher Räume

Compositio Mathematica, tome 35, n° 1 (1977), p. 23-38

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1977__35_1_23_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ZERLEGUNGEN DER PICARD-GRUPPE NICHTARCHIMEDISCHER HOLOMORPHER RÄUME

L. Gerritzen

Ist X ein holomorpher Raum über einem nichtarchimedischen vollständigen Grundkörper k und E der eindimensionale Einheitskreis sowie L der Rand von E , so gelten für die Picard-Gruppen der invertierbaren Garben auf X , $X \times E$ und $X \times L$ die folgenden Zerlegungen:

$$\text{Pic } X \times E = \text{Pic } X \oplus P(X)$$

$$\text{Pic } X \times L = \text{Pic } X \oplus P_1(X) \oplus P_{-1}(X) \oplus H^1(X, \mathbb{Z}_X).$$

Dabei ist $P(X) \approx P_1(X) \approx P_{-1}(X)$ und $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ ist die erste Kohomologiegruppe auf X mit Werten in der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ bezüglich der holomorphen Topologie auf X .

Die Gruppe $P(X)$ wird in §3.1 genauer angegeben. Man kann zeigen, daß sie trivial oder nicht endlich erzeugbar ist, falls $\text{char } k = 0$ ist, siehe §3.3.

Die angegebene Zerlegung gestattet in manchen Fällen die Bestimmung der Gruppe $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$. Dies ist insofern interessant, als es bislang – abgesehen von einigen eindimensionalen Fällen – keine elementare Methode zur Berechnung von $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ gibt. In §4 wird gezeigt, daß für eine Klasse affinoider Räume X , deren affines Modell $\tilde{X}$ nichtsingulär ist, bereits $H^1(X, \mathbb{Z}_X) = 0$ ist.

Die obige Darstellung erinnert an eine von Bass und Murthy angegebene Zerlegung von $\text{Pic } A[t]$ und $\text{Pic } A[t, t^{-1}]$, wenn A eindimensionaler Ring ist. Mit Hilfe des Übergangs zur affinen Reduktion wird in §4 an Hand von zwei Beispielen gezeigt, daß sich unter geeigneten Voraussetzungen diese beiden Zerlegungen entsprechen. Man gewinnt damit eindimensionale reguläre, affinoide Räume X mit $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \neq 0$ bzw. $P(X) \neq 0$.

1. Triviale Teilbereiche für invertierbare Garben

1. Im folgenden sei stets k ein nichttrivial, nichtarchimedisch vollständig bewerteter Körper. Mit k_a sei ein algebraischer Abschluß von k bezeichnet, und mit $|k^*|$ bzw. $|k_a^*|$ deren Wertgruppen.

Wir benützen den Begriff des holomorphen Raumes über k , wie er in [4] eingeführt wurde. Die holomorphe Struktur auf einem holomorphen Raum X wird durch die Garbe $\mathcal{H}_X$ der holomorphen Funktionen gegeben. $\mathcal{H}_X$ ist eine Garbe bezüglich der holomorphen Topologie von X ; wir nennen $\mathcal{H}_X$ die Strukturgarbe von X . Allgemeiner ist der Begriff der Garbe im folgenden stets in Bezug auf die holomorphe Topologie zu verstehen, siehe [3].

Eine kohärente $\mathcal{H}_X$ – Modulgarbe $\mathcal{L}$ auf X , siehe [3], heißt invertierbar, wenn es eine holomorphe Überdeckung $\mathfrak{U} = (X_i)$ von X gibt, derart daß die Beschränkungen $\mathcal{L}|_{X_i}$ als $\mathcal{H}_{X_i}$ – Modulgarben isomorph zu $\mathcal{H}_{X_i}$ sind. $\mathcal{L}$ heißt dann trivial bezüglich der Überdeckung $\mathfrak{U}$.

Ist $\mathfrak{U}$ eine holomorphe Überdeckung eines holomorphen Raumes X und $\mathcal{F}$ eine beliebige Garbe über X im Sinne der holomorphen Topologie von X , so lassen sich in bekannter Weise die Čechsche Kohomologiegruppen $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ und $H^p(X, \mathcal{F})$ definieren. Zu jedem holomorphen Raum X bezeichnet man mit $\mathcal{H}_X^*$ die Garbe der nicht verschwindenden Funktionenkeime.

Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und $\mathfrak{U} = (X_i)$ eine holomorphe Überdeckung von X , bezüglich der $\mathcal{L}$ trivial ist. In bekannter Weise bestimmt man dazu eine Kohomologieklassse $\eta \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_X^*)$. Sind $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ zwei invertierbare Garben über X , so entspricht das über $\mathcal{H}_X$ genommene Tensorprodukt $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ dem Produkt der zu $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ gehörenden Kohomologieklassen in $H^1(X, \mathcal{H}_X^*)$.

Auf diese Weise bilden die invertierbaren Garben auf X eine Gruppe, die man als Picard-Gruppe $\text{Pic } X$ von X bezeichnet. Es ist $\text{Pic } X = H^1(X, \mathcal{H}_X^*)$.

2. Ist R ein kommutativer Ring mit Eins, so bilden die invertierbaren R -Moduln zusammen mit dem Tensorprodukt über R als Verknüpfung eine Gruppe, die man als Picard-Gruppe $\text{Pic } R$ von R bezeichnet.

Ist X ein affinoider Raum, $\mathcal{L}$ eine kohärente Garbe auf X und $A = \Gamma(X, \mathcal{H}_X)$ die Algebra der affinoiden Funktionen auf X sowie $M = \Gamma(X, \mathcal{L})$, so ist M ein endlicher A -Modul und es ist $\mathcal{L}$ invertierbar genau dann, wenn M ein invertierbarer A -Modul ist. Da jeder invertierbare A -Modul eine invertierbare Garbe auf X induziert, ist damit eine kanonische Isomorphie zwischen $\text{Pic } A$ und $\text{Pic } X$ angegeben.

Ein Punkt $x \in X$ eines holomorphen Raumes X heißt regulär, wenn

der Halm $\mathcal{H}_x^*$ ein regulärer lokaler Ring ist. Sind sämtliche Punkte eines holomorphen Raumes X regulär, so heißt X regulär. Ein Punkt x eines affinoiden Raumes ist genau dann ein regulärer Punkt, wenn die algebraische Lokalisierung der Strukturalgebra A von X regulär ist, wobei $\mathfrak{m}$ das zu x gehörende maximale Ideal in A bezeichnet.

Die Menge der nichtregulären Punkte von X bildet einen affinoiden Unterraum $S(X)$ von X . Ist X reduziert, so ist $S(X) \neq X$.

Ist X ein regulärer affinoider Raum und A die Strukturalgebra von X , so induziert jedes Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 in A eine invertierbare Garbe auf X und $\text{Pic } X$ wird von der Menge der Primideale $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 erzeugt, siehe [3].

3. Wir stellen nun einige Trennungseigenschaften der holomorphen Topologie eines affinoiden Raumes zusammen.

Ein abgeschlossener affinoider Unterraum N eines affinoiden Raumes X ist das simultane Nullstellengebilde von endlich vielen affinoiden Funktionen von X . Einen affinoiden Teilbereich V von X , der N umfaßt, nennt man eine affinoiden Umgebung von N .

BEMERKUNG 1: *Sind N_1, N_2 abgeschlossene affinoiden Unterräume von X mit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ und ist V ein affinoider Teilbereich von X mit $N_1 \cap V = \emptyset$, so existieren affinoiden Umgebungen U_i von N_i mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cap V = \emptyset$.*

BEWEIS: Es sei $N_1 = \{x \in X : f_i(x) = 0\}$ mit endlich vielen affinoiden Funktionen f_i auf X . Da die f_i weder eine gemeinsame Nullstelle in V noch in N_2 besitzen, gibt es affinoiden Funktionen r_i auf V , s_i auf N_2 , so daß gilt $\sum r_i f_i|_V = 1$, $\sum s_i f_i|_{N_2} = 1$. Also ist $\sup |f_i(x)| \geq \epsilon_1$ unabhängig von $x \in V$ und ebenso $\sup |f_i(x)| \geq \epsilon_2$ für $x \in N_2$. Mit $\epsilon < \inf(\epsilon_1, \epsilon_2)$, $\epsilon \in |k^*|$, gilt daher: $N_1 \subset U_1 := \{x \in X : |f_i(x)| \leq \epsilon\}$ und $U_1 \cap V = \emptyset$, $U_1 \cap N_2 = \emptyset$. Ebenso gewinnt man einen Weierstraßbereich U_2 mit $U_2 \cap U_1 = \emptyset$.

BEMERKUNG 2: *Es seien f_i endlich viele affinoiden Funktionen auf X . Es sei $W_\epsilon = \{x \in X : |f_i(x)| \leq \epsilon\}$, $\epsilon \in |k_a^*|$, ein Weierstraßbereich von X und N ein abgeschlossener affinoider Unterraum von X mit $N \cap W_1 = \emptyset$. Es gibt ein $\epsilon > 1$, $\epsilon \in |k_a^*|$, mit $N \cap W_\epsilon = \emptyset$.*

BEWEIS: Man führt Induktion über die Anzahl r der W_ϵ definierenden Funktionen $f_1, \dots, f_r$. Für $r = 1$ gilt folgende Überlegung: Für $x \in N$ ist $|f_1(x)| > 1$ nach Voraussetzung, und daher gibt es ein $\delta > 1$, so daß unabhängig von $x \in N$ stets gilt: $|f_1(x)| \geq \delta$ für $x \in N$. Für $1 < \epsilon < \delta$, $\epsilon \in |k_a^*|$, ist dann $W_\epsilon \cap N = \emptyset$.

Sei nun $r > 1$ und $U_\epsilon = \{x \in X : |f_1(x)| \leq \epsilon, \dots, |f_{r-1}(x)| \leq \epsilon\}$ sowie $V_\epsilon = \{x \in X : |f_r(x)| \leq \epsilon\}$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt die Existenz von $\epsilon_i \in |k_a^*|$, $\epsilon_i > 1$, mit $U_{\epsilon_1} \cap V_1 \cap N = \emptyset$ und $U_{\epsilon_1} \cap V_{\epsilon_2} \cap N = \emptyset$. Dies war zu zeigen.

BEMERKUNG 3: *Es sei N das simultane Nullstellengebilde der affinoiden Funktionen $f_1, \dots, f_t$ von X . Zu jeder affinoiden Umgebung V von N gibt es einen Weierstraßbereich*

$$W_\epsilon := \{x \in X : |f_i(x)| \leq \epsilon\}, \epsilon \in |k_a^*|, \text{ mit } W_\epsilon \subset V.$$

BEWEIS: Wir behandeln zunächst den Fall, daß N eine Hyperfläche von X ist, dh. N ist die Nullstellenmenge einer einzigen affinoiden Funktion f auf X . Es sei

$$X_\epsilon = \{x \in X : |f(x)| \leq \epsilon\} \text{ und } V_\epsilon = V \cap X_\epsilon, \epsilon \in |k_a^*|,$$

sowie A_ϵ bzw. B_ϵ die Strukturalgebra von X_ϵ bzw. V_ϵ . Weiter sei $A_0 = A/(f)$ und $B_0 = B/(f|V)$. Für jedes $\epsilon \in |k_a^*|$ erhält man auf kanonische Weise Beschränkungsabbildungen $\varphi_\epsilon : A_\epsilon \rightarrow B_\epsilon$.

BEHAUPTUNG: *Es existiert ein $\epsilon > 0$ mit φ_ϵ epimorph.*

BEGRÜNDUNG: Es sei $\{b_1, \dots, b_r\}$ ein affinoides Erzeugendensystem von B über A , siehe [4], §3. Dann gibt es zu b'_i ein $a_i \in A$ mit $\varphi_0(a_i|X_0) = b_i|V_0$. Es sei $b'_i = \varphi(a_i)$, dann ist $b'_i|V_0 = b_i|V_0$ und daher gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $|(b'_i|V_\epsilon) - (b_i|V_\epsilon)| < 1$. Daher ist sodann dieses φ_ϵ endlich, siehe [4], §3. Da aber $V_\epsilon \hookrightarrow X_\epsilon$ eine eindeutige Immersion ist, muß φ_ϵ sogar epimorph sein, [4], §4.

Für das angesprochene ϵ ist die kanonische Einbettung $V_\epsilon \hookrightarrow X_\epsilon$ eine abgeschlossene Einbettung; das bedeutet aber, daß X_ϵ disjunkte Vereinigung des affinoiden Teilbereichs V_ϵ und eines affinoiden Teilbereichs U von X_ϵ ist. Da die Beschränkung f' der Funktion f auf U keine Nullstelle auf U hat, ist f nach unten beschränkt; dh. $|f(x)| \geq \rho > 0$ für $x \in U$. Wählt man daher ein $\delta \in |k^*|$ mit $\delta < \min(\rho, \epsilon)$, so ist $V_\delta = X_\delta$ und somit $X_\delta \subset V$ nachgewiesen.

Mit einem einfachen Induktionsschluß über die Anzahl t der definierenden Funktionen von N erhält man das allgemeine Resultat.

4. Wir zeigen nun, daß eine invertierbare Garbe, die auf einem Unterraum oder einem Teilbereich trivial ist, auch noch auf einem etwas vergrößerten Bereich trivial ist.

LEMMA 1: *Es sei $N \subset X$ ein abgeschlossener affinoider Unterraum von X und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X . Ist $\mathcal{L}|N$ trivial, so existiert eine affinoid Umgebung U von N , so daß $\mathcal{L}|U$ trivial ist.*

BEWEIS: Es sei $g \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ so gewählt, daß $g|N \in \Gamma(N, \mathcal{L}|N)$ die Modulgarbe $\mathcal{L}|N$ erzeugt. Mit $\mathcal{L}'$ sei die von g erzeugte $\mathcal{H}_X$ -Untermodulgarbe von $\mathcal{L}$ bezeichnet. Dann ist der Träger Z der Restklassengarbe $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$ ein abgeschlossener affinoider Unterraum, der N nicht trifft. Es ist ja $Z = \{x \in X: \mathcal{L}_x \neq \mathcal{L}'_x\}$, während für $x \in N$ gilt: $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}'_x$. Wegen Bemerkung 3 ist daher alles gezeigt.

Es sei $U \subset V$ zwei affinoid Teilbereiche eines affinoiden Raumes X . V sei ein rationaler Bereich der Form $\{x \in X: |f_i(x)| \leq |f_r(x)|\}$, wobei $f_0, \dots, f_r$ affinoid Funktionen von X ohne gemeinsame Nullstelle sind. Man sagt, U liegt ganz im Innern von V , falls ein $\epsilon < 1$ existiert, $\epsilon \in |k_a^*|$, mit $U \subset V_\epsilon = \{x: |f_i(x)| \leq \epsilon |f_r(x)|\}$.

LEMMA 2: *Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und U ein Weierstraßbereich von X . Ist $\mathcal{L}$ trivial über U , so gibt es einen rationalen Bereich V von X , derart daß U ganz im Innern von V liegt und $\mathcal{L}$ noch trivial über V ist.*

BEWEIS: Man führt den Beweis ähnlich wie den zu Lemma 1. Es seien $M = \Gamma(X, \mathcal{L})$, $M' = \Gamma(U, \mathcal{L})$ die globalen Schnittmoduln über X bzw. U . Man hat kanonische vollständige Topologien auf M und M' und der Beschränkungshomomorphismus wirft M auf einen dichten Untermodul von M' . Sei A bzw. A' die Strukturalgebra von X bzw. U . Nach Voraussetzung gibt es ein $g \in M'$, das den A' -Modul M' erzeugt. Jedes $h \in M$ schreibt sich als Produkt $h = f \cdot g$, wobei f eine affinoid Funktion auf U ist. Es sei $g - h = (1 - f) \cdot g$, und wählt man daher h sehr nahe an g , so ist $|(1 - f)(x)| < 1$ für alle $x \in U$. Dies bedeutet, daß f keine Nullstelle in U hat. Also erzeugt sogar $h|U$ den A' -Modul M' .

Sei nun $\mathcal{L}'$ die von h erzeugte Untermodulgarbe von $\mathcal{L}$. Dann ist der Träger N von $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$ wieder disjunkt zu U . Da N ein abgeschlossener affinoider Unterraum von X ist, folgt alles aus Bemerkung 1.

RANDBEMERKUNG: Wenn $\mathcal{L}$ eine lokal-freie Garbe ist und $\mathcal{L}|N$ bzw. $\mathcal{L}|U$ frei ist, so gelten entsprechende Aussagen wie in den obigen Lemmata.

2. Invertierbare Garben auf $X \times E$ und $X \times L$

1. Sind X, Y holomorphe Räume und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf dem Produktraum $X \times Y$, so nennt man $\mathcal{L}$ lokal-trivial über X , wenn es eine holomorphe Überdeckung $\mathfrak{U} = (X_i)$ von X gibt, so daß $\mathcal{L}|X_i \times Y$ trivial ist.

Im folgenden betrachten wir die Fälle, wenn $Y = E$ und $Y = L$ ist. Dabei bezeichnet E den eindimensionalen Einheitskreis und L den Rand von E . Es ist $\Gamma(E, \mathcal{H}_E) = k\langle \xi \rangle$ die Algebra der strikt konvergenten Potenzreihen in einer Variablen ξ mit Koeffizienten in k und $\Gamma(L, \mathcal{H}_L) = k\langle \xi, \xi^{-1} \rangle$. Es ist $L = \{x \in E : |\xi(x)| \geq 1\}$ affinoider Teilbereiche von E .

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1: *Jede invertierbare Garbe auf $X \times E$ und $X \times L$ ist lokal-trivial über X .*

Offenbar genügt es, den Satz für affinoide Räume zu beweisen, siehe [4] Abschn. 5.

2. Die Lemmata 1,2 von §1 werden nun verallgemeinert. X und Y bezeichnen wieder affinoide Räume.

LEMMA 3: *Es sei N ein affinoider Unterraum von X und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf $X \times Y$. Ist $\mathcal{L}|N \times Y$ lokal-trivial über N , so existiert eine affinoide Umgebung V von N derart, daß $\mathcal{L}|V \times Y$ lokal-trivial über V ist.*

BEWEIS: Es sei $\mathfrak{N} = (N_i)$ eine affinoide Überdeckung von N , so daß $\mathcal{L}$ trivial bezüglich $\mathfrak{N} \times Y$ ist. Man darf ohne weiteres annehmen, daß die affinoiden Teilbereiche N_i von N rationale Bereiche sind, siehe [4], §3. Es existieren dann offenbar rationale Bereiche X_i von X mit $X_i \cap N = N_i$. Nach §1, Bemerkung 3 gibt es eine affinoide Umgebung V von N mit $V \subset \cup X_i$. Nach Lemma 1 kann man die X_i so klein wählen, daß $\mathcal{L}|X_i \times Y$ trivial ist. Also ist $\mathcal{L}$ trivial über $V_i \times Y$ mit $V_i = X_i \cap V$ und somit ist $\mathcal{L}$ lokal-trivial über V .

Den Beweis des folgenden Hilfssatzes führt man ähnlich wie den von §1, Lemma 2.

LEMMA 4: *Es sei U ein Weierstraßbereich von X und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf $X \times Y$. Ist $\mathcal{L}$ lokal-trivial über U , so existiert ein rationaler Bereich V von X derart, daß U ganz im Innern von V liegt und $\mathcal{L}$ lokal-trivial über V ist.*

3. Zum Beweis von Satz 1 benötigt man noch das folgende Ergebnis.

LEMMA 5: *Es sei R ein regulärer Ring und $\mathfrak{u}$ ein invertierbares Ideal im Polynomring $R[\xi]$ in einer Variablen ξ . Es gebe ein $f = \sum_{\nu=0}^n f_\nu \xi^\nu \in \mathfrak{u}$ mit $f_n = 1$. Dann ist $\mathfrak{u}$ Hauptideal.*

BEWEIS: Da die Höhe von $\mathfrak{u}$ genau 1 ist, ist $\mathfrak{u} \cap R = (0)$ und wenn m der minimale Grad eines Polynoms $\neq 0$ aus $\mathfrak{u}$ ist, so ist $m \geq 1$. Es sei

$$\mathfrak{b} = \left\{ b \in R: \exists p = \sum_{\nu=0}^m p_\nu \xi^\nu \in \mathfrak{u} \text{ mit } p_m = b \right\}$$

Ist $\mathfrak{b} = R$, so ist $\mathfrak{u}$ offenbar Hauptideal. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{m}$, so ist $\mathfrak{u} \cdot R_{\mathfrak{m}}[\xi]$ Hauptideal, da $R_{\mathfrak{m}}$ faktoriell ist. Da f unitär ist, ist dies nicht möglich. Also ist $\mathfrak{b} = R$ und das Lemma ist bewiesen.

4. Wir zeigen nun, daß eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf $X \times E$ lokal-trivial über X ist. Es sei A die Strukturalgebra von X und $M = \Gamma(X, \mathcal{L})$. Wir dürfen annehmen, daß X reduziert ist und führen Induktion über $n = \dim X$. Der Satz ist bekannt für $n = 0$. Sei daher $n > 0$. Da die singulären Punkte von X in einer Hyperfläche enthalten sind, genügt es auf Grund von Lemma 2 die Aussage für reguläre affinoide Räume X zu zeigen. Wir dürfen weiter annehmen, daß $M = \mathfrak{q}$ ein invertierbares Ideal von $A\langle \xi \rangle = \Gamma(XE, \mathcal{H}_{X \times E})$ ist, und daß es ein Element $f = \sum_{\nu=0}^\infty f_\nu \xi^\nu$ in $\mathfrak{q}$ gibt, deren Koeffizienten f_ν keine gemeinsame Nullstelle in A besitzen. Für jedes $x \in X$ ist daher $f(x) := \sum f_\nu(x) \xi^\nu \in k(x)\langle \xi \rangle$ nicht die Nullfunktion, und daher ist der reduzierte Grad s_x von $f(x)$ wohldefiniert: es ist s_x die Zahl m , für welche $|f_\mu(x)| \leq |f_m(x)|$ gilt, falls $\mu \leq m$, und $|f_\nu(x)| < |f_m(x)|$, falls $\nu > m$ ist. Es sei $s = \sup_{x \in X} s_x$. Man zeigt sofort, siehe etwa [2], §2, daß $s < \infty$ ist.

Wir führen nunmehr Induktion über s . Für $s = 0$ ist f eine Einheit in $A\langle \xi \rangle$, also $\mathfrak{q} = A\langle \xi \rangle$. Sei $s > 1$. Der Laurentbereich $Z := \{x \in X: |f_\mu(x)| \leq |f_s(x)| \text{ für } \mu \leq s\}$ ist nicht leer und es gilt für $z \in Z$: $|f_\nu(z)| < |f_s(z)|$ für $\nu > s$.

Es sei nun B die Strukturalgebra von Z und $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}B\langle \xi \rangle$. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz ist $f' = f|Z \times E \in \mathfrak{q}'$ ein Produkt: $f' = e \cdot \omega$ und e eine Einheit in $B\langle \xi \rangle$, sowie ω ein unitäres Polynom vom Grade s in $B[\xi]$. Wegen $\omega \in \mathfrak{q}$ und Lemma 5 ist $\mathfrak{q}$ ein Hauptideal.

Wählt man einen rationalen Bereich V von X derart, daß $\mathcal{L}$ lokaltrivial über V ist und so, daß Z ganz im Innern von V liegt, so

gibt es auf Grund von [4], 3. Hilfssatz 1, Teilbereiche $X_1, \dots, X_t$ von X mit

$$X_i \cap Z = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^t X_i \cup V = X.$$

Es genügt daher zu zeigen, daß $\mathcal{L}$ lokal-trivial über X_i . Daher aber $s_x < s$ für $x \in X_i$ gilt, ist dies wegen der Induktionsvoraussetzung bereits gezeigt.

5. Wir zeigen nun, daß eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf $X \times L$ lokal-trivial über X ist. Es sei $A\langle \xi, \xi^{-1} \rangle$ die Strukturalgebra von $X \times L$. Wir führen wieder Induktion über $n = \dim X$. Für $n = 0$ ist der Satz bekannt. Sei daher $n > 0$. Wir dürfen weiter annehmen, daß X regulär ist, $\mathfrak{q} = \Gamma(X \times L, \mathcal{L})$ ein invertierbares Ideal in $A\langle \xi, \xi^{-1} \rangle$ ist und ein $g \in \mathfrak{q}$ existiert, dessen Koeffizienten keine gemeinsame Nullstelle in X besitzen. Setzt man

$$f = \xi^r \cdot g = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_\nu \xi^\nu$$

und wählt r genügend groß, so spannen die Koeffizienten $\{f_\nu: \nu \geq 0\}$ das Einheitsideal in A auf. Es gibt dann ein $\epsilon > 0$ mit:

$$\inf_{x \in X} \{ \sup_{\nu \geq 0} |f_\nu(x)| \} \geq \epsilon$$

Man kann nun r so groß wählen, daß gilt:

$$|f_\nu(x)| < \epsilon \quad \text{für} \quad \nu < 0.$$

Sei $s = \sup_{x \in X} s_x$, wobei s_x wieder der reduzierte Grad von $g(x)$ ist, dh. $s_x = m$, falls $|f_\mu(x)| \leq |f_m(x)|$ für $\mu \leq m$ und $|f_\nu(x)| > |f_m(x)|$ für $\nu > m$. Es wird wieder Induktion über s geführt.

Man setzt: $Z = \{x \in X : |g_\mu(x)| \leq |g_s(x)| \text{ für } 0 \leq \mu \leq s\}$. Z ist ein nicht leerer rationaler Bereich von X . Mit B sei die Strukturalgebra von Z bezeichnet, und es sei $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}B\langle \xi, \xi^{-1} \rangle$. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz für strikt konvergente Laurentreihen siehe [5], Kap I, §1, Satz 3 ist $f' = f|Z \times L$ ein Produkt: $f' = e \cdot \omega$, e ist eine Einheit in $B\langle \xi, \xi^{-1} \rangle$ und ω ist ein Polynom über B . Daraus folgt, daß $\mathfrak{q}'$ ein Hauptideal ist. Ebenso wie in Abschnitt 4 schließt man nun mit Induktion über s , daß $\mathfrak{q}$ lokal-trivial über X ist.

3. Direkte Zerlegungen

1. Ist A eine affinoide Algebra und $f \in A\langle \xi \rangle$, $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} \xi^{\nu}$, so besitzt f genau dann keine Nullstelle in $X \times E$, wenn gilt:

$$|f_0(x)| > |f_{\nu}(x)| \text{ für } \nu \geq 1 \text{ und alle } x \in X.$$

Setzt man daher

$$G_1 = \left\{ f \in A\langle \xi \rangle : f = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} \xi^{\nu}, f_0 = 1, |f_{\nu}(x)| < 1 \text{ für } \nu \geq 1 \text{ und } x \in X \right\},$$

so ist G_1 eine multiplikative Gruppe von Einheiten von $A\langle \xi \rangle$ und es gibt eine direkte Zerlegung für die Einheitengruppe $A^*\langle \xi \rangle$ von $A\langle \xi \rangle$:

$$A\langle \xi \rangle^* = A^* \cdot G_1$$

Ist X ein holomorpher Raum, so gibt es daher eine direkte Zerlegung für $\mathcal{G} = \mathcal{H}_{X \times E}^*$ als Garbe auf X :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$$

mit $\mathcal{G}_0 = \mathcal{H}^*$.

Auf Grund von §2, Satz 1, gilt:

$$H^1(X, \mathcal{G}) = \text{Pic } X \times E$$

und daher erhält man:

$$\text{SATZ 2: } \text{Pic } X \times E = \text{Pic } X \oplus H^1(X, \mathcal{G}_1)$$

2. Ist A eine zusammenhängende affinoide Algebra und $f \in A\langle \xi, \xi^{-1} \rangle$, $f = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_{\nu} \xi^{\nu}$, so besitzt f genau dann keine Nullstelle in $X \times L$, wenn es einen Index t gibt mit

$$|f_{\nu}(x)| < |f_t(x)| \text{ für } \nu \neq t \text{ und alle } x \in X,$$

siehe [3], Lemma 1.

Weiter gilt:

LEMMA 6: Ist $|f_0(x)| = 1$ und $|f_{\nu}(x)| < 1$ für $\nu \neq 0$, $x \in X$, so existieren eine Potenzreihe $g = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu} \xi^{\nu}$ in ξ und eine Potenzreihe $h = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_{\nu} \xi^{-\nu}$

in ξ^{-1} mit Koeffizienten aus A , derart daß gilt:

$$f = g \cdot h$$

BEWEIS: Wir dürfen A als reduziert voraussetzen und bezeichnen die Norm der gleichmäßigen Konvergenz mit $\| \cdot \|$. Wir zeigen zunächst die folgende Behauptung: es sei $0 < \epsilon < 1$. Dann gibt es eine Einheit p in $A\langle \xi \rangle$, $p = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{\nu} \xi^{\nu}$ mit $p_0 = 1$, $\|p_{\nu}\| \leq \sup_{\mu=1}^{\infty} \|f_{\mu}\|$, so daß gilt:

$$p \cdot f = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu} \xi^{\nu}$$

mit $\|a_{\nu}\| \leq \epsilon$ für $\nu \geq 1$.

BEGRÜNDUNG: Es sei $\delta = \sup_{\nu=1}^{\infty} \|f_{\nu}\|$ und $n \geq 1$ der größte Index mit $\|f_n\| = \delta$. Ist $q_n = 1 - f_0^{-1} f_n \xi^n$, so ist

$$\begin{aligned} q_n f &= \sum b_{\nu} \xi^{\nu} \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \|b_{\nu}\| &\leq \sup (\|f_{\nu}\|, \delta^2) \text{ für } \nu > n \\ \|b_{\nu}\| &\leq \delta \text{ für } 0 < \nu < n \end{aligned}$$

Mit fallender Induktion über n erhält man eine Einheit q in $A\langle \xi \rangle$ derart, daß

$$q \cdot f = \sum c_{\nu} \xi^{\nu}$$

mit

$$\begin{aligned} \|c_{\nu}\| &\leq \sup (\|f_{\nu}\|, \delta^2) \text{ für } \nu > n \\ \|c_{\nu}\| &\leq \delta^2 \text{ für } 0 < \nu \leq n. \end{aligned}$$

Durch mehrmaliges Anwenden dieser Konstruktion erhält man schließlich das gewünschte Element p .

Man findet nun zu ϵ^n eine Einheit p_n mit

$$p_n p_{n-1} \dots p_1 \cdot f = \sum a_{\nu} \xi^{\nu}$$

und $\|a_{\nu}\| \leq \epsilon^n$ für $\nu \geq 1$ und $p_n = 1 + a_n$ mit $\|a_n\| \leq \epsilon^{n-1}$.

Setzt man

$$g' = \prod_{\mu=1}^{\infty} p_{\mu}$$

so ist g' eine Einheit in $A\langle\xi\rangle$ und $g' \cdot f$ ist eine Potenzreihe in ξ^{-1} .

Das Lemma ist bewiesen.

Setzt man

$$G_1 = \left\{ f \in A\langle\xi\rangle^*: f = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} \xi^{\nu} : f_0 = 1 \right\}$$

$$G_{-1} = \left\{ f \in A\langle\xi^{-1}\rangle^*: f = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} \xi^{-\nu} : f_0 = 1 \right\}$$

so sind G_1, G_{-1} multiplikative Gruppen von Einheiten von $A\langle\xi, \xi^{-1}\rangle$ und es gibt eine direkte Zerlegung:

$$A\langle\xi, \xi^{-1}\rangle^* = A^* \cdot G_1 \cdot G_{-1} \cdot \{\xi^{\mathbb{Z}}\}$$

falls A zusammenhängend ist. Hierzu hat man sich lediglich noch klarzumachen, daß $G_1 G_{-1} \cap A^* = \{1\}$ ist.

Ist X ein holomorpher Raum, so gibt es daher eine direkte Zerlegung für $\mathcal{G} = \mathcal{H}_{X \times L}^*$ als Garbe auf X :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathbb{Z}_X,$$

wobei $\mathcal{G}_1 \approx \mathcal{G}_{-1}$ und $\mathbb{Z}_X$ die konstante Garbe auf X mit Halm $\mathbb{Z}$ ist.

Auf Grund von §2, Satz 1, gilt daher:

$$\text{SATZ 3: } \text{Pic } X \times L = \text{Pic } X \oplus H^1(X, \mathcal{G}_1) \oplus H^1(X, \mathcal{G}_{-1}) \oplus H^1(X, \mathbb{Z}_X).$$

3. X sei ein holomorpher Raum. Mit $\mathcal{H}_X$ bezeichnen wir die Garbe derjenigen holomorphen Funktionen f , deren Funktionswert $f(x)$ in jedem Punkt des Definitionsbereichs einen Betrag $|f(x)| < 1$ hat. $\mathcal{H}_X$ ist eine Garbe von Moduln über dem Bewertungsring $\hat{k}$ von k .

Beispiel: X sei das Spektrum der affinoiden Algebra $k\langle\xi^2, \xi^3\rangle \subset k\langle\xi\rangle$. X ist eine affinoid Umgebung des singulären Punktes der Neilschen Parabel.

Ist $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ mit

$$U_1 = \{x \in X : |\xi^2(x)| \leq \epsilon^2\}$$

$$U_2 = \{x \in X : |\xi^2(x)| \geq \epsilon^2\}$$

mit $0 < \epsilon = |c| < 1$, $c \in k$, so ist

$$H^1(\mathcal{U}, \check{\mathcal{H}}_X) \approx \hat{k}/c\hat{k}$$

Insbesondere folgt daraus, daß $H^1(X, \check{\mathcal{H}}_X)$ kein endlich erzeugbarer $\hat{k}$ -Modul ist und kein $c \in k$, $c \neq 0$, existiert mit $c \cdot H^1(X, \check{\mathcal{H}}_X) = 0$.

Wir zeigen nun, daß zwischen den Kohomologiegruppen $H^1(X, \check{\mathcal{H}}_X)$ und $H^1(X, \mathcal{G}_1)$ eine Beziehung besteht, falls $\text{char } k = 0$ ist.

SATZ 4: *Ist $\text{char } k = 0$, so ist $H^1(X, \mathcal{G}_1)$ als Gruppe isomorph zu einem abzählbar – unendlichem Produkt der Gruppe $H^1(X, \check{\mathcal{H}}_X)$. Insbesondere ist $H^1(X, \mathcal{G}_1) = 0$ genau dann, wenn $H^1(X, \check{\mathcal{H}}_X) = 0$ ist.*

BEWEIS: Wir wählen ein $c \in k$, $c \neq 0$, derart, daß die Exponentialreihe

$$\exp z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!}$$

für $|z| < |c|$ konvergiert. Weiter sei

$$\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$$

mit $\mathcal{F}_i = \check{\mathcal{H}}_X$ für alle i . Wir definieren nun einen Isomorphismus e der Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen in die Garbe $\mathcal{G}_1$. Ist $f = (f_i)_{i \geq 1}$ ein Schnitt in $\mathcal{F}$ über einem Teilbereich von X , so sei

$$e(f) := \prod_{i=1}^{\infty} \exp(cf_i \xi^i).$$

Man überlegt sich leicht, daß $e(f)$ wohldefiniert ist und $e: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1$ ein Isomorphismus von Gruppengarben ist. Daraus ergibt sich die obige Behauptung.

4. Ist k algebraisch abgeschlossen und D_i ein zusammenhängender affinoider Teilbereich des eindimensionalen Einheitskreises E , so entsteht D_i durch Herausstechen von endlich vielen “offenen Kreisscheiben” aus einer “abgeschlossenen Kreisscheibe”. Auf den affinoiden Raum

$$X = D_1 x \dots x D_n$$

kann daher die Konstruktion, die in [3], Beweis zu Satz 3 angegeben

ist, angewendet werden. Somit gilt:

$$H^1(X, \mathcal{H}^*) = 0$$

Hieraus folgt:

$$H^1(X, \mathbb{Z}_X) = 0$$

$$H^1(X, \tilde{\mathcal{H}}_X) = 0, \text{ falls } \text{char } k = 0.$$

Es wäre wünschenswert, diese beiden letzten Resultate auf direktem Wege zu beweisen und das Verschwinden der höheren Kohomologiegruppen $H^n(X, \mathbb{Z}_X)$, $H^n(X, \tilde{\mathcal{H}}_X)$ zu zeigen.

4. Die Picard-Gruppen affinoider Räume und ihrer affinen Reduktionen

1. Wir setzen in diesem Paragraphen voraus, daß k diskret bewertet ist. Ist A eine reduzierte k -affinoide Algebra und $\|\cdot\|$ die Spektralnorm von A , so ist

$$A^0 = \{f \in A : \|f\| \leq 1\}$$

ein Ring und

$$j(A) = \{f \in A : \|f\| < 1\}$$

ein Ideal in A^0 . Der Restklassenring

$$\tilde{A} = A^0/j(A)$$

ist eine affine Algebra über dem Restklassenkörper $\tilde{k}$. Ist $\|\cdot\|$ eine Bewertung und ist $\|A\| = |k|$ sowie A^0 regulär, so ist der kanonische Homomorphismus

$$\text{Pic } A^0 \rightarrow \text{Pic } A$$

bijektiv, da eine Uniformisierende π von k^0 ein Primelement von A^0 ist und $A = S^{-1}A^0$ mit $S = \{1, \pi, \pi^2, \pi^3, \dots\}$, siehe [1], Chap III, (7.17).

Außerdem ist der kanonische Homomorphismus

$$\text{Pic } A^0 \rightarrow \text{Pic } \tilde{A}$$

bijektiv, da πA^0 das Radikal von A^0 ist und A^0 in der (πA^0) -adischen Topologie vollständig ist, siehe [1], Chap IX, (3.4).

BEMERKUNG: Ist A reduziert, $\|A\| = k$ und $\tilde{A}$ regulär, so ist A^0 regulär.

BEWEIS: Man liftet ein lokales minimales Erzeugendensystem eines maximalen Ideals von $\tilde{A}$ und ergänzt es durch eine Uniformisierende π von k^0 . Auf diese Weise erhält man ein minimales lokales Erzeugendensystem des zugehörigen maximalen Ideal von A^0 und wegen $\dim A^0 = \dim \tilde{A} + 1$ und $j(A) = \pi A^0$ folgt daraus die Behauptung.

2. Es sei nun $B = A\langle t \rangle$ die Algebra der strikt konvergenten Potenzreihen über A in einer Variablen t . Dann ist $B^0 = A^0\langle t \rangle$ und $\tilde{B} = \tilde{A}[t]$ die Algebra der Polynome in t über $\tilde{A}$. Außerdem ist $\|B\| = \|A\|$.

Ist daher $\|A\| = |k|$ und $\tilde{A}$ regulär, so ist $\text{Pic } A = \text{Pic } A^0 = \text{Pic } \tilde{A} = \text{Pic } \tilde{B} = \text{Pic } B^0 = \text{Pic } B$, da $\tilde{B}$ regulär ist und Polynomring über $\tilde{A}$ ist, siehe [1], Chap. III, (7.19). Dies bedeutet, daß für die in §3, 1 definierte Garbe $\mathcal{G}_i$ unter diesen Voraussetzungen $H^1(X, \mathcal{G}_i) = 0$ ist, wobei X den zu A gehörenden affinoiden Raum bezeichnet.

3. Es sei nun $C = A\langle t, t^{-1} \rangle$ die Algebra der strikt konvergenten Laurentreihen über A in einer Variablen t . Dann ist $C^0 = A^0\langle t, t^{-1} \rangle$ und $\tilde{C} = \tilde{A}[t, t^{-1}]$ die Algebra der Laurentpolynome in t über $\tilde{A}$. Außerdem ist $\|C\| = \|A\|$. Ist daher $\|A\| = |k|$ und $\tilde{A}$ regulär, so gilt wegen $\text{Pic } \tilde{A} = \text{Pic } \tilde{C}$ nun auch:

$$\text{Pic } A = \text{Pic } C.$$

Auf Grund der Ergebnisse von §3.2 folgt daraus, daß $H^1(X, \mathbb{Z}_X) = 0$ ist, wobei X den zu A gehörenden affinoiden Raum bezeichnet.

4. Die in den obigen Abschnitten angegebene Argumentation kann auf nichtreguläre Algebren $\tilde{A}$ verallgemeinert werden, solange A^0 regulär ist. Wenn man dazu Ergebnisse von Bass-Murthy heranzieht, erhält man eindimensionale affinoide Räume X mit $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \neq 0$ bzw. $H^1(X, \mathcal{K}_X) \neq 0$. Anstatt diese Überlegungen allgemein darzulegen, möchte ich diese Betrachtungen an zwei einfachen Beispielen erläutern:

BEISPIEL 1: Es sei $A = k\langle \xi, \eta \rangle$ und das Relationenideal zwischen ξ und η sei von $\eta^2 - \xi^3 - \pi$ erzeugt. Dabei sei π eine Uniformisierende des diskreten Bewertungsrings k^0 .

Es ist $A^0 = k\langle \xi, \eta \rangle$ und $\tilde{A}$ die affine Algebra der Neilschen Parabel $\eta^2 - \xi^3 = 0$.

Nun ist A^0 regulär, da das von ξ, η, π erzeugte maximale Ideal m_0 bereits von ξ and η erzeugt wird und auf die maximalen Ideale $m \neq m_0$ die Bemerkung von Abschnitt 1 angewendet werden kann.

Ist $B = A\langle t \rangle$, so ist B^0 regulär und daher gilt:

$$\begin{aligned}\text{Pic } \tilde{A} &= \text{Pic } A^0 = \text{Pic } A \\ \text{Pic } B &= \text{Pic } B^0 = \text{Pic } B\end{aligned}$$

Wir wenden nunmehr Theorem 8.1 von [2] an und erhalten eine Zerlegung

$$\text{Pic } \tilde{A}[t] = \text{Pic } \tilde{A} \oplus P$$

Die Gruppe P ist nicht trivial, da das Führerideal $\mathfrak{b}$ von $\tilde{A}$ in seiner Normalisierung $\hat{A}$ als Ideal von $\hat{A}$ kein Radikalideal ist. Bezeichnet $X = \text{Sp } A$ den zu A gehörenden affinoiden Raum, so ist X affinoider Teilbereich einer nichtsingulären Kurve vom Geschlecht 1 mit $H^1(X, \mathcal{H}_X) = 0$.

BEISPIEL 2: Es sei $A = k\langle \xi, \eta \rangle$ und das Relationenideal zwischen ξ und η sei von $\eta^2 - \xi^3 - \xi^2 - \pi$ erzeugt.

Es sei $B = A\langle t \rangle$, $C = A\langle t, t^{-1} \rangle$. Es ist $A^0 = k^0\langle \xi, \eta \rangle$ und man überlegt wie in Beispiel 1, daß A^0 regulär ist. Das Spektrum von $\tilde{A}$ besitzt einen gewöhnlichen Doppelpunkt. Ist $\mathfrak{b}$ das Führerideal von $\tilde{A}$ in seiner Normalisierung $\hat{A}$, so gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{A}/\mathfrak{b} &= \tilde{k} \\ \tilde{A}/\mathfrak{b} &= \tilde{k} \oplus \tilde{k}\end{aligned}$$

Daher ist $\mathfrak{b}$ Radikalideal in A und aus Theorem 8.1 von [2] folgt:

$$\begin{aligned}\text{Pic } \tilde{A} &= \text{Pic } \tilde{B} \\ \text{Pic } \tilde{C} &= \text{Pic } \tilde{A} \oplus \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Wegen $\text{Pic } \tilde{B} = \text{Pic } B$ und $\text{Pic } \tilde{C} = \text{Pic } \tilde{C}$ folgt daraus:

$$\begin{aligned}H^1(X, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \\ H^1(X, \mathcal{H}_X) &= 0, \text{ falls } \text{char } k = 0.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet X wiederum den zu A gehörenden affinoiden Raum.

LITERATUR

- [1] H. BASS: *Algebraic K-Theory*. New York–Amsterdam 1968.
- [2] H. BASS and P. MURTHY: Grothendieck groups and Picard groups of abelian group rings. *Ann. of Math.* 86 (1967) 16–73.
- [3] L. GERRITZEN: Über Endomorphismen nichtarchimedischer holomorpher Tori. *Invent. math.* 11 (1970) 27–36.
- [4] L. GERRITZEN and H. GRAUERT: Die Azyklizität der affinoiden Überdeckungen. *Global Analysis. Papers in Honor of K. Kodaira*. University of Tokyo Press; Princeton University Press 1970.
- [5] U. GÜNTZER: *Laurent-Reihen über vollständig filtrierten Ringen*, Dissertation. Göttingen 1966.

(Oblatum 28-VIII-1975)

J. W. Goethe Universität
Fachbereich Mathematik
Robert-Mayer Strasse 6–10
Frankfurt a. Main
Bundesrepublik Deutschland

Ruhr-Universität
Abt. für Mathematik
463 Bochum
Bundesrepublik Deutschland