

# COMPOSITIO MATHEMATICA

PIERRE MARRY

## **Type d'homotopie rationnelle relative des fibrés en variétés de Stiefel**

*Compositio Mathematica*, tome 34, n° 1 (1977), p. 91-98

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1977\\_\\_34\\_1\\_91\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1977__34_1_91_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**TYPE D'HOMOTOPIE RATIONNELLE RELATIVE  
 DES FIBRES EN VARIETES DE STIEFEL**

Pierre Marry

Dans un précédent article ([1]), nous mettions en évidence quelques propriétés d'une forme différentielle ("élément d'aire relatif") qui s'introduit dans l'étude du caractère d'Euler, au sens de Cheeger et Simons, d'un fibré vectoriel muni d'une métrique sur les fibres. Nous en déduisons une méthode simple pour calculer l'homotopie rationnelle relative du fibré en sphères associé. Dans le présent article, nous généralisons la méthode au cas des fibrés en variétés de Stiefel réelles ou complexes.

**0. Préliminaires algébriques**

Etant donné un anneau  $k$ , on appelle  $k$ -algèbre anticommutative  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ -bigraduée une  $k$ -algèbre  $A = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}} A_p^q$  telle que:

(a) Pour tous  $p$  et  $p'$  dans  $\mathbb{Z}_2$ , tous  $q$  et  $q'$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a

$$A_p^q \cdot A_{p'}^{q'} \subset A_{p+p'}^{q+q'}$$

(b) Pour tout  $x \in A_p^q$  et tout  $x' \in A_{p'}^{q'}$ , on a  $x' \cdot x = (-1)^{qq'} x \cdot x'$ .

Etant donné une telle algèbre et  $q \in \mathbb{Z}$ , le  $k$ -module  $A^q = A_0^q \oplus A_1^q$  est la *composante homogène de degré  $q$  de  $A$*  qui est ainsi munie d'une  $\mathbb{Z}$ -graduation.

D'autre part, pour  $p \in \mathbb{Z}_2$ , on pose  $A_p = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} A_p^q$ . La décomposition  $A = A_0 \oplus A_1$  donne à  $A$  une structure de  $k$ -algèbre  $\mathbb{Z}_2$ -graduée (cf. [2], XI.4.4.) En particulier  $A_0$  est une sous- $k$ -algèbre anticommutative  $\mathbb{Z}$ -graduée de  $A$  et  $A_1$  est canoniquement muni d'une structure de  $A_0$ -module.

Etant données deux  $k$ -algèbres anticommutatives  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ -bigraduées  $A$  et  $B$ , une application  $f$  de  $A$  dans  $B$  est un morphisme pour cette structure si c'est un morphisme d'algèbres et si, pour tout  $p \in \mathbb{Z}_2$  et tout  $q \in \mathbb{Z}$ , on a  $f(A_p^q) \subset B_p^q$ .

Une  $k$ -algèbre différentielle anticommutative  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$  bigraduée est une  $k$ -algèbre anticommutative  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ -bigraduée  $A$  munie d'une différentielle  $d : A \rightarrow A$  telle que  $d \circ d = 0$ , que pour tout  $p \in \mathbb{Z}_2$ , tout  $q \in \mathbb{Z}$ , on ait  $d(A_p^q) \subset A_p^{q+1}$ , et que pour  $x \in A_p^q$  et  $x' \in A_{p'}^{q'}$  on ait  $d(x \cdot x') = dx \cdot x' + (-1)^q x \cdot dx'$ .

On a alors pour tout  $q \in \mathbb{Z}$  un isomorphisme canonique entre  $H^q(A)$  et  $H^q(A_0) \oplus H^q(A_1)$ .

Soient  $A$  une  $k$ -algèbre anticommutative  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ -bigraduée et  $X$  un ensemble, muni d'une application "bidegré"  $\deg : X \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ . L'algèbre  $A(X)$  anticommutative libre engendrée par  $X$  sur  $A$  est munie naturellement d'une  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ -bigraduation. On l'appelle la  $k$ -algèbre anticommutative  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ -bigraduée libre sur  $A$  engendrée par  $X$ .

Si pour tout  $x \in X$  la composante sur  $\mathbb{Z}_2$  de  $\deg x$  est nulle, alors  $A(X)_0 = A_0(X)$  et  $A(X)_1 = A_0(X) \otimes_{A_0} A_1$ .

Rappelons qu'un morphisme d'algèbres différentielles graduées est appelé un quasi-isomorphisme si et seulement s'il induit un isomorphisme sur la cohomologie. L'existence d'un quasi-isomorphisme  $\varphi : A \rightarrow B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux algèbres différentielles graduées, n'implique pas celle d'un quasi-isomorphisme de  $B$  dans  $A$  induisant l'isomorphisme inverse sur la cohomologie. Nous aurons besoin dans la suite de cet article des deux lemmes suivants:

**LEMME 0.1:** Soient  $A$  et  $B$  deux algèbres différentielles graduées et  $\phi : A \rightarrow B$  un quasi-isomorphisme,  $d_A$  et  $d_B$  les différentielles dans  $A$  et  $B$ . Considérons les algèbres graduées libres  $A(x)$  et  $B(x)$  munies de différentielles  $d'_A$  et  $d'_B$  prolongeant  $d_A$  et  $d_B$  telles que  $d'_A x \in A$  et  $d'_B x \in B$ , et  $d'_B x = \phi(d'_A x)$ . Alors le morphisme  $\phi'$  de  $A(x)$  dans  $B(x)$  prolongeant  $\phi$  et tel que  $\phi'(x) = x$  est un quasi-isomorphisme.

Immédiat.

**LEMME 0.2:** Soit  $A$  une algèbre différentielle graduée,  $x$  et  $y$  deux générateurs de degrés respectifs  $2p-1$  et  $2p$ , et  $A(x, y)$  l'algèbre graduée libre sur  $A$  engendrée par  $x$  et  $y$ , munie de la différentielle prolongeant celle de  $A$  et telle que  $dx = y$ . Alors l'injection canonique de  $A$  dans  $A(x, y)$  est un quasi-isomorphisme.

Immédiat.

Etant donné une variété  $M$  et un faisceau inversible  $T$  sur  $M$  égal à son inverse, soit  $\Omega_M^\bullet$  (resp.  $\Omega_M^\bullet(T)$ ) l'algèbre différentielle graduée (resp. le  $\Omega_M^\bullet$ -module différentiel gradué) des formes différentielles  $C^\infty$

(resp.  $C^\infty$  et  $T$ -tordues) sur  $M$ . On munit le module différentiel  $\hat{\Omega}_M(T) = \Omega_M \oplus \dot{\Omega}_M(T)$  d'une structure de  $R$ -algèbre anticommutative différentielle  $Z_2 \times Z$ -bigraduée en posant

$$\hat{\Omega}_M(T)_0^q = \Omega_M^q \quad \text{et} \quad \hat{\Omega}_M(T)_1^q = \Omega_M^q(T) \quad \text{pour tout } q \in Z,$$

le produit étant le produit extérieur habituel, en tenant compte des identifications

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \otimes T &= T \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ T \otimes T &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nous appellerons cette algèbre différentielle anticommutative  $Z_2 \times Z$ -bigraduée la  $T$ -algèbre de de Rham de  $M$ .

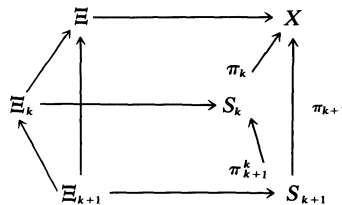
### 1. Fibrés en variétés de Stiefel réelles

Soit  $\Xi \xrightarrow{\pi} X$  un fibré vectoriel réel de rang  $r > 1$  au dessus de la variété  $X$  de dimension  $n$ , muni d'une métrique sur les fibres et d'une connexion  $\nabla$  compatible avec la métrique.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq r$ , soit  $S_k \xrightarrow{\pi_k} X$  le fibré en variétés de Stiefel des systèmes de  $k$  vecteurs orthonormés de  $\Xi$ . Notons  $\Xi_k$  le fibré vectoriel  $\pi_k^* \Xi$  au dessus de  $S_k$ ,  $\nabla_k^i$  la connexion sur  $\Xi_k$  image réciproque de  $\nabla$ . Posons  $S_0 = X$  et  $\pi_0 = Id_X$ .

On définit  $k$  sections  $\xi^i (1 \leq i \leq k)$  de  $\Xi_k$  en associant à  $s_x = (x; \xi_x^1, \xi_x^2, \dots, \xi_x^k) \in S_{k,x}$  l'élément  $(s_x; \xi_x^i)$  de  $\Xi_{k,s_x}$ . Notons  $E_k$  le sous-fibré de  $\Xi_k$  engendré par les  $\xi^i$ , et  $F_k$  le sous-fibré, de rang  $r-k$ , orthogonal à  $E_k$ . L'espace total du fibré en sphères unités associé à  $F_k$  n'est autre que  $S_{k+1}$  et par conséquent on a une fibration canonique  $S_{k+1} \xrightarrow{\pi_{k+1}^k} S_k$  en sphères de dimension  $r-k-1$ , où  $\pi_{k+1}^k$  est l'application, fibrée au dessus de  $X$ , qui à  $(x, \xi_x^1, \dots, \xi_x^{k+1}) \in S_{k+1}$  associe  $(x; \xi_x^1, \dots, \xi_x^k)$ .

On a un diagramme commutatif



Notons  $\sigma_{r-k-1}$  l'élément d'aire relatif canonique sur  $S_{k+1} \xrightarrow{\pi_{k+1}^k} S_k$  associé à la connexion  $\nabla_k^i|_{F_k}$ . Comme  $E_k$  est trivial, on peut considérer  $\sigma_{r-k-1}$  comme une  $(r-k-1)$ -forme sur  $S_{k+1}$ ,  $\pi_{k+1}^* t(\Xi)$ -tordue (où  $t(\Xi)$  désigne le faisceau d'orientation relative de  $\Xi \xrightarrow{\pi} X$ ).

Soient  $\nabla_k^0$  la connexion sur  $\Xi_k$  égale à  $(\nabla_k^1|_{F_k}) \oplus [\oplus_{i=1}^k (\nabla_k^1|_{\mathbb{R}e^i})]$ ,  $pr_k$  la première projection de  $S_k \times [0, 1]$  sur  $S_k$ ,  $\bar{\nabla}_k$  la connexion sur  $\bar{\Xi}_k = pr_k^* \Xi_k$  qui réalise l'homotopie entre  $\nabla_k^0$  et  $\nabla_k^1$ . Notons  $\eta_{4m-1}$  la forme  $\int_{pr_k} p_{4m}(\bar{\Xi}_k, \bar{\nabla}_k)$ , où  $r - k = 2m + 1$  et où  $p_{4m}(\bar{\Xi}_k, \bar{\nabla}_k)$  désigne la forme de Pontriaguine de degré  $4m$  de  $\bar{\Xi}_k$  pour la connexion  $\bar{\nabla}_k$ . Le degré de  $\eta_{4m-1}$  est  $4m - 1$ .

Notons d'autre part  $\chi_{r-k}$  la forme d'Euler du fibré  $F_k \rightarrow S_k$  pour la connexion  $\nabla_k^1|_{F_k}$ . C'est une forme sur  $S_k$  de degré  $r - k$ .

On a la proposition suivante:

PROPOSITION 1.1: *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $2m \leq r$ , on a*

$$(a) \quad d\sigma_{2m-1} = -\pi_{r-2m+1}^{r-2m} * (\chi_{2m})$$

$$(b) \quad \text{Si } r \neq 2m, \quad 2\sigma_{2m} = \chi_{2m}, \quad d\sigma_{2m} = 0$$

$$\text{et } \langle 2\sigma_{2m}, 2\sigma_{2m} \rangle = \pi_{r-2m}^{r-2m} p_{4m}(\Xi, \nabla) + d\eta_{4m-1}$$

Le (b) résulte de II.3.1, en considérant  $\sigma_{2m}$  et  $\chi_{2m}$  comme des formes  $\pi_{r-2m}^* t(\Xi)$ -tordues. Le (a) résulte de I.3.1 (les références renvoient à notre précédent article [2]).

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq r$ , notons  $\hat{\Omega}_k$  la  $\pi_k^* t(\Xi)$ -algèbre de de Rham de  $S_k$ .

Pour  $2 \leq k \leq r$ , on considère l'ensemble

$$X_k = \{s_{r-k}, s_{r-1}\} \cup \{y_{4m-1} / r - k \leq 2m \leq r - 1\}$$

où  $s_{r-k} = 0$  si  $r = k$  ou  $r \not\equiv k \pmod{2}$ ,  $s_{r-1} = 0$  si  $r \not\equiv 0 \pmod{2}$  et  $y_{-1} = 0$ .

On pose

$$X_1 = \{s_{r-1}\} \text{ si } r \text{ est pair,}$$

$$X_1 = \{s_{r-1}, y_{4m-1}\} \text{ si } r = 2m + 1.$$

On munit  $X_k$  de l'application bidegré  $\text{deg}: X_k \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  telle que

$$\text{deg } s_h = (\epsilon, h) \quad \text{et } \text{deg } y_h = (0, h),$$

où  $\epsilon = 0$  si  $\pi_k^* t(\Xi)$  est trivial, et  $\epsilon = 1$  dans le cas contraire. On pose de plus  $X_0 = \emptyset$ . On a la proposition suivante:

PROPOSITION 1.2: *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq r$ , on a un quasi-isomorphisme  $u_k: \hat{\Omega}_0^*(X_k) \rightarrow \hat{\Omega}_k^*$  de  $\mathbb{R}$ -algèbres différentielles anticommutatives  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ -bigraduées, où  $\hat{\Omega}_0^*(X_k)$  est munie de la différentielle prolongeant celle de  $\hat{\Omega}_0^*$  telle que  $ds_{r-k} = 0$ ,  $ds_{r-1} = \chi_r$  et pour tout  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $r - k < 2m < r - 1$ ,  $dy_{4m-1} = p_{4m}(\Xi, \nabla)$ ; pour  $2m = r - k$  ou  $2m = r - 1$ ,  $dy_{4m-1} = p_{4m}(\Xi, \nabla) - 4s_{2m}^2$ .*

Cette proposition est une conséquence du Lemme suivant.

LEMME 1.3: *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq r$ , on a un quasi-isomorphisme  $u'_k: \hat{\Omega}_0(X'_k) \rightarrow \hat{\Omega}_k$  de  $\mathbb{R}$ -algèbres différentielles anticommutatives  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ -bigraduées, où*

$$X'_k = \{s_i / r - k \leq i \leq r - 1\} \cup \{y'_{4m-1} / r - k \leq 2m \leq r - 1\}$$

est muni de l'application bidegré  $\text{deg}: X'_k \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$  telle que

$$\text{deg } s_i = (\epsilon, i) \quad \text{et } \text{deg } y'_h = (0, h)$$

et où  $\hat{\Omega}_0(X'_k)$  est munie de la différentielle prolongeant celle de  $\hat{\Omega}_0$  et telle que:

- (a) Si  $h \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $h \neq r - 1$ ,  $ds_h = -2s_{h+1}$
- (b) Si  $h \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $ds_h = 0$  et  $dy'_{2h-1} = -4s_h^2 + p_{4m}(\Xi, \nabla)$
- (c) Si  $r \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $ds_{r-1} = \chi_r$ .

En effet, posons  $u'_0 = Id_{\hat{\Omega}_0}$ , et pour  $0 < k \leq r$  définissons  $u'_k$  comme étant l'unique morphisme tel que:

- (i) Pour  $\alpha \in \hat{\Omega}_0$ ,  $u'_k(\alpha) = \pi^*(\alpha)$
- (ii) Pour  $r - k \leq h < r - 1$ ,  $u'_k(s_h) = -\sigma_h$
- (iii) Pour  $r - k \leq 2m \leq r - 1$ ,  $u'_k(y'_{4m-1}) = -\eta_{4m-1}$

L'homomorphisme  $u'_0$  est un quasi-isomorphisme. Supposons qu'il en soit de même jusqu'à l'ordre  $k$ . Comme  $\hat{\Omega}_0(X'_{k+1}) = [\hat{\Omega}_0(X'_k)](X'_{k+1} - X'_k)$ , pour qu'il en soit de même à l'ordre  $k + 1$ , il suffit, d'après le lemme 0.1 et comme  $u'_k$  est un quasi isomorphisme de  $\hat{\Omega}_0(X'_k)$  dans  $\hat{\Omega}_k$ , que l'on ait un quasi isomorphisme entre  $\hat{\Omega}_k(X'_{k+1} - X'_k)$  et  $\hat{\Omega}_{k+1}$ , ce qui est vrai d'après la proposition II.4.2 de notre article précédent [1].

L'algèbre  $\Omega'_0(X'_k)$  est égale à  $\Omega_0(X''_k)$ , où  $X''_k$  est l'ensemble

$$\{s_i / r - k \leq i \leq r - 1\} \cup \{y_{4m-1} / r - k \leq 2m \leq r - 1\}$$

où  $y_{4m-1} = y'_{4m-1} - 2s_{2m-1}s_{2m}$  pour  $r - k < 2m < r - 1$ , et  $y_{4m-1} = y'_{4m-1}$  pour  $2m = r - k$  ou  $2m = r - 1$ . On a  $dy_{4m-1} = p_{4m}(\Xi, \nabla)$  pour  $r - k < 2m < r - 1$ . D'après le lemme 0.2 et les relations (a) du lemme 1.3, l'injection canonique de  $\Omega'_0(X'_k)$  dans  $\Omega_0(X''_k)$  est un quasi-isomorphisme, ce qui démontre la proposition 1.2.

## 2. Fibrés en variétés de Stiefel complexes

Soit  $\Xi \xrightarrow{\pi} X$  un fibré vectoriel complexe, de rang (complexe)  $r$ , muni d'une métrique hermitienne sur les fibres et d'une connexion  $\nabla$  compatible avec cette métrique. Le fibré  $\Xi$  est canoniquement orientable relativement à  $X$ .

Notons  $S_k \xrightarrow{\pi_k} X$  le fibré en variétés de Stiefel complexes des systèmes de  $k$  vecteurs orthonormés de  $\Xi$ . De même que dans le cas réel, on a une fibration  $S_{k+1} \xrightarrow{\pi_{k+1}} S_k$ , en sphères de dimension  $2(r-k)-1$ , qui est une application fibrée au dessus de  $X$ . Le fibré  $\Xi_k = \pi_k^* \Xi$  se scinde encore en  $\Xi_k = E_k \oplus F_k$  et  $S_{k+1} \xrightarrow{\pi_{k+1}} S_k$  est le fibré en sphères unités associé à  $F_k$ . On définit, de la même manière que dans le cas réel, les connexions  $\nabla_k^1$  et  $\nabla_k^0$  sur  $\Xi_k$  et les formes  $\sigma_{2(r-k)-1}$  et  $\chi_{2(r-k)}$ . On a la proposition suivante:

**PROPOSITION 2.1:** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < m \leq r$ , il existe sur  $S_{r-m+1}$  un élément d'aire relatif  $\sigma_{2m-1}^c$  tel que l'on ait*

$$d\sigma_{2m-1}^c = -\pi_{r-m+1}^* c_{2m}(\Xi, \nabla)$$

où  $c_{2m}(\Xi, \nabla)$  est la forme de Chern de degré  $2m$  de  $\Xi$  pour la connexion  $\nabla$ .

En effet,  $d\sigma_{2m-1} = -\pi_{r-m+1}^{r-m} \chi_{2m}$ . Or

$$\chi_{2m} = \chi(F_{r-m}, \nabla_{r-m}^1 |_{F_{r-m}}) = c_{2m}(F_{r-m}, \nabla_{r-m}^1 |_{F_{r-m}}) = c_{2m}(\Xi_{r-m}, \nabla_{r-m}^0)$$

Donc il existe une  $(2m-1)$ -forme  $Q_{2m-1}$  sur  $S_{r-m}$  telle que

$$\chi_{2m} = c_{2m}(\Xi_{r-m}, \nabla_{r-m}^1) + dQ_{2m-1}$$

L'élément d'aire relatif  $\sigma_{2m-1}^c = \sigma_{2m-1} + \pi_{r-m+1}^{r-m} Q_{2m-1}$  sur  $S_{r-m+1}$  répond alors bien à la question.

Définissons les algèbres différentielles graduées  $\Omega_X^k$  et  $\Omega_k^i$ , comme dans le cas réel, pour  $0 \leq k \leq r$ .

On a la proposition suivante:

**PROPOSITION 2.2:** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq r$ , on a un quasi-isomorphisme  $u_k$  de  $\Omega_X^k(S_{2(r-k)+1}, \dots, S_{2r-1})$  dans  $\Omega_k^i$  où, pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $r-k \leq m \leq r$ , on a  $d^\circ s_{2m-1} = 2m-1$ , et où  $\Omega_X^k(S_{2(r-k)+1}, \dots, S_{2r-1})$  est munie de la différentielle prolongeant celle de  $\Omega_X^k$  et telle que  $ds_{2m-1} = -c_{2m}(\Xi, \nabla)$ .*

On pose  $u_0 = Id_{\Omega_X}$  et, pour  $k > 0$ ,  $u_k(\alpha) = \pi_k^*(\alpha)$  pour  $\alpha \in \Omega_X^k$  et, pour  $r-k \leq m \leq r$ ,  $u_k(s_{2m-1}) = \sigma_{2m-1}^c$ .

La proposition 2.2 est alors une conséquence directe de [1], II.4.2.

### 3. Modèle minimal des variétés de Stiefel

On a la proposition suivante:

**PROPOSITION 3.1:** (A) Soit  $S_{r,k}(\mathbb{R})$  la variété de Stiefel des systèmes de  $k$  vecteurs orthonormés de  $\mathbb{R}^r$ ,  $r > 1$ , muni de son produit scalaire habituel, soit  $\Omega_{S_{r,k}(\mathbb{R})}^\bullet$  son algèbre de de Rham. On a un quasi-isomorphisme

$$U_{r,k} : \mathbb{R}(X_k) \rightarrow \Omega_{S_{r,k}(\mathbb{R})}^\bullet$$

où  $X_k = \{s_{r-k}, s_{r-1}\} \cup \{y_{4m-1} / r - k \leq 2m \leq r - 1\}$  est muni du degré donné par l'indice, avec  $s_{r-k} = 0$  si  $r \not\equiv k \pmod{2}$  ou  $r = k$ ,  $s_{r-1} = 0$  si  $r \not\equiv 0 \pmod{2}$  et  $y_{-1} = 0$ , et où  $\mathbb{R}(X_k)$  est l'algèbre graduée anticommutative libre sur  $\mathbb{R}$  engendrée par  $X_k$ , munie de la différentielle nulle sur  $\mathbb{R}$  et sur les  $s_{r-k}$ ,  $s_{r-1}$  et  $y_{4m-1}$  pour  $r - k < 2m \leq r - 1$ , et telle que  $dy_{4m-1} = s_{2m}^2$  pour  $2m = r - k$ .

(B) Soit  $S_{r,k}(\mathbb{C})$  la variété de Stiefel des systèmes de  $k$  vecteurs orthonormés de  $\mathbb{C}^r$  muni de son produit scalaire hermitien habituel, soit  $\Omega_{S_{r,k}(\mathbb{C})}^\bullet$  son algèbre de de Rham. On a un quasi-isomorphisme

$$V_{r,k} : \mathbb{R}(s_{2r-2k+1}, s_{2r-2k+3}, \dots, s_{2r-1}) \rightarrow \Omega_{S_{r,k}(\mathbb{C})}^\bullet$$

où l'algèbre de gauche est l'algèbre graduée anticommutative libre engendrée sur  $\mathbb{R}$  par les éléments  $s_{2r-2k+1}, \dots, s_{2r-1}$  de degrés égaux à leurs indices, munie de la différentielle nulle.

C'est une conséquence immédiate des propositions 1.2 et 2.2 dans le cas où  $X$  est réduite à un point, en changeant les  $y_{4m-1}$  du numéro précédent en  $-\frac{1}{4}y_{4m-1}$ .

Les algèbres libres définies en (A) et (B) dans la proposition ci-dessus sont des modèles minimaux des algèbres de de Rham de  $S_{r,k}(\mathbb{R})$  et  $S_{r,k}(\mathbb{C})$ , et permettent donc de calculer aisément l'homotopie réelle, donc aussi l'homotopie rationnelle des variétés de Stiefel réelles et complexes (cf. [3], theorem B).

De la proposition 3.1, on déduit immédiatement la proposition suivante:

**PROPOSITION 3.2:** L'algèbre de cohomologie réelle de  $S_{r,k}(\mathbb{R})$  (resp.  $S_{r,k}(\mathbb{C})$ ) est isomorphe à l'algèbre anticommutative graduée sur  $\mathbb{R}$  engendrée par des générateurs  $s_{r-k}, s_{r-1}, y_{4m-1}$  pour  $r - k < 2m \leq r - 1$ ,



de degrés donnés par l'indice, avec  $s_{r-k} = 0$  si  $r \not\equiv k \pmod{2}$  ou  $r = k$ ,  $s_{r-1} = 0$  si  $r \not\equiv 0 \pmod{2}$ , et avec la relation  $s_{r-k}^2 = 0$ . (resp. à l'algèbre anticommutative graduée libre sur  $\mathbb{R}$  engendrée par des générateurs  $s_{2r-2k+1}, s_{2r-2k+3}, \dots, s_{2r-1}$  de degrés donnés par l'indice.)

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. MARRY, and J. L. VERDIER: Quelques problèmes d'intersections en géométrie riemannienne. Paris 1974 (à paraître au Journal of Differential Geometry).
- [2] D. HUSEMOLLER: Fibre bundles. McGraw-Hill, series in higher mathematics, New-York 1966.
- [3] D. SULLIVAN: Differential forms and the topology of manifolds. Volume on manifolds conference, Tokyo 1973.
- [4] J. DIEUDONNÉ: Eléments d'analyse, tome 3. Gauthier-Villars, Paris 1970.
- [5] E. FRIEDLANDER, P. A. GRIFFITHS, and J. MORGAN: Homotopy theory and differential forms. *Seminario di Geometria*, Firenze 1972.

(Oblatum 19-XI-1975)

Departement de Mathématiques  
 Conservatoire National des Arts et Métiers  
 292, rue Saint-Martin  
 75141 PARIS CEDEX 03